НЕСТАНДАРТНАЯ АСИМПТОТИКА ИНТЕГРАЛА, СВЯЗАННОГО С КАНТОРОВОЙ ФУНКЦИЕЙ

Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов.

Мы хотим рассказать о любопытном явлении, связанном с функцией Кантора и методом Лапласа отыскания асимптотики при $x \to +\infty$ интегралов вида

$$\Phi(x) = \int_0^1 \varphi^x(t)\,dt.$$

Метод Лапласа известен около двух веков. Он возник при решении некоторых задач теории вероятностей. Вскоре выяснилось, что такие задачи часто возникают также в теории чисел, математической физике и др. В настоящее время он составляет важный раздел теории асимптотических методов. Функция Кантора несколько моложе — ей нет ещё и полутора веков. Она возникла как удивительный пример, на котором очень удобно иллюстрировать основные понятия теории меры, топологии и теории функций. Оба эти математические объекта оказались столь интересными, что они уже давно живут самостоятельной жизнью — область их применения расширяется, возникают обобщения и различные модификации. Однако до последнего времени их "жизненные пути" не пересекались. Наша заметка посвящена неожиданному эффекту, возникающему при их взаимодействии.

Конечно, большинство студентов мат-меха хотя бы понаслышке знакомо и с функцией Кантора, и с методом Лапласа. Тем не менее, стремясь сделать наше изложение более удобным, мы кратко сообщим сначала основные определения и результаты.

Метод Лапласа. Из графика функции φ^x при больших x видно, что основной вклад в $\Phi(x)$ даёт интеграл по сколь угодно малой окрестности тех точек, в которых функция φ достигает наибольшего значения. Поэтому решающую роль в асимптотике $\Phi(x)$ играет та скорость, с которой φ теряет максимальное значение при удалении от точки максимума.

Поясним это в частном случае, играющем существенную роль в дальнейшем. Будем считать, что неотрицательная функция φ убывает на $[0, 1]$.

Если $1-\varphi(t) \sim at^p$ при $t \to 0$ ($p>0$), то при любом $\varepsilon > 0$ на достаточно малом промежутке $[0,\delta]$ справедливы неравенства $e^{-(a+\varepsilon)t^p} \leqslant \varphi(t) \leqslant e^{-(a-\varepsilon)t^p}$. Эта двусторонняя оценка позволяет доказать, что

$$\int_0^1 \varphi^x(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^1 e^{-xat^p}\,dt.$$

Асимптотика последнего интеграла легко находится с помощью замены переменной $s = axt^p$, и таким образом мы приходим к асимптотической формуле Лапласа:

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{C_p}{(ax)^{\frac{1}{p}}}, \tag{1}$$

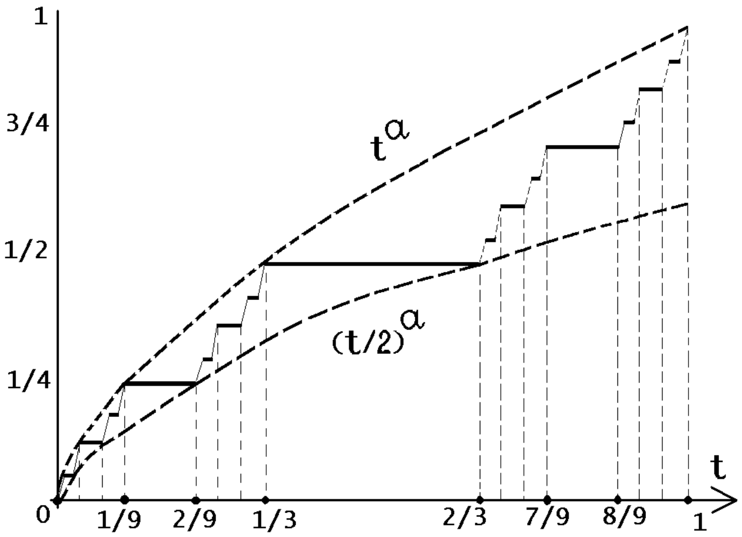
где C_p — константа, зависящая лишь от p (C_p нетрудно подсчитать, но её значение для дальнейшего не играет роли). Подробнее о методе Лапласа можно прочитать, например, в [1], гл. XIX, §2 или [3], гл. VI, §2.

Функция Кантора. Эта интересная функция строится так. Пусть $f(0)=0$ и $f(1)=1$, а на центральной трети интервала $(0,1)$, т.е. при $t\in[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$, значение f постоянно и равно полусумме значений f на его концах: $f(t) = \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) = \frac{1}{2}$. На каждом из оставшихся интервалов $(0,\frac{1}{3})$ и $(\frac{2}{3},1)$ эта процедура повторяется — на его центральной трети функция f постоянна и равна там полусумме значений на его концах (т.е. $f(t) = \frac{1}{4}$ на $[\frac{1}{9},\frac{2}{9}]$ и $f(t) = \frac{3}{4}$ на $[\frac{7}{9},\frac{8}{9}]$). Неограниченно повторяя это построение, мы определим f на плотном подмножестве промежутка $[0,1]$. Остаётся определить её на его дополнении (оно с точностью до троично рациональных чисел совпадает со знаменитым канторовым множеством). С сохранением непрерывности или монотонности на всём промежутке $[0,1]$ это можно сделать единственным образом. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что при нашем построении на каждом шаге получается функция, приращение которой на промежутке длиной $\frac{1}{3^n}$ не превосходит $\frac{1}{2^n}$. Отсюда следует, в частности, что функция Кантора удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha = \log_3 2$. Нетрудно проверить, что

$$(t/2)^\alpha \leqslant f(t) \leqslant t^\alpha \quad \text{при} \quad t\in[0,1]. \tag{2}$$

Для дальнейшего нам потребуются ещё два простых свойства канторовой функции (мы советуем читателю доказать их, как и оценку (2), самостоятельно):

I. $f\left(\frac{t}{3}\right) = \frac{1}{2}f(t)$ при всех t из $[0,1]$; II. $f\left(\frac{2}{3}+t\right) = \frac{1}{2}+f(t)$ при $0\leqslant t\leqslant \frac{1}{3}$.



Таким образом, весь график f получается растяжением (в 3 раза по горизонтали и в 2 — по вертикали) его части, лежащей над $[0, \frac{1}{3}]$, а сдвинув её, можно получить часть графика, лежащую над $[\frac{2}{3}, 1]$. Эскиз графика канторовой функции изображен на рисунке слева. Из-за многочисленных горизонтальных участков его называют канторовой лестницей.

Вопрос, который мы рассмотрим, поставил Е.А.Горин [2] (см. также [3], гл. VI, задача 2.22): что можно сказать об асимптотике интеграла $\Phi(x)$, если $\varphi(t) = 1 - f(t)$, где f — канторова функция? Двусторонняя оценка (2) определяет (см. (1)) порядок убывания интеграла:

$$\Phi(x) = \int_0^1 (1 - f(t))^x dt \underset{x\to+\infty}{\asymp} x^{-\sigma}, \quad \text{где } \sigma = \frac{1}{\alpha} = \log_2 3.$$

Теперь, после того как поведение $\Phi(x)$ при $x \to +\infty$ вчерне установлено, возникает более тонкий вопрос: будет ли интеграл $\Phi(x)$ эквивалентен $Cx^{-\sigma}$ при некотором C? Внимательное исследование этой задачи показывает, что ответ на него отрицателен и что для описания поведения $\Phi(x)$ при больших x следует вместо константы C привлечь некоторую 1-периодическую функцию, которая, как мы покажем, окажется почти постоянной (с точностью до 0.02%).

Вместо интеграла $\Phi(x)$ удобнее рассматривать родственный интеграл

$$\Psi(x) = \int_0^1 e^{-xf(t)}\, dt.$$

Проверим сначала, что разность $\Psi(x) - \Phi(x)$ достаточно мала. Так как при $0 \leqslant s \leqslant 1$ справедливо неравенство $0 \leqslant e^{-sx} - (1-s)^x \leqslant 2xs^2e^{-sx}$, то

$$0 \leqslant \Psi(x) - \Phi(x) \leqslant 2x \int_0^1 f^2(t)e^{-xf(t)}\, dt \qquad (x > 1).$$

Оценка (2) даёт нам

$$\int_0^1 f^2(t)e^{-xf(t)}\, dt \leqslant \int_0^1 t^{2\alpha}e^{-x(\frac{t}{2})^\alpha}\, dt < \frac{2^{1+2\alpha}}{x^{2+\frac{1}{\alpha}}} \int_0^{+\infty} s^{2\alpha}e^{-s^\alpha}\, ds = \frac{const}{x^{2+\sigma}}.$$

Следовательно, $\Phi(x) = \Psi(x)\big(1 + O(1/x)\big)$ при $x \to +\infty$. Это позволяет при вычислении асимптотики заменить интеграл $\Phi(x)$ интегралом $\Psi(x)$.

Из равенства II вытекает, что

$$\Psi(x) = \int_0^{\frac{1}{3}} \ldots + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \ldots + \int_{\frac{2}{3}}^{1} \ldots = \int_0^{\frac{1}{3}} e^{-xf(t)}\,dt + \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}} + \int_0^{\frac{1}{3}} e^{-x(\frac{1}{2}+f(t))}\,dt =$$
$$= \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{2}} + \big(1 + e^{-\frac{x}{2}}\big) \int_0^{\frac{1}{3}} e^{-xf(t)}\,dt.$$

Преобразуем последний интеграл с помощью замены $s = 3t$ и равенства I:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-xf(t)}\,dt = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-xf(\frac{s}{3})}\,ds = \frac{1}{3}\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}f(s)}\,ds = \frac{1}{3}\Psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Подставив это значение интеграла $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{-xf(t)}\,dt$ в предыдущее равенство и разделив на $\frac{1-e^{-x}}{2}$, мы установим связь между $\Psi(x)$ и $\Psi\big(\frac{x}{2}\big)$:

$$\frac{2}{1-e^{-x}}\Psi(x) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{\mathrm{sh}\frac{x}{2}} + \frac{1}{3}\,\frac{2}{1-e^{-x/2}}\,\Psi\left(\frac{x}{2}\right).$$

Применив это тождество k раз, получим

$$\frac{2\Psi(x)}{1-e^{-x}} = \frac{1}{3\mathrm{sh}\frac{x}{2}} + \frac{1}{3^2\mathrm{sh}\frac{x}{4}} + \ldots + \frac{1}{3^k\mathrm{sh}\frac{x}{2^k}} + \frac{1}{3^k}\frac{2\Psi\left(\frac{x}{2^k}\right)}{1-e^{-x/2^k}}.$$

Так как $0 < \Psi < 1$, то в возникшей сумме последнее слагаемое есть $O\Big(\big(\frac{2}{3}\big)^k\Big)$. Следовательно,

$$\frac{2\Psi(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{3^k\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^k}}, \qquad \text{и поэтому} \qquad 2\Psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{3^k\mathrm{sh}\,\frac{x}{2^k}}.$$

Представим x в виде $x = 2^{m+u}$, $m \in \mathbb{N}$, $u \in [0,1)$. Тогда $x^\sigma = 3^{m+u}$ и

$$2\Psi(x) \sim \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{3^k\mathrm{sh}\big(2^{m-k+u}\big)} = \frac{1}{3^{m+u}}\sum_{j>-m}\frac{1}{3^{j-u}\mathrm{sh}2^{u-j}} =$$
$$= \frac{1}{x^\sigma}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{1}{3^{j-u}\mathrm{sh}2^{u-j}} + O\Big(\frac{x^\sigma}{\mathrm{sh}\,x}\Big)\right).$$

Таким образом, $\Phi(x) \sim \Psi(x) \sim x^{-\sigma}\theta(u)$, где

$$\theta(u) = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{3^{j-u}\mathrm{sh}2^{u-j}} = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{3^{u+j}}{\mathrm{sh}2^{u+j}} \tag{3}$$

— положительная 1-периодическая функция. Так как $\theta(u) = \theta(\log_2 x)$, то

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{-\sigma}\theta(\log_2 x)\,.$$

В частности, при $x = 2^n$ имеем

$$\int_0^1 (1-f(t))^{2^n}\,dt = \Phi(2^n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{C}{3^n},\ \text{где } C = \theta(0) = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{3^j}{\mathrm{sh}2^j} = 1.9967481...$$

Обсудим теперь подробнее свойства функции θ. Как легко проверить, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Интересно выяснить, сколь сильно она может меняться (априори не ясно, не будет ли θ константой). Не располагая сначала ничем, кроме равенства (3), мы попытались делать численные эксперименты и просто табулировать θ на отрезке $[0,1]$. Наши попытки приводили, однако, к несколько странным результатам, которые казались нам мало правдоподобными. Мы признательны нашим коллегам К.П.Кохасю, А.В.Потепуну и В.М.Рябову, которые с энтузиазмом помогали нам. Табулирование θ показало, что колебание этой функции чрезвычайно мало (это отмечено также в [2]).

Нам представляется удивительным, что "почти постоянство" функции θ, возникающей достаточно нестандартным образом, оказалось возможным установить чисто аналитическими методами. Как выяснилось, для прояснения ситуации следует использовать ряды Фурье.

Читателям, которые ещё не успели познакомиться с этим важнейшим понятием, сообщим, что рядом Фурье суммируемой на $[0,1]$ функции θ называется ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\theta}(k)e^{2\pi ikt}$, коэффициенты которого вычисляются по формулам $\widehat{\theta}(k) = \int_0^1 \theta(u)e^{-2\pi iku}\,du$ и называются коэффициентами Фурье. Для гладкой 1-периодической функции θ ряд Фурье всюду сходится и его сумма совпадает с θ.

Неожиданным (на наш взгляд) образом оказывается, что коэффициенты Фурье функции θ тесно связаны с классическим функциями анализа — Γ (гамма) и ζ (дзета):

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \quad \text{при} \quad \mathcal{R}e(z) > 0 \quad \text{и} \quad \zeta(z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z} \quad \text{при} \quad \mathcal{R}e(z) > 1.$$

Исходя из определения коэффициентов Фурье, мы получаем:

$$\widehat{\theta}(k) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{3^{j+u}}{\operatorname{sh} 2^{j+u}}\right) e^{-2\pi iku}\, du = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3^u}{\operatorname{sh} 2^u} e^{-2\pi iku}\, du =$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\int_0^{\infty} t^{\sigma - \frac{2\pi k}{\ln 2} i - 1} \frac{e^{-t}\, dt}{1 - e^{-2t}}$$

(последнее равенство получено с помощью замены переменной $t = 2^u$). Представив дробь $\frac{e^{-t}}{1-e^{-2t}}$ в виде суммы геометрической прогрессии, мы видим после почленного интегрирования (его законность следует из теоремы Лебега), что

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} \frac{e^{-t}\, dt}{1 - e^{-2t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-(2n+1)t}\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^z} \int_0^{\infty} s^{z-1} e^{-s}\, ds =$$
$$= \Gamma(z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^z} = \Gamma(z)\, S(z).$$

Сумма S легко выражается через ζ, так как

$$\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^z} = S(z) + \frac{1}{2^z}\zeta(z).$$

Положим для краткости $\tau = \frac{2\pi}{\ln 2}$ и $z_k = \sigma - ik\tau$ ($\sigma = \log_2 3 \approx 1,58496...$, $\tau = \frac{2\pi}{\ln 2} \approx 9,06472...$). Тогда $S(z_k) = \left(1 - 2^{-z_k}\right)\zeta(z_k) = \left(1 - 2^{-\sigma}\right)\zeta(z_k) = \frac{2}{3}\,\zeta(z_k)$ и, следовательно,

$$\widehat{\theta}(k) = \frac{2}{3\ln 2}\,\Gamma(z_k)\zeta(z_k) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Так как $\Gamma(z)$ и $\zeta(z)$ не обращаются в нуль при $\mathcal{R}e(z) > 1$, то $\widehat{\theta}(k) \neq 0$, из чего вытекает, что $\theta \not\equiv const$. Как показывают вычисления,

$$\Gamma(\sigma)\cdot\zeta(\sigma) \approx 2,0760156..., \quad \text{то есть} \quad \int_0^1 \theta(u)\, du = \widehat{\theta}(0) \approx 1,9967049...$$

Покажем, что функция θ "почти константа" — она очень мало отклоняется от своего среднего значения $\widehat{\theta}(0)$. Причина этого коренится в том, что все её остальные коэффициенты Фурье очень малы — они мажорируются значениями Γ на вертикальной прямой $\sigma + iy$, вдоль которой Γ экспоненциально убывает с ростом $|y|$.

Оценим сверху $|\widehat{\theta}(k)|$ с $|k| \geqslant 1$. Так как $3\ln 2 > 2$, то $|\widehat{\theta}(k)| \leqslant |\Gamma(z_k)|\,|\zeta(z_k)|$. Кроме того,

$$|\zeta(\sigma+iy)| \leqslant \zeta(\sigma) \leqslant 1 + \frac{1}{2^\sigma} + \int_2^{+\infty} \frac{du}{u^\sigma} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{\sigma-1}\,\frac{2}{3} < 2,5.$$

Следовательно,

$$|\widehat{\theta}(k)| < 2,5\,|\Gamma(z_k)|.$$

Для оценки значений функции гамма в комплексных точках нам придётся воспользоваться двумя важными формулами, связанными с бесконечным произведением:

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \qquad \frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

(здесь γ — постоянная Эйлера). Первая формула получена ещё Эйлером, вторая принадлежит Вейерштрассу (см. [1]). При $z = iy$ из формулы Эйлера мы получаем представление $\operatorname{sh} \pi y$ в виде бесконечного произведения:

$$\operatorname{sh} \pi y = \pi y \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{n^2}\right).$$

При $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$ из формулы Вейерштрасса вытекает тождество

$$\frac{|\Gamma(x+iy)|^2}{\Gamma^2(x)} = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{y^2}{(x+n)^2}\right)^{-1}.$$

Вместе с предыдущим равенством оно показывает, что для $x = \sigma \in (1, 2)$

$$|\Gamma(\sigma+iy)|^2 < \Gamma^2(\sigma) \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(2+n)^2}} < \prod_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{n^2}} = \frac{\pi y (1+y^2)}{\operatorname{sh}(\pi y)} =$$
$$= \frac{2\pi y^3}{e^{\pi y}}\,\frac{1 + y^{-2}}{1 - e^{-2\pi y}}.$$

Так как $y = k\tau > 9$ при $k \geqslant 1$, то $|\Gamma(\sigma \pm iy)|^2 < 7y^3\, e^{-\pi y}$. Следовательно,

$$|\Gamma(\sigma \pm ik\tau)| < t_k = \sqrt{7\tau^3 n^3\, e^{-\pi\tau k}} \quad \text{при } k \geqslant 1.$$

Числа t_k быстро убывают к нулю, поскольку

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)^3 e^{-\pi\tau}} \leqslant \sqrt{8\,e^{-\pi\tau}} < 2\cdot 10^{-6}.$$

Поэтому

$$\sum_{|k|\geqslant 1} |\Gamma(z_k)| = \sum_{|k|\geqslant 1} |\Gamma(\sigma - ik\tau)| \leqslant 2\sum_{k\geqslant 1} t_k < \frac{2\,t_1}{0,999998}.$$

Учитывая, что $t_1 < 4,8\cdot 10^{-5}$ окончательно получаем

$$|\theta(u) - \widehat{\theta}(0)| < \sum_{|k|\geqslant 1} |\widehat{\theta}(k)| < 2,5\sum_{|k|\geqslant 1} |\Gamma(z_k)| < \frac{5\,t_1}{0,999998} < 2,5\cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, функция θ отклоняется от своего среднего значения меньше чем на 0,013%! В частности, $\theta(u) < 2$ при любом u.

Изменение θ определяется в основном слагаемыми её ряда Фурье с номерами ± 1. Так как $\theta(u) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\theta}(k) e^{2\pi iku}$, то, очевидно, погрешность приближённого равенства

$$\theta(u) \approx \widehat{\theta}(0) + \widehat{\theta}(1)e^{2\pi iu} + \widehat{\theta}(-1)e^{-2\pi iu}$$

не превосходит $\sum_{|k|\geqslant 2} |\widehat{\theta}(k)|$. Повторяя уже проведённые рассуждения, легко убедиться, что

$$\sum_{|k|\geqslant 2} |\widehat{\theta}(k)| \leqslant \frac{5\,t_2}{0,999998} < 0,5\cdot 10^{-9}.$$

Подсчёт $\widehat{\theta}(1)$ показывает, что $\widehat{\theta}(1) = 2,1564256658\cdot 10^{-5} - i\,9,767083564\cdot 10^{-7}$. Таким образом,

$$\theta(u) = 1,9967049717 + 2(2,15642\,\cos 2\pi u + 0,09767\,\sin 2\pi u)\,10^{-5}$$

с точностью до $0,5\cdot 10^{-9}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.А. Зорич. *Математический анализ*, ч. II. МЦНМО. Москва. 1998.

2. Е.А. Горин, Б.Н. Кукушкин. *Интегралы, связанные с канторовой лестницей.* Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, вып. 3.

3. Б.М. Макаров, М.Г. Голузина, А.А. Лодкин, А.Н. Подкорытов. *Избранные задачи по вещественному анализу.* Невский диалект. С.-Петербург. 2004.