

**ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ**  
**(1-й семестр, 2023/24 г.)**

*А. А. Лодкин*

1. Инъективность, сюръективность, биективность отображения. Обратное отображение, суперпозиция отображений.
2. Аксиома полноты.  $\sup$  и  $\inf$ . Свойства.
3. Определение множества  $\mathbb{N}$ . Его неограниченность. Принцип Архимеда.
4. Теорема о вложенных отрезках.
5. Эквивалентные множества. Конечные, счётные и несчётные множества. Примеры.
6. Счётность  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  и  $\mathbb{Q}$ .
7. Несчётность множества  $\mathbb{R}$ .
8. Точки сгущения. Различные определения предела.
9. Свойства предела (единственность, предельный переход в неравенстве, ограниченность).
10. Свойства предела (стабилизация знака, принцип двух полицейских).
11. Бесконечно малые и их свойства. Арифметические операции над пределами.
12. Расширенная числовая прямая. Пределы в  $\mathbb{R}$ .
13. Предел последовательности.
14. Предел монотонной функции и последовательности.
15. Приближенное вычисление  $\sqrt{A}$ .
16. Число  $e$ .
17. Определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей).
18. Принцип выбора Больцано – Вейерштрасса.
19. Сходимость в себе, принцип сходимости Больцано – Коши.
20. Непрерывность функции, виды разрывов.
21. Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях. Примеры.
22. Разрывы монотонной функции.
23. Теоремы о монотонной функции на промежутке.
24. Определение и свойства функции «корень».
25. Показательная функция (экспонента).
26. Логарифмическая и степенная функции.
27. Символы  $O$ ,  $o$ ,  $\sim$ . Различные формы записи замечательных пределов.
28. Теорема Вейерштрасса.
29. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
30. Задачи, приводящие к понятию производной.
31. Дифференцируемость функции, связь с наличием производной и непрерывностью. Дифференциал. Примеры.
32. Дифференцируемость суммы, произведения, частного.

33. Дифференцируемость суперпозиции и обратной функции.
34. Таблица производных.
35. Теоремы Ферма́ и Ролля.
36. Теоремы Коши и Лагранжа.
37. Производные и монотонность.
38. Признак строгой монотонности.
39. Доказательство неравенств.
40. Правила Лопиталья (второе без доказательства).
41. Многочлен Тейлора. Формула Тейлора для многочлена.
42. Асимптотическая формула Тейлора.
43. Разложение по Тейлору элементарных функций.
44. Достаточные условия экстремума.
45. Теорема об остатке в форме Лагранжа.
46. Выпуклость функции (геометрическое определение, основное неравенство).
47. Лемма о трех хордах.
48. Неравенство Енсена.
49. Дифференциальные условия выпуклости.
50. Неравенство Гёльдера.
  
51. Первообразная и ее простейшие свойства. Неопределенный интеграл.
52. Замена переменной и интегрирование по частям.
53. Таблица неопределенных интегралов.
54. Интегралы от рациональных функций.
55. Алгоритмы вычисления первообразных: сведение к случаю рациональных функций.

**Примечание.** Кроме того, необходимо разбираться в следующих вопросах, не вошедших в билеты:

Кванторы, множества и операции над ними, образ и прообраз, суперпозиция отображений, понятие вещественного, натурального и рационального числа, индукция, неполнота  $\mathbb{Q}$ , представимость вещественных чисел бесконечными дробями по основанию  $p$ .

Адрес этой программы в интернете:

<http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/astro/2023-2025/>