

**ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ**  
(астрономия, 2-й семестр, 2023/24 уч. г.)

*А. А. Лодкин*

1. ! Определенный интеграл Ньютона – Лейбница и его свойства. Теорема Барроу.
2. Среднее значение функции. Теорема о среднем.
3. Интеграл как предел интегральных сумм Римана. Некоторые формулы приближенного вычисления интеграла.
4. Интегральная форма остаточного члена формулы Тейлора.
5. Интегральные неравенства.
6. Формула Валлиса.
7. ! Аддитивная функция промежутка и её плотность. Примеры аддитивных функций.
8. Тесты на плотность.
9. ! Площадь криволинейного сектора.
10. ! Объём тела вращения.
11. Приложения интеграла к задачам механики и физики.
12. Длина пути и кривой. Обсуждение и определение.
13. ! Гладкий путь и вычисление его длины.
14. Геометрический смысл функций  $\operatorname{arccos}$  и  $\operatorname{arsh}$ .
15. ! Несобственный интеграл для промежутков различных типов, его общие свойства.
16. Признак Больцано – Коши сходимости интеграла.
17. ! Свойства несобственного интеграла от положительных функций. Признаки сравнения.
18. ! Интегралы  $\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{dx}{x^p}$  и  $\int_1^{\rightarrow \infty} \frac{dx}{x^p}$ .
19. Абсолютная и условная сходимость интеграла.
20. ! Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственного интеграла.
21. ! Числовой ряд, его сумма, сходимость, остаток. Примеры.
22. Общие свойства числовых рядов.
23. ! Положительные ряды и их свойства. Признаки сравнения.
24. Признак Даламбера.
25. ! Признак Коши.
26. ! Интегральный признак сходимости ряда. Ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ .
27. ! Критерий Больцано – Коши. Абсолютная и условная сходимость.
28. Признак Лейбница.
29. ! Преобразование Абеля, признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.
30. Группировка слагаемых. Перестановки положительных рядов.
31. Перестановки абсолютно и условно сходящихся рядов.
32. Понятие о двойных и повторных рядах.
33. Произведение рядов. Пример (экспонента).

34. Асимптотика частичных сумм гармонического ряда. Постоянная Эйлера.
35. Формула Стирлинга (без вычисления константы).
36. Вычисление константы в формуле Стирлинга.
37. Основные структуры в  $\mathbb{R}^n$  (скалярное произведение, норма, метрика, топология). Покоординатный характер сходимости.
38. Открытые и замкнутые множества.
39. Компактные множества в  $\mathbb{R}^n$ , критерий компактности.
40. ! Понятие полного метрического пространства. Полнота  $\mathbb{R}^n$ .
41. Непрерывность отображения и его координатных функций. Соотношение между непрерывностью по каждому аргументу и непрерывностью по совокупности переменных.
42. Теоремы о непрерывных отображениях.
43. Линейное отображение и его норма. Свойства нормы.
44. Теорема об оценке нормы линейного отображения.
45. ! Дифференцируемость отображения и её связь с непрерывностью. Покоординатный характер дифференцируемости.
46. ! Дифференциал. Существование частных производных. Матрица Якоби. Единственность линейной части приращения.
47. Достаточное условие дифференцируемости.
48. Дифференцируемость суперпозиции. Правило цепочки.
49. Признак постоянства функции в области.
50. Производная по вектору, градиент, связь между ними.
51. Оценка приращения дифференцируемого отображения.
52. Теорема о касательных к кривым, лежащим на поверхности  $z = f(x, y)$ .
53. ! Производные высших порядков. Классы  $C^p$ . Равенство смешанных производных.
54. Обобщение биномиальных коэффициентов и формулы бинома.
55. Дифференциал  $p$ -го порядка. Различные формы его записи.
56. ! Многомерная формула Тейлора.
57. ! Понятие экстремума. Необходимое условие. Пример.
58. ! Теорема о достаточном условии наличия (отсутствия) экстремума.
59. Применение критерия Сильвестра для исследования второго дифференциала. Пример решения задачи на экстремум.
60. Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
61. Метод последовательных приближений Ньютона.
62. Формулировка теоремы об обратимости гладкого отображения (с мотивировкой ответа, подсказанной дифференциалом).
63. Доказательство теоремы об обратимости.

Знаком ! помечены наиболее важные вопросы. Знание относящихся к ним формулировок **необходимо** для получения положительной оценки.

Адрес этой программы в интернете:

<http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/astro/2023-2025/>