ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ ПО БАЗЕ ФИЛЬТРА, ЧАСТЬ I

ПОТЕПУН А.В.

Это курс лекций, который я читал на 1 курсе. Теория пределов излагается на основе предела по базе ("базис фильтра" Бурбаки). Практически это то же самое, как излагать пределы на языке окрестностей, но введение с самого начала общего определения позволяет в дальнейшем излагать, например, интеграл Римана, суммируемые семейства на основе этого определения. Как это было сделано — изложено после главы о пределах. Существенно новое: определение функции, возрастающей или убывающей по базе. Например, функция, убывающая в обычном смысле справа от точки a, оказывается возрастающей по базе промежутков вида $(a, a+\delta)$. На этой основе также определяется длина пути как предел возрастающей обобщённой последовательности длин ломаных. Ещё: определяется верхний и нижний пределы функции по базе, сходимость в себе и общий принцип сходимости Больцано-Коши.

После главы о пределах изложены отдельные куски курса — применение вышеизложенного.

Предполагается, что во вводной главе получены следующие результаты (используются при изложении теории пределов):

1) Множества и операции над ними, в том числе объединения и пересечения семейств.

2) Отображения: инъективные, сюръективные, биективные, композиция отображений, обратное отображение, сужение и продолжение отображений. Обозначения: $\operatorname{dom} f$ (область определения отображения f), $\operatorname{im} f$ (множество значений, принимаемых отображением f). Образ множества: $f(A) = \{y \mid \exists x \in A\colon y = f(x)\}$ (технически удобно считать, что *не обязательно* $A \subset X = \operatorname{dom} f$). Композиция определяется так: если $f\colon X \to Y$, $g\colon Z \to T$, то $\operatorname{dom} g \circ f = \{x \in X\colon f(x) \in Z\}$. Таким образом, композиция определена всегда, но бывает пустым отображением. Например, функция $\ln\sin$ — это композиция $\sin$ и $\ln$ (а не сужения $\sin$).

3) Вещественные числа: аксиома Архимеда, существование квадратного корня, неравенство Коши, $\sup$, $\inf$, расширенная прямая.

4) Пространства $\mathbb{R}^n$, операции в них, скалярное произведение и его свойства. Длина вектора: $|x| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$, следующие свойства длины:

$$|x| \geqslant 0;\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = \mathbb{O} \quad \big||x|-|y|\big| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x|+|y|, \quad \max_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i| \leqslant |x| \leqslant |x_1|+\ldots+|x_n|$$

1. **Метрические пространства.**

Определение 1.1 (Метрическое пространство)**.** *Пусть X — непустое множество. Функция $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой на X, если:*

1) $\forall x, y \in X$ $\rho(x,y) \geq 0$; $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2) $\forall x, y \in X$ $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметрия).

3) $\forall x, y, z \in X$ $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

Множество X с заданной на нём метрикой называется метрическим пространством (обозначение: (X,ρ)).

Примеры.

1) $X = \mathbb{R}^n$ (в частности, $X = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), $\rho(x,y) = |x-y|$. По свойствам длины вектора:

$$\rho(x,y) = |x-y| \geqslant 0; \quad |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = \mathbf{0} \Leftrightarrow x = y.$$

$$\rho(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = |-1| \cdot |y-x| = |y-x| = \rho(y,x).$$

$$\rho(x,z) = |x-z| = |x-y+y-z| \leqslant |x-y| + |y-z| = \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

2) $X = \overline{\mathbb{R}}$. Докажем, что функция $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ осуществляет биективное отображение $\mathbb{R}$ на промежуток $(-1;1)$. Очевидно, $|x| < \sqrt{1+x^2}$, поэтому $|\varphi(x)| < 1$, т.е. $\varphi(x) \in (-1;1)$.

Проверим, что для любого $y \in (-1;1)$ существует единственный $x \in \mathbb{R}$, такой, что $y = \varphi(x)$. Для этого решим уравнение:

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = y \Leftrightarrow x = y\sqrt{1+x^2} \Rightarrow x^2 = y^2 + y^2x^2 \Leftrightarrow x^2(1-y^2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}.$$

Поскольку $\sqrt{1+x^2} > 0$, в уравнении $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = y$ числа x и y — одного знака. Поэтому

$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \Rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Итак, для любого $y \in (-1;1)$ существует единственный корень уравнения $\varphi(x) = y$, т.е. φ — биективно и $\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$.

Продолжим φ на $\overline{\mathbb{R}}$: положим $\varphi(-\infty) = -1$, $\quad \varphi(+\infty) = 1$. Получили биекцию $X = \overline{\mathbb{R}}$ на $[-1;1]$. Метрику на $\overline{\mathbb{R}}$ определяем так: для $\forall x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ $\rho(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$. Проверяем свойства:

$$\rho(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)| \geqslant 0; \ |\varphi(x) - \varphi(y)| = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(y) \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(y)) = y.$$

Остальные свойства — аналогично случаю $\mathbb{R}^n$ (вместо x, y, z — $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $\varphi(z)$).

3) X — произвольное непустое множество,

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x \neq y. \end{cases} \quad \text{(дискретная метрика).}$$

Проверить свойства метрики в качестве упражнения.

(Комментарий для лектора: в одном из дополнений к главе о пределах определяется метрика в $\overline{\mathbb{C}}$ и доказывается, что шар с центром в ∞ имеет вид $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > p\} \cup \{\infty\}$).

Определение 1.2 (Шары и окрестности точки в метрическом пространстве)**.** *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $a \in X$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.*

Множество $B(a,r) = \{x \in X \colon \rho(x,a) < r\}$ называется открытым шаром с центром в точке a и радиусом r.

Множество $\overline{B}(a,r) = \{x \in X \colon \rho(x,a) \leqslant r\}$ называется замкнутым шаром с центром в точке a и радиусом r.

Множество $V \subset X$ называется окрестностью точки a, если $\exists r > 0 \colon B(a,r) \subset V$ (обозначение: $V(a)$).

Замечания. 1) $\rho(a,a) = 0 < r \Rightarrow a \in B(a,r) \subset V(a)$ (т.е. точка a принадлежит любой своей окрестности).

2) Поскольку $B(a,r) \subset \overline{B}(a,r)$, открытые и замкнутые шары являются окрестностями своего центра.

3) Если $0 < r_1 \leqslant r_2$, то $\rho(x,a) < r_1 \Rightarrow \rho(x,a) < r_2$, т.е. $B(a,r_1) \subset B(a,r_2)$ (аналогично $\overline{B}(a,r_1) \subset \overline{B}(a,r_2)$).

Примеры. 1) Шар в $\mathbb{R}^2$ — это круг с центром в a (открытый — не содержащий окружности, замкнутый — содержащий окружность).

2) Шар в $\mathbb{R}^3$ — это то, что в геометрии называется шаром (открытый — не содержащий граничной сферы, замкнутый — содержащий сферу).

Упражнение: описать строение шаров в дискретной метрике.

Теорема 1.1 (Строение шаров в $\mathbb{R}$ и некоторых шаров в $\overline{\mathbb{R}}$).

1) В пространстве $\mathbb{R}$ $\quad B(a,r) = (a-r;a+r)$, $\overline{B}(a,r) = [a-r;a+r]$.

2) Если $0 < r < 2$, *то существует* $p \in \mathbb{R}$, *такое, что в пространстве* $\overline{\mathbb{R}}$

$$B(+\infty,r) = (p;+\infty], \quad \overline{B}(+\infty,r) = [p;+\infty]$$

и любой промежуток вида $(p;+\infty]$ *или* $[p;+\infty]$ *является некоторым шаром с центром в* $+\infty$.

3) Если $0 < r < 2$, *то существует* $q \in \mathbb{R}$, *такое, что в пространстве* $\overline{\mathbb{R}}$

$$B(-\infty,r) = [-\infty;q) \ \overline{B}(-\infty,r) = [-\infty;q]$$

и любой промежуток вида $[-\infty;q)$ *или* $[-\infty;q]$ *является некоторым шаром с центром в* $-\infty$.

Доказательство. 1) В пространстве $\mathbb{R}$ $\quad x \in B(a,r) \Leftrightarrow |x-a| < r$ (абсолютная величина). Если $x - a \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant a$, то $x - a < r \Leftrightarrow x < a + r$, т. е. $a \leqslant x < a + r$. Если $x - a < 0 \Leftrightarrow x < a$, то $-(x-a) < r \Leftrightarrow x - a > -r \Leftrightarrow x > a - r$, т. е. $a - r < x < a$. Объединяя оба случая, получаем $|x-a| < r \Leftrightarrow a - r < x < a + r$.

Докажем, что функции φ^{-1} и φ строго возрастают. При $y \in (-1;1)$ $\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$; если $y \in [0;1)$, то числитель дроби строго возрастает, y^2 строго возрастает, $1-y^2$ и $\sqrt{1-y^2}$ строго убывают, поэтому φ^{-1} строго возрастает на $[0;1)$. Поэтому если $0 \leqslant y_1 < y_2 < 1$, то $\varphi^{-1}(y_1) < \varphi^{-1}(y_2)$. Если $-1 < y_1 < 0 \leqslant y_2$, то $\varphi^{-1}(y_1) < 0 \leqslant \varphi^{-1}(y_2)$. Если $-1 < y_1 < y_2 < 0$, то

$$1 > -y_1 > -y_2 > 0 \Rightarrow \varphi^{-1}(-y_1) > \varphi^{-1}(-y_2) \Rightarrow \\ \varphi^{-1}(y_1) = -\varphi^{-1}(-y_1) < -\varphi^{-1}(-y_2) = \varphi^{-1}(y_2).$$

Получаем в итоге для любых $y_1, y_2 \in [-1;1]$, таких, что $y_1 < y_2$:

$$-\infty = \varphi^{-1}(-1) \leqslant \varphi^{-1}(y_1) < \varphi^{-1}(y_2) \leqslant \varphi^{-1}(1) = +\infty.$$

т. е. φ^{-1} строго возрастает на $[-1;1]$.

Докажем строгое возрастание φ от противного. Пусть $-\infty \leqslant x_1 < x_2 \leqslant= \infty$, но $\varphi(x_1) \geqslant \varphi(x_2)$. Тогда в силу возрастания φ^{-1}

$$x_1 = \varphi^{-1}\big(\varphi(x_1)\big) \geqslant \varphi^{-1}\big(\varphi(x_2)\big) = x_2 \text{ — противоречие.}$$

2) Поскольку $0 < r < 2$, то $-1 < 1 - r < 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(1-r) \in \mathbb{R}$.

$$x \in B(+\infty, r) \Leftrightarrow \rho(x, +\infty) = |\varphi(x) - \varphi(+\infty)| = |\varphi(x) - 1| = 1 - \varphi(x) < r,$$
$$\text{поскольку } \varphi(x) \leqslant 1. \text{ Поэтому } x \in B(+\infty, r) \Leftrightarrow 1 - \varphi(x) < r \Leftrightarrow \varphi(x) > 1 - r.$$

Поскольку φ^{-1} и φ строго возрастают,

$$\varphi(x) > 1 - r \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) > \varphi^{-1}(1-r) \Leftrightarrow x \in (p; +\infty], \text{ где } p = \varphi^{-1}(1-r) \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим произвольное $p \in \mathbb{R}$, тогда $-1 < \varphi(p) < 1$. Обозначим $r = 1 - \varphi(p) \Rightarrow 0 < r < 2$ и $p = \varphi^{-1}(1-r)$. Выше уже доказано, что $x \in (p; +\infty] \Leftrightarrow x \in B(+\infty, r)$, т. е. $(p; +\infty] = B(+\infty, r)$.

Для замкнутого шара неравенство $1 - \varphi(x) < r$ заменяем на $1 - \varphi(x) \leqslant r$ и в дальнейшем получаем $x \geqslant \varphi^{-1}(1-r) \Leftrightarrow x \in [p; +\infty]$.

3) Поскольку $0 < r < 2$, то $-1 < r - 1 < 1 \Rightarrow \varphi^{-1}(r-1) \in \mathbb{R}$.

$$x \in B(-\infty, r) \Leftrightarrow \rho(x, -\infty) = |\varphi(x) - \varphi(-\infty)| = |\varphi(x) - (-1)| = \varphi(x) + 1 < r,$$
$$\text{поскольку } \varphi(x) \geqslant -1. \text{ Поэтому } x \in B(-\infty, r) \Leftrightarrow \varphi(x) + 1 < r \Leftrightarrow \varphi(x) < r - 1.$$

Поскольку φ^{-1} и φ строго возрастают,

$$\varphi(x) < r - 1 \Leftrightarrow x = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) < \varphi^{-1}(r-1) \Leftrightarrow x \in [-\infty; q), \text{ где } q = \varphi^{-1}(r-1) \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим произвольное $q \in \mathbb{R}$, тогда $-1 < \varphi(q) < 1$. Обозначим $r = \varphi(q) + 1 \Rightarrow 0 < r < 2$ и $q = \varphi^{-1}(r-1)$. Выше уже доказано, что $x \in [-\infty; q) \Leftrightarrow x \in B(-\infty, r)$, т. е. $[-\infty; q) = B(-\infty, r)$.

Для замкнутого шара неравенство $\varphi(x) + 1 < r$ заменяем на $\varphi(x) + 1 \leqslant r$ и в дальнейшем получаем $x \leqslant \varphi^{-1}(r-1) \Leftrightarrow x \in [-\infty; q]$.

Следствие. *Если $p < a < q$, то промежуток $\langle p; q\rangle \subset \mathbb{R}$ является окрестностью точки a (в $\mathbb{R}$).*

Доказательство. Пусть $r = \min\{a - p, q - a\}$, тогда $r > 0$.

$$\left\{\begin{array}{l} r \leqslant a - p \\ r \leqslant q - a \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p \leqslant a - r \\ a + r \leqslant q \end{array}\right..$$

Тогда $x \in B(a, r) \Rightarrow p \leqslant a - r < x < a + r \leqslant q \Rightarrow x \in \langle p; q\rangle$ т. е. $B(a, r) \subset \langle p; q\rangle$.

Замечание. Промежуток $[p; q] \subset \mathbb{R}$ *не является окрестностью* своих концов (точек p и q).

2. Определения и общие свойства предела.

Определение 2.1 (Базы множеств). *Непустая система множеств $\mathfrak{A}$ называется базой множеств, если: 1) $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A \neq \varnothing$;*
2) $\forall A, B \in \mathfrak{A} \quad \exists C \in \mathfrak{A}\colon C \subset A \cap B$.

Замечания. 1) Пусть $\mathfrak{A}$ — база множеств, X — некоторое фиксированное множество. Если для $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A \cap X \neq \varnothing$, то $\{A \cap X : A \in \mathfrak{A}\}$ — тоже база.

Доказательство.

$$\text{Для } \forall A \cap X, B \cap X \quad \exists C \subset A \cap B \Rightarrow C \cap X \subset (A \cap B) \cap X = (A \cap X) \cap (B \cap X).$$

2) Если $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$, то $\exists C \in \mathfrak{A}\colon C \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Доказательство — индукцией по n. $n = 1$: $C = A_1 \subset A_1$. Предположим, что утверждение верно для n, докажем для $n+1$.

Пусть $A_1, \dots A_n, A_{n+1} \in \mathfrak{A}$. Тогда по предположению индукции $\exists B \in \mathfrak{A}\colon B \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \Rightarrow$

$$\text{(по условию 2 из опрелеления) } \exists C \in \mathfrak{A}\colon C \subset B \cap A_{n+1} \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k \cap A_{n+1} = \bigcap_{k=1}^{n+1} A_k.$$

Пример 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X$. Тогда $\{B(a, r)\}$ (множество всех шаров с центром в фиксированной точке a) является базой.

Доказательство. По замечанию 1 к определению шаров, для $\forall r > 0 \quad a \in B(a, r) \Rightarrow B(a, r) \neq \varnothing$.

Для любых $B(a, r_1),\ B(a, r_2)$ положим $r = \min\{r_1, r_2\} > 0$.

$$r \leqslant r_1, r_2 \Rightarrow B(a, r) \subset B(a, r_1) \text{ и } B(a, r_2) \text{ (по замечанию 3 к определению шаров),}$$

т. е. $B(a, r) \subset B(a, r_1) \cap B(a, r_2)$.

Пример 2. $\{\overline{B}(a, r)\colon a \text{ — фиксирована}\}$ — база (доказательство аналогично).

Пример 3. Пусть $X = \mathbb{R}^n,\ a = (a_1, \dots, a_n),\ r > 0,\ P(a, r) = \prod\limits_{k=1}^{n} (a_k - r; a_k + r)$.

$$P(a, r) \text{ — открытый } n\text{-мерный куб с центром в } a. \quad x \in P(a, r) \Leftrightarrow$$
$$\forall k = 1, \dots, n \quad a - r_k < x_k < a + r_k \Leftrightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad |x_k - a_k| < r \Leftrightarrow \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \{|x_k - a_k|\} < r.$$

Тогда $\{P(a, r)\colon r > 0,\ a \text{ — фиксировано}\}$ — база.

Доказательство. Если $r_1, r_2 > 0,\ r = \min\{r_1, r_2\}$, то

$$(a_k - r; a_k + r) \subset (a_k - r_1; a_k + r_1) \cap (a_k - r_2; a_k + r_2) \text{ (пример 1 — база одномерных шаров).}$$

По определению декартова произведения множеств, отсюда следует, что $P(a, r) \subset P(a, r_1) \cap P(a, r_2)$ и, кроме того, $a \in P(a, r), \Rightarrow P(a, r) \neq \varnothing$.

Пример 4. $\mathfrak{A} = \{V(a)\}$ — множество всех окрестностей точки a в метрическом пространстве.

1. По определению 1.2 (шары и окрестности) и замечанию к нему,

$$\exists B(a, r)\colon a \in B(a, r) \subset V(a) \Rightarrow V(a) \neq \varnothing.$$

$$2.\ \begin{cases} V_1(a) \supset & B(a, r_1) \\ V_2(a) \supset & B(a, r_2) \end{cases} \Rightarrow V_1(a) \cap V_2(a) \supset B(a, r_1) \cap B(a, r_2) \supset B(a, r),$$

т. е. $V_1(a) \cap V_2(a)$ — тоже окрестность.

Пример 5. $\mathfrak{A} = \{A_N : N \in \mathbb{R}\}$, где $A_N = \{n \in \mathbb{N}\colon n > N,\ N \in \mathbb{R}, N \text{ — фиксировано}\}$.

1. По аксиоме Архимеда, для $\forall N \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}\colon n > N \Rightarrow A_N \neq \varnothing$. При $N < 1$ все $n \in \mathbb{N}$ входят в A_N, т. е. $A_N = \{1, 2, \dots\}$, при $N \geqslant 1$ обозначим $n_0 = [N + 1]$ (целая часть числа $N + 1$). Тогда $n_0 \leqslant N + 1 < n_0 + 1 \Rightarrow n_0 > N,\ n_0 - 1 \leqslant N$, т. е. n_0 — наименьший элемент множества $A_N \Rightarrow A_N = \{n_0, n_0 + 1, \dots\}$. Таким образом, множества A_N представляют собой "хвосты" натурального ряда.

$$2.\ \text{Если } N=\max\{N_1,N_2\},\ \text{то } n>N \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} n>N_1 \\ n>N_2 \end{array}\right. \Rightarrow n\in A_{N_1}\cap A_{N_2},$$

т. е. $A_N\subset A_{N_1}\cap A_{N_2}$.

Определение 2.2 (Предел отображения со значениями в метрическом пространстве)**.** *Пусть (Y,ρ) — метрическое пространство, $f\colon X\to Y$ — отображение, $\mathfrak{A}$ — база множеств. Точка $l\in Y$ называется пределом отображения f по базе $\mathfrak{A}$, если:*

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A\quad \rho\bigl(f(x),l\bigr)<\varepsilon.$$

Комментарий для лектора: для любого $x\in A$ $\ f(x)$ определено, поэтому по умолчанию предполагается, что $A\subset X=\operatorname{dom} f$, но *не предполагается*, что *все* $A\in\mathfrak{A}$ — это подмножества множества X. Это даёт в дальнейшем некоторые технические преимущества в изложении. Например, в теоремах о пределе суммы, произведения и частного можно не предполагать, что функции имеют общую область определения.

Обозначения: $l=\lim_{\mathfrak{A}} f,\quad l=\lim_{\mathfrak{A}} f(x),\quad f(x)\underset{\mathfrak{A}}{\longrightarrow} l.$

Пример 1. Предел постоянного отображения.
Пусть $f\colon X\to Y$ такое, что для $\forall x\in X\quad f(x)=l$ (const.), $\mathfrak{A}$ — база множеств, такая, что $\exists A\in\mathfrak{A}\colon A\subset X$. Тогда $\forall\varepsilon>0\quad\exists A\in\mathfrak{A}\colon\forall x\in A\quad \rho\bigl(f(x),l\bigr)=\rho(l,l)=0<\varepsilon$, т. е. $l=\lim_{\mathfrak{A}} f$ по любой такой базе.

Пример 2. Предел последовательности в метрическом пространстве.
Пусть (X,ρ) — метрическое пространство. Отображение $f\colon\mathbb{N}\to X$ называется последовательностью в метрическом пространстве (X,ρ). Если $n\in\mathbb{N}$, то $f(n)=x_n$ (обозначение). Вся последовательность обозначается: $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ или $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пределом последовательности в метрическом пространстве называется предел отображения f по базе $\mathfrak{A}=\{A_N\colon N\in\mathbb{R}\}$, где $A_N=\{n\in\mathbb{N}\colon n>N\}$. По определению 2.2

$$l=\lim x_n\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists A_N\in\mathfrak{A}\colon\forall n\in A_N\quad\rho(x_n,l)<\varepsilon\Leftrightarrow$$
$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{R}\colon\forall n>N\quad\rho(x_n,l)<\varepsilon.$$

Важный частный случай: $X=\mathbb{R},\quad l\in\mathbb{R}$.

$$l=\lim x_n\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{R}\colon\forall n>N\quad|x_n-l|<\varepsilon$$

(конечный предел числовой последовательности).

Комментарий: технически удобнее (в том числе для практических занятий) в определении предела последовательности не требовать, чтобы N было натуральным числом.

Теорема 2.1 (Эквивалентные определения предела)**.** *Утверждение $l=\lim_{\mathfrak{A}} f$ эквивалентно каждому из утверждений:*

1) $\forall B(l,\varepsilon)\quad\exists A\in\mathfrak{A}\colon\forall x\in A\quad f(x)\in B(l,\varepsilon)$.

2) $\forall B(l,\varepsilon)\quad\exists A\in\mathfrak{A}\colon f(A)\subset B(l,\varepsilon)$.

3) Если $g(x)=\rho\bigl(f(x),l\bigr)$ *(т. е.* $g\colon X\to\mathbb{R}$*), то* $\lim_{\mathfrak{A}} g=0$*, т. е.* $\rho\bigl(f(x),l\bigr)\underset{\mathfrak{A}}{\longrightarrow}0$.

4) Нестрогое неравенство: $\forall\varepsilon>0\quad\exists A\in\mathfrak{A}\colon\forall x\in A\quad\rho\bigl(f(x),l\bigr)\leqslant\varepsilon$.

5) Для малых ε*:* $\forall\varepsilon\colon 0<\varepsilon<\varepsilon_0\quad\exists A\in\mathfrak{A}\colon\forall x\in A\quad\rho\bigl(f(x),l\bigr)<\varepsilon$.

6) Определение с окрестностями: $\forall V(l) \quad \exists A \in \mathfrak{A} \colon f(A) \subset V(l)$.

Доказательство. 1) По определению шара (1.2) $f(x) \in B(l,\varepsilon) \Leftrightarrow \rho\big(f(x),l\big) < \varepsilon$.

2) По определению образа множества, $f(A) = \{y \in Y : y = f(x),\ x \in A\}$, т. е.

$$f(A) \subset B(l,\varepsilon) \Leftrightarrow \forall x \in A \quad y = f(x) \in B(l,\varepsilon) \Leftrightarrow \forall x \in A \quad \rho\big(f(x),l\big) < \varepsilon.$$

3) $l = \lim_{\mathfrak{A}} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A \quad |g(x) - 0| = g(x) = \rho\big(f(x),l\big) < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A \quad |g(x) - 0| = \rho\big(g(x),0\big) < \varepsilon \text{ по метрике в } \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} g = 0.$$

4) а) Если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A \quad \rho\big(f(x),l\big) < \varepsilon$, то для тех же $x \in A$ выполнено $\rho\big(f(x),l\big) \leqslant \varepsilon$, т. е. нестрогое неравенство.

б) Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$, тогда $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. По утверждению с нестрогим неравенством, для числа $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ $\exists A_1 \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A_1 \quad \rho\big(f(x),l\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_1 \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A_1 \quad \rho\big(f(x),l\big) < \varepsilon \Rightarrow l = \lim_{\mathfrak{A}} f.$$

5) а) Если утверждение $\exists A \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A \quad \rho\big(f(x),l\big) < \varepsilon$ выполнено для любого $\varepsilon > 0$, то оно выполнено для $\forall \varepsilon \colon 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

б) Для $\forall \varepsilon > 0$ положим $\varepsilon_1 = min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon_0}{2}\}$, тогда $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon, \quad \varepsilon_1 \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0$.

по утверждению (5), для $\varepsilon_1 \quad \exists A_1 \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A_1 \quad \rho\big(f(x),l\big) < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon$

т. е. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A_1 \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A_1 \quad \rho\big(f(x),l\big) < \varepsilon \Rightarrow l = \lim\limits_{\mathfrak{A}} f$.

6) а) Если выполнено условие: $\forall V(l) \quad \exists A \in \mathfrak{A} \colon f(A) \subset V(l)$, то, поскольку любой шар $B(l,\varepsilon)$ является окрестностью, выполнено утверждение (2), т. е. по уже доказанному, $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$.

б) Пусть $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$, тогда выполнено утверждение (2). По определению окрестностей (1.2), для $\forall V(l) \quad \exists \varepsilon > 0 \colon B(l,\varepsilon) \subset V(l)$. По утверждению (2), для этого $B(l,\varepsilon) \quad \exists A \in \mathfrak{A} \colon f(A) \subset B(l,\varepsilon) \subset V(l)$. Получили: $\forall V(l) \quad \exists A \in \mathfrak{A} \colon f(A) \subset V(l)$.

Теорема 2.2 (Единственность предела)**.** *Если* $l_1 = \lim_{\mathfrak{A}} f, \quad l_2 = \lim_{\mathfrak{A}} f$, *то* $l_1 = l_2$.

Доказательство (от противного). Предположим, что $l_1 \neq l_2$. Тогда по определению метрики (1.1) $\rho(l_1,l_2) > 0$. Обозначим $\varepsilon = \frac{\rho(l_1,l_2)}{2} > 0$. По определению предела, для этого ε

$$\begin{cases} \exists A_1 \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A_1 \quad \rho\big(f(x),l_1\big) < \varepsilon \\ \exists A_2 \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A_2 \quad \rho\big(f(x),l_2\big) < \varepsilon. \end{cases}$$

По определению базы (2.1), $\exists A \in \mathfrak{A} \colon A \subset A_1 \cap A_2, \quad A \neq \varnothing$. Тогда

$$\exists x \in A \subset A_1 \cap A_2 \Rightarrow \begin{cases} x \in A_1 \\ x \in A_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho\big(f(x),l_1\big) < \varepsilon \\ \rho\big(f(x),l_2\big) < \varepsilon \end{cases}$$

$$2\varepsilon = \rho(l_1,l_2) \leqslant \rho\big(l_1,f(x)\big) + \rho\big(f(x),l_2\big) = \rho\big(f(x),l_1\big) + \rho\big(f(x),l_2\big) < 2\varepsilon$$

(по свойствам метрики — неравенство треугольника и симметрия), т. е. $2\varepsilon < 2\varepsilon$ — противоречие. Получили: $l_1 = l_2$.

Определение 2.3 (Конечный и бесконечный предел).

1) Пусть $f\colon X\to Y$, где $Y=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}^n$, $l\in Y$, $\mathfrak{A}$ — база множеств. По общему определению предела 2.2 и определению метрики в пространстве Y

$$\lim_{\mathfrak{A}} f=l\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A\quad \rho_Y\big(f(x),l\big)=|f(x)-l|<\varepsilon.$$

2) Пусть $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$, $l=+\infty$, $\mathfrak{A}$ — база множеств. По общему определению предела

$$\lim_{\mathfrak{A}} f=+\infty\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A\quad \rho_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(x),+\infty\big)<\varepsilon.$$

По теореме 2.1 (эквивалентные определения предела), п. 5 в этом определении достаточно рассматривать $\varepsilon\colon 0<\varepsilon<2$. $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(f(x),+\infty)<\varepsilon\Leftrightarrow f(x)\in B(+\infty,\varepsilon)$. По теореме 1.1 (строение шаров) при $0<\varepsilon<2\quad B(+\infty,\varepsilon)=(p;+\infty]$, где $p\in\mathbb{R}$ и для любого $p\in\mathbb{R}$ множество $(p;+\infty]$ является таким шаром. Поэтому

$$\lim_{\mathfrak{A}} f=+\infty\Leftrightarrow \forall p\in\mathbb{R}\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A\quad f(x)>p.$$

3) Пусть $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$, $l=-\infty$, $\mathfrak{A}$ — база множеств. Аналогично п. 2, в общем определении предела достаточно рассматривать $\varepsilon\colon 0<\varepsilon<2$ и при таких ε шар $B(-\infty,\varepsilon)=[-\infty;q)$, поэтому

$$\lim_{\mathfrak{A}} f=-\infty\Leftrightarrow \forall q\in\mathbb{R}\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A\quad f(x)<q.$$

Поскольку $\mathbb{R}\subset\overline{\mathbb{R}}$, в $\mathbb{R}$ определены две метрики: для $x,\ y\in\mathbb{R}\quad \rho_{\mathbb{R}}(x,y)=|x-y|$ и индуцированная из $\overline{\mathbb{R}}$: $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}(x,y)=|\varphi(x)-\varphi(y)|$. Таким образом, для сходимости к конечному пределу возникает два определения: предел по метрике $\rho_{\mathbb{R}}$ и предел по метрике $\rho_{\overline{\mathbb{R}}}$. Оказывется, что эти определения равносильны:

Теорема 2.3 (Сходимость к конечному пределу в метриках $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$).
Пусть $f\colon X\to\mathbb{R}$, $\mathfrak{A}$ — база множеств, $l\in\mathbb{R}$. Тогда

$$l=\lim_{\mathfrak{A}} f\ \text{по метрике}\ \mathbb{R}\Leftrightarrow l=\lim_{\mathfrak{A}} f\ \text{по метрике}\ \overline{\mathbb{R}}.$$

Доказательство.

а) Пусть $l=\lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике $\overline{\mathbb{R}}$. Для $\forall\varepsilon>0\quad l-\varepsilon<l<l+\varepsilon$. Поскольку функция φ строго возрастает (доказано в теореме 1.1 о строении шаров), $\varphi(l-\varepsilon)<\varphi(l)<\varphi(l+\varepsilon)$. По следствию из теоремы 1.1,

$$\exists\varepsilon_1>0\colon \varphi(l-\varepsilon)\leqslant\varphi(l)-\varepsilon_1<\varphi(l)+\varepsilon_1\leqslant\varphi(l+\varepsilon). \tag{1}$$

Поскольку $l=\lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике $\overline{\mathbb{R}}$, для этого ε_1

$$\exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A\quad \rho_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(x),l\big)=\big|\varphi\big(f(x)\big)-\varphi(l)\big|<\varepsilon_1\Leftrightarrow\varphi(l)-\varepsilon_1<\varphi\big(f(x)\big)<\varphi(l)+\varepsilon_1.$$

Тогда по неравенству (1)

$$\exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A\quad \varphi(l-\varepsilon)<\varphi\big(f(x)\big)<\varphi(l+\varepsilon).$$

Поскольку φ^{-1} тоже строго возрастает (в теореме 1.1), из последнего неравенства следует:

$$\forall x\in A\quad \varphi^{-1}\big(\varphi(l-\varepsilon)\big)<\varphi^{-1}\big(\varphi\big(f(x)\big)\big)<\varphi^{-1}\big(\varphi(l+\varepsilon)\big)\Rightarrow l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon.$$

Получили:

$$\forall\varepsilon>0\quad \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A\quad |f(x)-l|<\varepsilon\Rightarrow l=\lim_{\mathfrak{A}} f\ \text{по метрике}\ \mathbb{R}$$

(по ε находим ε_1 в неравенстве (1), затем по ε_1 находим множество A).

б) Пусть $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике $\mathbb{R}$. В примере 2 после определения метрического пространства доказано, что функция φ отображает $\mathbb{R}$ на $(-1;1)$. Поскольку $l \in \mathbb{R}$, $\varphi(l) \in (-1;1)$. Определим $\varepsilon_0 = \min\{1-\varphi(l), \varphi(l)+1\}$, тогда

$$\varepsilon_0 \leqslant 1-\varphi(l) \Rightarrow \varphi(l)+\varepsilon_0 \leqslant 1; \quad \varepsilon_0 \leqslant \varphi(l)+1 \Rightarrow -1 \leqslant \varphi(l)-\varepsilon_0. \tag{2}$$

Рассмотрим $\forall\varepsilon\colon 0<\varepsilon<\varepsilon_0$, тогда по неравенствам (2)

$$-1 \leqslant \varphi(l)-\varepsilon_0 < \varphi(l)-\varepsilon < \varphi(l) < \varphi(l)+\varepsilon < \varphi(l)+\varepsilon_0 \leqslant 1.$$
$$\varphi(l)-\varepsilon,\ \varphi(l)+\varepsilon \in (-1;1) \Rightarrow \text{ определены } \varphi^{-1}\big(\varphi(l)-\varepsilon\big),\ \varphi^{-1}\big(\varphi(l)+\varepsilon\big) \in \mathbb{R}.$$

Поскольку φ^{-1} строго возрастает, из последних неравенств следует

$$\varphi^{-1}\big(\varphi(l)-\varepsilon\big) < \varphi^{-1}\big(\varphi(l)\big) = l < \varphi^{-1}\big(\varphi(l)+\varepsilon\big).$$

По следствию из теоремы 1.1 (строение шаров):

$$\exists\varepsilon_1>0\colon \varphi^{-1}\big(\varphi(l)-\varepsilon\big) \leqslant l-\varepsilon_1 < l < l+\varepsilon_1 \leqslant \varphi^{-1}\big(\varphi(l)+\varepsilon\big). \tag{3}$$

Поскольку $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике $\mathbb{R}$,

$$\text{для } \varepsilon_1 \quad \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A \quad |f(x)-l|<\varepsilon_1 \Leftrightarrow l-\varepsilon_1<f(x)<l+\varepsilon_1$$

Отсюда по неравенствам (3)

$$\varphi^{-1}\big(\varphi(l)-\varepsilon\big) \leqslant l-\varepsilon_1 < f(x) < l+\varepsilon_1 \leqslant \varphi^{-1}\big(\varphi(l)+\varepsilon\big).$$

Функция φ строго возрастает, поэтому из последних неравенств получаем

$$\varphi\Big(\varphi^{-1}\big(\varphi(l)-\varepsilon\big)\Big) < \varphi\big(f(x)\big) < \varphi\Big(\varphi^{-1}\big(\varphi(l)+\varepsilon\big)\Big) \Rightarrow \varphi(l)-\varepsilon < \varphi\big(f(x)\big) < \varphi(l)+\varepsilon \Rightarrow$$
$$\big|\varphi\big(f(x)\big)-\varphi(l)\big| = \rho_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(x),l\big) < \varepsilon,$$
$$\text{т. е. } \forall\varepsilon\colon 0<\varepsilon<\varepsilon_0 \quad \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x\in A \quad \rho_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(x),l\big)<\varepsilon.$$

(по ε находим ε_1 в неравенстве (3), затем по ε_1 находим множество A). По теореме 2.1 (эквивалентные определения предела, п. 5), из последнего утверждения следует $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике $\overline{\mathbb{R}}$.

В дальнейшем, если в формулировке теорем участвуют только конечные пределы, по умолчанию используем метрику $\mathbb{R}$, а если конечные и бесконечные пределы — то метрику $\overline{\mathbb{R}}$.

Комментарий: Можно сейчас сформулировать эту теорему без доказательства и доказать её в главе о непрерывных функциях, используя непрерывность φ и φ^{-1}. Доказательство там получается проще и быстрее (см. в дополнениях к главе "Непрерывные функции").

Определение 2.4 (Предельная точка множества).
Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $E\subset X$, $a\in X$. Обозначим $\dot B(a,r) = B(a,r)\backslash\{a\}$ ("проколотый шар"). Точка a называется предельной точкой множества E, если для $\forall B(a,r)$ $\dot B(a,r)\cap E\neq\varnothing$.

Замечания. 1) Если $E=\varnothing$, то $\dot B(a,r)\cap E=\varnothing$, т. е. пустое множество не имеет предельных точек.

2) Если a — предельная точка E, $E_1\supset E$, то a — предельная точка и для E_1: $\forall B(a,r)$ $\dot B(a,r)\cap E_1 \supset \dot B(a,r)\cap E\neq\varnothing$.

3) Если a — предельная точка E, то для $\forall V(a) \quad \dot{V}(a) \cap E \neq \varnothing$ (поскольку, по определению окрестности, $\exists B(a,r) \subset V(a), \quad \dot{V}(a) \cap E \supset \dot{B}(a,r) \cap E \neq \varnothing$.

Задача на экзамене для отличников: доказать, что конечное множество не имеет предельных точек (конечное множество: существует биекция на $\{1, 2, \ldots, n\}$).

Лемма 2.1. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X, \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность в X. Если для $\forall n \in \mathbb{N} \quad \rho(x_n, a) < \frac{1}{n}$, то $x_n \to a$.*

Доказательство. Для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = \frac{1}{\varepsilon} > 0, \ N \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\forall n > N = \frac{1}{\varepsilon} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon, \ \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow \rho(x_n, a) < \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} \colon \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon \Rightarrow x_n \to a.$$

Теорема 2.4 (Характеристика предельных точек с помощью последовательностей). *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $a \in X, \ E \subset X$.*

$$(a \text{ — предельная точка } E) \Leftrightarrow (\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \colon \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, \ x_n \neq a, \ x_n \to a).$$

Доказательство. а) "$\Rightarrow$":

По определению предельной точки, для $\forall n \in \mathbb{N} \quad \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \cap E \neq \varnothing$, т. е.

$$\exists x' \in E \colon x' \in \dot{B}(a, \frac{1}{n}) \Rightarrow \begin{cases} \rho(x', a) < \frac{1}{n} \\ x' \neq a \end{cases}.$$

Зафиксируем некоторое x' с этими свойствами и обозначим его x_n. Получили $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, \ x_n \neq a, \ \rho(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow (\text{по лемме}) \ x_n \to a.$$

б) "$\Leftarrow$":

Пусть $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \colon \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, \ x_n \neq a, \ x_n \to a$. По определению $\lim x_n$,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{R} \colon \forall n > N \quad \rho(x_n, a) < \varepsilon, \ x_n \neq a, \ x_n \in E \Rightarrow$$
$$x_n \in \dot{B}(a, \varepsilon) \cap E \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \dot{B}(a, \varepsilon) \cap E \neq \varnothing,$$

т. е. a — предельная точка E.

Примеры предельных точек.

Пример 1. Пусть $E \subset \overline{\mathbb{R}}, \ E \neq \varnothing$. Если $\sup E \notin E$ (т. е. в E нет наибольшего элемента), то $\sup E$ — предельная точка E. Аналогично, если $\inf E \notin E$ (т. е. в E нет наименьшего элемента), то $\inf E$ — предельная точка E.

Доказательство. 1) Пусть $\sup E = -\infty$. $\forall x \in E \ x \leqslant -\infty, \ E \neq \varnothing \Rightarrow x = -\infty$, т. е. $E = \{-\infty\}$, $\sup E \in E$ — противоречие с условием, т. е. этот случай невозможен.

2) Пусть $\sup E = M \in \mathbb{R}$. Поскольку M — наименьшая верхняя граница E, для любого $n \in \mathbb{N}$ число $M - \frac{1}{n}$ не является верхней границей, т. е.

$\exists x \in E \colon M - \dfrac{1}{n} < x \leqslant M < M + \dfrac{1}{n} \Rightarrow |x - M| < \dfrac{1}{n}$. Обозначим одно из таких x через x_n.

При этом $x_n \in E, \ M = \sup E \notin E \Rightarrow x_n \neq M$. Получили последовательность

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \colon \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E, \ x_n \neq M, \ |x_n - M| < \frac{1}{n}.$$

По лемме 2.1 тогда $x_n \to M$ по метрике в $\mathbb{R}$, следовательно (по теореме 2.3 о сходимости к конечному пределу в $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$), и по метрике в $\overline{\mathbb{R}}$. Получили:

$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \colon \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E,\ x_n \neq M,\ x_n \to M \text{ по метрике в } \overline{\mathbb{R}}.$$

Тогда по теореме 2.4 $M = \sup E$ — предельная точка E.

3) Пусть $\sup E = +\infty$. Для любого $r > 0$ рассмотрим $r_1 \colon 0 < r_1 < \min\{r, 2\}$, тогда $r_1 < r,\ 0 < r_1 < 2$. По теореме 1.1 о строении шаров $B_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty, r_1) = (p; +\infty]$, где $p \in \mathbb{R}$. Поскольку $p < +\infty = \sup E$, p не является верхней границей E, т. е. $\exists x \in E \colon x > p$. При этом $+\infty \notin E,\ x \in E \Rightarrow x \neq +\infty$, т. е.

$$x \in (p; +\infty) \cap E = \dot{B}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty, r_1) \cap E \subset \dot{B}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty, r) \cap E \text{ (поскольку } r_1 < r) \Rightarrow$$
$$\dot{B}_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty, r) \cap E \neq \varnothing \text{ для любого } r > 0 \Rightarrow +\infty \text{ — предельная точка } E.$$

Для $\inf E$ — аналогично (случай $\inf E = +\infty$ невозможен, в случае $\inf E = m \in \mathbb{R}$ $\exists x \in E \colon x < m + \frac{1}{n}$, в случае $\inf E = -\infty \quad B_{\overline{\mathbb{R}}}(-\infty, r_1) = [-\infty; q),\ \exists x \in E \colon x < q$).

Следствие. *Если $E \subset \overline{\mathbb{R}},\ E \neq \varnothing$, то:*
$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \colon \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in E,\ x_n \to \sup E; \quad \exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \colon \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n \in E,\ y_n \to \inf E.$

Доказательство. Если $\sup E \notin E$, то последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ с такими свойствами существует по теореме 2.4 о характеристике предельных точек (поскольку $\sup E$ — предельная точка E), а если $\sup E \in E$, то положим для $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n = \sup E$ (стационарная последовательность). Тогда $x_n \to \sup E$ (пример 1 после определения предела отображения). Для $\inf$ — аналогично.

Пример 2. Пусть $a, b \in \overline{\mathbb{R}},\ a < b,\ E = \langle a; b\rangle$. Тогда, если $c \in [a; b]$, то c — предельная точка E.

Доказательство. Пусть $c > a,\ c \leqslant b$, тогда $c = \sup\langle a; c)$ (очевидно, c — наименьшая верхняя граница $\langle a; c)$), при этом $c \notin \langle a; c) \Rightarrow c$ —предельная точка $\langle a; c)$. Поскольку $\langle a; c) \subset \langle a; b\rangle$, по замечанию 2 к определению предельной точки c —предельная точка $\langle a; b\rangle$.

Пусть $c = a = \inf(a; b\rangle,\ a \notin (a; b\rangle \Rightarrow a$ — предельная точка $(a; b\rangle \subset \langle a; b\rangle \Rightarrow a$ — предельная точка $\langle a; b\rangle$.

Пример 3. $E = \mathbb{N}$. Для $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \colon n > a$ (аксиома Архимеда) $\Rightarrow a$ не является верхней границей для $\mathbb{N} \Rightarrow \sup \mathbb{N} = +\infty \notin \mathbb{N} \Rightarrow +\infty$ — предельная точка $\mathbb{N}$.

Задачи для отличников на экзамене:
1) Доказать, что у $\mathbb{N}$ нет других предельных точек, кроме $+\infty$.
2) Найти все предельные точки $\mathbb{Z}$.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $E \subset X,\ a \in X$ — предельная точка E. Тогда $\forall \dot{B}(a, r) \cap E \neq \varnothing$.

$$\dot{B}(a, r) \cap E = \{x \in X \colon x \in B(a, r),\ x \neq a,\ x \in E\} = B(a, r) \cap (E \setminus \{a\}).$$

Множество $\{B(a, r) \colon r > 0\}$ — база (пример 1 после определения базы), все множества $B(a, r) \cap (E \setminus \{a\}) \neq \varnothing$, тогда по замечанию 1 после определения базы, эти множества $B(a, r) \cap (E \setminus \{a\}) = \dot{B}(a, r) \cap E$ тоже образуют базу, при этом $\dot{B}(a, r) \cap E \subset E$.

Определение 2.5 (Предел отображения в точке)**.**
Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, a — предельная точка

E, $f\colon E\to Y$. Если $b\in Y$ — предел отображения f по базе $\{\dot B(a,r)\cap E\colon r>0\}$, то говорят. что b — предел отображения f в точке a.

Обозначения: $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $b=\lim_a f$.

По общему определению предела 2.2:

$$b=\lim_{x\to a} f(x)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists \dot B(a,\delta)\cap E\colon \forall x\in \dot B(a,\delta)\cap E\quad \rho_Y\big(f(x),b\big)<\varepsilon.$$

$$x\in\dot B(a,\delta)\cap E\Leftrightarrow\begin{cases}x\in E\\ x\neq a\\ \rho_X(x,a)<\delta\end{cases},\ \text{поэтому}$$

$$b=\lim_{x\to a} f(x)\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\quad \exists\delta>0\colon \forall x\in E\colon x\neq a \text{ и } \rho_X(x,a)<\delta\quad \rho_Y\big(f(x),b\big)<\varepsilon$$

и a — предельная точка E.

Частные случаи.

1) $X=Y=\mathbb{R}$, $E\subset\mathbb{R}$, $f\colon E\to\mathbb{R}$ (функция одной вещественной переменной, $a,b\in\mathbb{R}$).

$$b=\lim_{x\to a} f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a \text{ — предельная точка } E\\ \forall\varepsilon>0\quad\exists\delta>0\colon\forall x\in E\colon x\neq a \text{ и } |x-a|<\delta\quad |f(x)-b|<\varepsilon\end{cases}$$

"конечный предел в конечной точке". Это определение принадлежит Коши.

Точно так же определение предела выглядит для $X=\mathbb{R}^m$, $Y=\mathbb{R}^n$ (предел вектор-функции нескольких переменных). При этом $|x-a|$ и $|f(x)-b|$ — длины векторов $x-a$ и $f(x)-b$. Ещё один случай — $X=\mathbb{C}$, $Y=\mathbb{C}$ (функция комплексной переменной), здесь $|x-a|$ и $|f(x)-b|$ — модули комплексных чисел.

2) $X=\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^m$, $Y=\overline{\mathbb{R}}$, $b=+\infty$. По определению 2.3 для предела, равного $+\infty$

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty\Leftrightarrow\begin{cases}a \text{ — предельная точка } E=\operatorname{dom} f\\ \forall p\in\mathbb{R}\ \exists\delta>0\colon\forall x\in E\colon x\neq a \text{ и } |x-a|<\delta\quad f(x)>p.\end{cases}$$

Аналогично для предела, равного $-\infty$

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty\Leftrightarrow\begin{cases}a \text{ — предельная точка } E=\operatorname{dom} f\\ \forall q\in\mathbb{R}\quad\exists\delta>0\colon\forall x\in E\colon x\neq a \text{ и } |x-a|<\delta\quad f(x)<q.\end{cases}$$

(используем то, что по теореме 1.1 при $0<\varepsilon<2$ $B(-\infty,\varepsilon)=[-\infty;q))$.

3) $X=\overline{\mathbb{R}}$, $Y=\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $a=+\infty$, $b\in Y$ (конечно).

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\Leftrightarrow\begin{cases}+\infty \text{ — предельная точка } E=\operatorname{dom} f\\ \forall\varepsilon>0\quad\exists\dot B(+\infty,\delta)\cap E\colon\forall x\in\dot B(+\infty,\delta)\cap E\quad |f(x)-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

Если $0<\delta_1<\min\{\delta,2\}$, то $\dot B(+\infty,\delta_1)\subset\dot B(+\infty,\delta)$ (по замечанию 3 к определению шаров, поскольку $\delta_1<\delta$), поэтому и для любого $x\in\dot B(+\infty,\delta_1)\cap E$ $|f(x)-b|<\varepsilon$. Получаем:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\Leftrightarrow\begin{cases}+\infty \text{ — предельная точка } E=\operatorname{dom} f\\ \forall\varepsilon>0\quad\exists\delta_1: 0<\delta_1<2 \text{ и } \forall x\in\dot B(+\infty,\delta_1)\cap E\quad |f(x)-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

По теореме 1.1 $B(+\infty,\delta_1)=(p;+\infty]$, где $p\in\mathbb{R}$. В итоге:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=b\Leftrightarrow\begin{cases}+\infty \text{ — предельная точка } E=\operatorname{dom} f\\ \forall\varepsilon>0\quad \exists p\in\mathbb{R}\colon \forall x\in E\colon x\neq+\infty \text{ и } x>p\quad |f(x)-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

Аналогично

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=b\Leftrightarrow\begin{cases}-\infty \text{ — предельная точка } E=\operatorname{dom} f\\ \forall\varepsilon>0\quad \exists q\in\mathbb{R}\colon \forall x\in E\colon x\neq-\infty \text{ и } x<q\quad |f(x)-b|<\varepsilon.\end{cases}$$

(поскольку $B(-\infty,\delta_1)=[-\infty;q)$).

Случаи $a=\pm\infty$, $b=\pm\infty$ (одновременно) — самостоятельно.

Теорема 2.5 (Связь предела отображения и пределов его сужений).
Пусть (Y,ρ) — метрическое пространство, $f\colon X\to Y$, $b\in Y$, $\mathfrak{A}$ — база множеств.

1) Пусть $X_0\subset X$, $f_0=f|_{X_0}$ (сужение f на множество X_0).

Если для $\forall A\in\mathfrak{A}\quad A\cap X_0\neq\varnothing$ и $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f=b$, то $\lim f_0=b$ по базе $\{A\cap X_0\colon A\in\mathfrak{A}\}$.

2) Пусть $X_1\cup X_2=X$, $f_1=f|_{X_1}$, $f_2=f|_{X_2}$.

Если $\lim f_1=b$ по базе $\{A\cap X_1\colon A\in\mathfrak{A}\}$, $\lim f_2=b$ по базе $\{A\cap X_2\colon A\in\mathfrak{A}\}$,
то $\lim f=b$ по базе $\{A\cap X\colon A\in\mathfrak{A}\}$.

В частности, если в условиях п. 2 $\exists A_0\in\mathfrak{A}\colon A_0\subset X$, то $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f=b$.

3) Пусть $X_0\subset X$, $f_0=f|_{X_0}$. Если $\exists A_0\in\mathfrak{A}\colon A_0\subset X_0$, то

$$\lim_{\mathfrak{A}} f=b\Leftrightarrow\lim f_0=b \text{ по базе } \{A\cap X_0\colon A\in\mathfrak{A}\}.$$

Доказательство. 1) $\forall A\in\mathfrak{A}\quad A\cap X_0\neq\varnothing\Rightarrow\{A\cap X_0\colon A\in\mathfrak{A}\}$ — тоже база (по замечанию 1 к определению базы). Очевидно, эта база состоит из подмножеств множества X_0. По теореме 2.1 (эквивалентные определения предела), п. 2

$$\lim_{\mathfrak{A}} f=b\Rightarrow\forall B(b,\varepsilon)\quad\exists A\in\mathfrak{A}\colon f(A)\subset B(b,\varepsilon).$$

Поскольку $A\cap X_0\subset X_0$, по определению сужения

$$\text{для } \forall x\in A\cap X_0\quad f_0(x)=f(x)\Rightarrow f_0(A\cap X_0)=f(A\cap X_0)\subset f(A)\subset B(b,\varepsilon).$$

Получили:

$$\forall B(b,\varepsilon)\quad\exists A\cap X_0\colon\forall x\in A\cap X_0\quad f(A\cap X_0)\subset B(b,\varepsilon)\Rightarrow\lim f_0=b \text{ по базе } \{A\cap X_0\colon A\in\mathfrak{A}\}$$

(снова по п. 2 теоремы 2.1).

2) $\lim f_1=b$ по базе $\{A\cap X_1\colon A\in\mathfrak{A}\}\Rightarrow$

$$\forall B(b,\varepsilon)\quad\exists A_1\cap X_1\colon\forall x\in A_1\cap X_1\quad f(x)=f_1(x)\in B(b,\varepsilon)$$

$\lim f_2=b$ по базе $\{A\cap X_2\colon A\in\mathfrak{A}\}\Rightarrow$

$$\forall B(b,\varepsilon)\quad\exists A_2\cap X_2\colon\forall x\in A_2\cap X_2\quad f(x)=f_2(x)\in B(b,\varepsilon)$$

По определению базы $\mathfrak{A}$, $\exists B \in \mathfrak{A}\colon B \subset A_1 \cap A_2$. Рассмотрим $\forall x \in B \cap X = B \cap (X_1 \cup X_2) = (B \cap X_1) \cup (B \cap X_2)$, тогда $x \in B \cap X_1$ или $x \in B \cap X_2$.

Если $x \in B \cap X_1$, то $x \in A_1 \cap X_1 \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon)$;

если $x \in B \cap X_2$, то $x \in A_2 \cap X_2 \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon)$.

Получили:

$$\forall B(b,\varepsilon) \quad \exists B \cap X\colon \forall x \in B \cap X \quad f(x) \in B(b,\varepsilon) \Rightarrow \lim f = b \text{ по базе } \{A \cap X\colon A \in \mathfrak{A}\}.$$

Если в условиях п. 2 теоремы $\exists A_0 \in \mathfrak{A}\colon A_0 \subset X$, то, по замечанию 2 к определению базы (2.1), $\exists B \in \mathfrak{A}\colon B \subset A_1 \cap A_2 \cap A_0$. Тогда, поскольку $A_0 \subset X = X_1 \cup X_2$,

$$B \subset A_1 \cap A_2 \cap (X_1 \cup X_2) = (A_1 \cap A_2 \cap X_1) \cup (A_1 \cap A_2 \cap X_2) \subset (A_1 \cap X_1) \cup (A_2 \cap X_2).$$

Поэтому для любого $x \in B$ есть две возможности: $x \in A_1 \cap X_1$ или $x \in A_2 \cap X_2$, в обоих случаях $f(x) \in B(b, \varepsilon)$. В итоге:

$$\forall B(b,\varepsilon) \quad \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad f(x) \in B(b,\varepsilon) \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f = b.$$

3) "$\Rightarrow$": По определению базы, $\forall A \in \mathfrak{A} \quad \exists B \in \mathfrak{A}\colon B \subset A \cap A_0 \subset A \cap X_0, \quad B \neq \varnothing \Rightarrow A \cap X_0 \neq \varnothing$. Тогда по п. 1 теоремы $\lim\limits_{\mathfrak{A}} f = b \Rightarrow \lim f_0 = b$ по базе $\{A \cap X_0\colon A \in \mathfrak{A}\}$.

"$\Leftarrow$":

$$\lim f_0 = b \text{ по базе } \{A \cap X_0\colon A \in \mathfrak{A}\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \cap X_0 \quad \rho(f_0(x), b) < \varepsilon.$$

По определению базы, $\exists B \in \mathfrak{A}\colon B \subset A \cap A_0 \subset A \cap X_0$. Тогда для $\forall x \in B$ получим:

$$x \in B \Rightarrow x \in A \cap X_0 \Rightarrow f_0(x) = f(x) \text{ и } \rho(f(x), b) = \rho(f_0(x), b) < \varepsilon.$$

в итоге:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad \rho(f(x), b) < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f = b.$$

Следствия. 1) Локальность предела в точке.
Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, $f\colon E \to Y$, $a \in X$, $V(a)$ — окрестность точки a, $f_0 = f|_{\dot{V}(a) \cap E}$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f_0(x) = b$ (существование и величина предела зависят от поведения функции в сколь угодно малой окрректности точки a).

2) Предел "хвоста" последовательности.

$$\lim x_n = b \Leftrightarrow \lim_{n \geqslant n_0} x_n = b \ (\{x_n\}_{n \geqslant n_0} \text{— сужение } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ на } \{n_0, n_0+1, \ldots\} \in \mathfrak{A}).$$

3) Подпоследовательности с чётными и нечётными номерами.

$$\lim x_n = b \Leftrightarrow (\lim x_{2k} = b \text{ и } \lim x_{2k-1} = b)$$

$$(\text{сужения } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ на } X_1 = \{2, 4, \ldots, 2k, \ldots\} \text{ и } X_2 = \{1, 3, \ldots, 2k-1, \ldots\}$$

Комментарий: эти следствия бывает удобно использовать для практических занятий.

Определение 2.6 (Односторонние предельные точки).
Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $X_{a+} = X \cap [a, +\infty] = \{x \in X\colon x \geqslant a\}$, $X_{a-} = X \cap [-\infty, a] = \{x \in X\colon x \leqslant a\}$. Точка a называется правосторонней предельной точкой множества X, если a — предельная точка для X_{a+}. Точка a называется левосторонней

предельной точкой множества X, если a — предельная точка для X_{a-}. Если a — одновременно правосторонняя и левосторонняя предельная точка X, то a называется двусторонней предельной точкой.

Примеры. 1) Если $X \neq \varnothing$ и $\sup X \notin X$, то $\sup X$ — левосторонняя, но не правосторонняя предельная точка X (если $a = \sup X$, то для $\forall x \in X \quad x \leqslant a \Rightarrow X_{a-} = X$, а так как a — верхняя граница и $a \notin X$, то $X_{a+} = \varnothing$). Аналогично, если $X \neq \varnothing$ и $\inf X \notin X$, то $\inf X$ — правосторонняя, но не левосторонняя предельная точка X (в этом случае $X_{a+} = X,\ X_{a-} = \varnothing$).

2) Если $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}, \quad a < b$, то a — правосторонняя, но не левосторонняя предельная точка промежутка $\langle a; b\rangle$, $\quad b$ — левосторонняя, но не правосторонняя предельная точка промежутка $\langle a; b\rangle$ и любое c такое,что $a < c < b$ — двусторонняя предельная точка $\langle a; b\rangle$.

3) $+\infty$ — левосторонняя предельная точка для $\mathbb{N}$.

Определение 2.7 (Односторонние пределы).
Пусть (Y,ρ) — метрическое пространство, $X \subset \overline{\mathbb{R}}, \quad f\colon X \to Y$. Если a — правосторонняя предельная точка множества X и существует $\lim\limits_{x\to a} f|_{X_{a+}}$ (предел сужения f на X_{a+}), то он называется правосторонним пределом (или пределом справа) отображения f в точке a.

Обозначения: $\lim_{a+} f = \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a+0)$

Если a — левосторонняя предельная точка множества X и существует $\lim\limits_{x\to a} f|_{X_{a-}}$ (предел сужения f на X_{a-}), то он называется левосторонним пределом (или пределом слева) отображения f в точке a.

Обозначения: $\lim_{a-} f = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a-0)$

Определение односторонних пределов на языке неравенств:
Пусть $a \in \mathbb{R}$ (конечно), a — предельная точка множества $X_{a+}, \quad f\colon X \to Y$.

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in X_{a+}\colon |x-a| < \delta \text{ и } x \neq a \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

$X_{a+} = \{x \in X\colon x \geqslant a\}$, поэтому

$$\left\{\begin{array}{l} x \in X_{a+} \\ |x-a| < \delta \\ x \neq a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in X,\ x \geqslant a \\ a-\delta < x < a+\delta \\ x \neq a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in X \\ a < x < a+\delta \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to a+} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in X\colon a < x < a+\delta \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

Аналогично для левостороннего предела (a — предельная точка X_{a-}):

$$\left\{\begin{array}{l} x \in X_{a-} \\ |x-a| < \delta \\ x \neq a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in X,\ x \leqslant a \\ a-\delta < x < a+\delta \\ x \neq a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in X \\ a-\delta < x < a \end{array}\right.$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in X\colon a-\delta < x < a \quad \rho_Y(f(x), b) < \varepsilon.$$

Теорема 2.6 (Об односторонних пределах).
Пусть (Y,ρ) — метрическое пространство, $X \subset \overline{\mathbb{R}}, \quad f\colon X \to Y \quad b \in Y$.

1) Если a — правосторонняя предельная точка X, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to a+} f(x) = b$.

Если a — левосторонняя предельная точка X, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$.

2) Если a — двусторонняя предельная точка X и $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$, *то* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Следует из общей теоремы 2.5 о пределах сужений:

1) — следует из утверждения 1 общей теоремы для сужений на X_{a+} и X_{a-}.

2) — следует из утверждения 2 общей теоремы, поскольку $X_{a+} \cup X_{a-} = X$.

Определение 2.8 (Бесконечно большие). *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Функция f называется бесконечно большой по базе $\mathfrak{A}$, если $\lim_{\mathfrak{A}} |f| = +\infty$. Соответственно, f — бесконечно большая в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = +\infty$ (по базе $\{\dot{B}(a,\delta) \cap dom\, f\}$).*

Примеры. 1) Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ — бесконечно большая в точке 0: для любого $p \in \mathbb{R}$ положим $\delta = \frac{1}{|p|+1} > 0$. Тогда для $\forall x\colon |x-0| = |x| < \delta$ и $x \neq 0 \quad \left|\frac{1}{x}\right| > |p| + 1 > p$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} \left|\frac{1}{x}\right| = +\infty$.

2) Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$. Для $\forall p \in \mathbb{R}$ положим $\delta = \frac{1}{|p|+1} > 0$. Тогда для $\forall x\colon 0 < x < \delta \quad \frac{1}{x} > |p| + 1 > p$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$.

3) Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$. Для $\forall p \in \mathbb{R}$ положим $\delta = \frac{1}{|p|+1} > 0$. Рассмотрим $\forall x\colon -\delta < x < 0$. Делим это неравенство на $-x > 0$, получим $\frac{\delta}{x} < -1$, делим на $\delta > 0$, получим $\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -|p| - 1 < p$. В итоге:

$$\forall p \in \mathbb{R} \quad \exists \delta = \frac{1}{|p|+1} > 0\colon \forall x\colon -\delta < x < 0 \quad \frac{1}{x} < p \Rightarrow \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Замечание. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{1}{x} \neq \lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x}$, вследствие теоремы об односторонних пределах двусторонний предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ в пространстве $\overline{\mathbb{R}}$ не существует.

4) Докажем, что $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $p = \frac{1}{\varepsilon} > 0$. Тогда, если $x > p > 0$, то $0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{p} = \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{R}\colon \forall x > p \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

5) Докажем, что $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим $p = -\frac{1}{\varepsilon} < 0$. Тогда, если $x < p < 0$, то разделим это неравенство на $xp > 0$. Получим: $\frac{1}{p} = -\varepsilon < \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists p \in \mathbb{R}\colon \forall x < p \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Теорема 2.7 (Первая теорема о пределе композиции).
Пусть (Y, ρ_Y), (Z, ρ_Z) — метрические пространства, $f\colon X \to Y$, $E \subset Y$, $g\colon E \to Z$, $\mathfrak{A}$ — база множеств. Если:

1) $\lim_{\mathfrak{A}} f(x) = b \in Y$;

2) $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$;

3) $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A \cap dom(g\circ f) \neq \varnothing$;

4) $\forall x \in dom(g\circ f) \quad f(x) \neq b$

то $\lim(g\circ f) = c$ по базе $\{A \cap dom(g\circ f)\colon A \in \mathfrak{A}\}$.

Комментарий: если $f(x) \to b$, $g(y) \to c$ при $y \to b$, то, в противоречии со "здравым смыслом", *не всегда* $g(f(x)) \to c$, нужны какие-то дополнительные условия. Пример — в задаче 607 из задачника Демидовича.

Доказательство теоремы. $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \neq \varnothing \Rightarrow \{A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \colon A \in \mathfrak{A}\}$ — база множеств (по замечанию 1 к определению базы).

По определению 2.4 (предел в точке)

$$\lim_{y \to b} g(y) = c \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \colon \forall y \in E = \operatorname{dom} g \colon \rho_Y(y, b) < \delta, \ y \neq b \quad \rho_Z(g(y), c) < \varepsilon. \quad (*)$$

По определению 2.2 (предел по базе)

$$\lim_{\mathfrak{A}} f(x) = b \Rightarrow \text{ для } \delta > 0 \text{ из формулы (*) } \exists A \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A \quad \rho_Y(f(x), b) < \delta. \qquad (**)$$

Рассмотрим $\forall x \in A \cap \operatorname{dom}(g \circ f)$. Поскольку $\operatorname{dom}(g \circ f) = \{x \in X : f(x) \in E\}$,

$$x \in A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ f(x) \in E \end{cases} \Rightarrow \text{ (по формуле (**)) } \begin{cases} \rho_Y(f(x), b) < \delta \\ f(x) \in E \end{cases}$$

По условию 4: $x \in \operatorname{dom}(g \circ f) \Rightarrow f(x) \neq b$. Тогда по формуле (*) для $y = f(x)$

$$\begin{cases} f(x) \in E \\ \rho_Y(f(x), b) < \delta \\ f(x) \neq b \end{cases} \Rightarrow \rho_Z(g(y), c) < \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \colon \forall x \in A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \quad \rho_Z(g(f(x)), c) < \varepsilon$$
$$\Rightarrow \lim g \circ f = C \text{ по базе } \{A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \colon A \in \mathfrak{A}\}.$$

Замечания. 1) Если отображение g *не определено* в точке b (т. е. $b \notin E = \operatorname{dom} g$), то условие 4 выполнено автоматически: если $f(x) = b$, то $f(x) \notin E \Rightarrow x \notin \operatorname{dom}(g \circ f)$.

2) Условие 4 может быть ослаблено:

4′) $\exists A_0 \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A_0 \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \quad f(x) \neq b$,
поскольку по п. 3 теоремы 2.5 о пределах сужений

$$\lim g \circ f|_{A_0 \cap \operatorname{dom}(g \circ f)} = c \Leftrightarrow \lim g \circ f = c \text{ (пределы по базе } \{A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \colon A \in \mathfrak{A}\}).$$

Следствие (Первая теорема о пределе композиции в точке).

Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y), (Z, ρ_Z) *— метрические пространства,* $E_1 \subset X$, $E_2 \subset Y$, $f \colon E_1 \to Y$, $g \colon E_2 \to Z$, $a \in X$, $b \in Y$, $c \in Z$. *Если:*

1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$*;*

2) $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$*;*

3) a *— предельная точка* $\operatorname{dom}(g \circ f)$*;*

4) $\forall x \in \operatorname{dom}(g \circ f) \quad f(x) \neq b$,

то $\lim\limits_{x \to a} g\bigl(f(x)\bigr) = c$.

Определение 2.9 (Подпоследовательность).

Пусть задана последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и возрастающая последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *(т. е.* $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$*). Тогда последовательность* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ *называется подпоследовательностью последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В терминах отображений: $x_n = f(n)$, где $f \colon \mathbb{N} \to X$, $n_k = \varphi(k)$, где $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, тогда $x_{n_k} = f(n_k) = f\bigl(\varphi(k)\bigr)$, т. е. подпоследовательность — это *композиция* $f \circ \varphi$.

Лемма 2.2. *Если последовательность натуральных чисел* $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ *строго возрастает, то* $\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$.

Доказательство. Докажем, что для $\forall k \in \mathbb{N} \quad n_k \geqslant k$ по индукции.

1) $n_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow n_1 \geqslant 1$.

2) $n_k \geqslant k,\ n_k, n_{k+1} \in \mathbb{N},\ n_{k+1} > n_k \Rightarrow n_{k+1} \geqslant n_k + 1 \geqslant k+1$.

Для любого $p \in \mathbb{R}$ положим $N = p$. Тогда для $\forall k > N = p \quad n_k \geqslant k > p$, т. е.

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists N\colon \forall k > N \quad n_k > p \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} n_k = +\infty.$$

Следствие (Предел подпоследовательности)**.**
Если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$*, то* $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$.

Доказательство. Положим $f(k) = n_k,\ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ g(n) = x_n,\ g\colon \mathbb{N} \to X$, тогда $x_{n_k} = g\big(f(k)\big)$. Проверяем условия теоремы о пределе композиции в точке:
1) $\lim\limits_{k\to+\infty} f(k) = +\infty$ (лемма 2.2); 2) $\lim\limits_{n\to+\infty} g(n) = a$;
3) $\operatorname{dom}(g \circ f) = \mathbb{N}$, $\quad +\infty$ — предельная точка $\mathbb{N}$; 4) $\forall k\ f(k) = n_k \neq +\infty$
$\Rightarrow$(по теореме о пределе композиции в точке) $\lim\limits_{k\to+\infty} g\big(f(k)\big) = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$.

Замечание. Если $n_k \to +\infty$ (не обязательно возрастая), то также $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$.

Теорема 2.8 (Равносильность двух определений предела в точке)**.**
Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) *— метрические пространства,* $E \subset X$, a *— предельная точка* E, $f\colon E \to Y$. *Равносильны:*

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$;

2) Для $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\colon \big(\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in E,\ x_n \neq a,\ x_n \to a\big) \quad f(x_n) \to b$

(определение предела "на языке последовательностей").

Замечание. В силу теоремы о единственности предела, для всех последовательностей из утверждения (2) $f(x_n)$ сходятся к *одному и тому же* пределу.

Доказательство теоремы. (1) $\Rightarrow$ (2):
Рассмотрим $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\colon \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in E,\ x_n \neq a,\ x_n \to a$. Последовательность — это отображение $\varphi\colon \mathbb{N} \to E$, $\varphi(n) = x_n$. По условию, $x_n \to a$, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = a$.
По (1), $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.
Для $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n = \varphi(n) \in E = \operatorname{dom} f \Rightarrow$ определено $f(x_n) = f\big(\varphi(n)\big)$, т. е. $\operatorname{dom}(f \circ \varphi) = \mathbb{N}$, $+\infty$ — предельная точка $\mathbb{N}$.
По условию на $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, для $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) = x_n \neq a$.

Таким образом, выполнены условия теоремы о пределе композиции в точке (следствие теоремы 2.7). По этой теореме, $\lim\limits_{n\to+\infty} f\big(\varphi(n)\big) = b$, т. е. $f(x_n) \to b$ — утверждение (2) доказано.

(2) $\Rightarrow$ (1): доказываем от противного.

Предположим, что выполнено (2), но не выполнено (1). По определению предела в точке

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} a \text{ — предельная точка } E = \operatorname{dom} f \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in E\colon (\rho_X(x,a) < \delta,\ x \neq a) \quad \rho_Y\big(f(x), b\big) < \varepsilon \end{cases}$$

(1) не выполнено, но по условию теоремы a — предельная точка E, следовательно, не выполнено

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall x \in E\colon (\rho_X(x,a) < \delta,\ x \neq a) \quad \rho_Y\bigl(f(x), b\bigr) < \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\exists \varepsilon > 0\colon \forall \delta > 0\ \exists x \in E\colon (\rho_X(x,a) < \delta,\ x \neq a), \quad \rho_Y\bigl(f(x), b\bigr) \geqslant \varepsilon$$

(в лекции подробно объяснял, как составляется отрицание утверждения с кванторами). Тогда

$$\text{для } \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \delta = \frac{1}{n} \quad \exists x \in E\colon (\rho_X(x,a) < \frac{1}{n},\ x \neq a), \quad \rho_Y\bigl(f(x), b\bigr) \geqslant \varepsilon. \qquad (*)$$

Выберем для любого $n \in \mathbb{N}$ одно из таких значений x, обозначим его x_n. Получили последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ со свойствами:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n \in E,\ x_n \neq a,\ \rho_X(x_n, a) < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \to a \text{ по лемме 2.1},$$

т. е. последовательность удовлетворяет условиям утверждения (2). Тогда $f(x_n) \to b$, но, по (*), для $\forall n \in \mathbb{N} \quad \rho_Y\bigl(f(x_n), b\bigr) \geqslant \varepsilon$ — противоречие с определением $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Пример. Пусть $E \subset \mathbb{R},\ f\colon E \to \mathbb{R}$ — периодическая функция с периодом $T > 0$, т. е. выполнены:

$$1)\ x \in E \Rightarrow x + T \in E,\quad x - T \in E; \quad 2)\ \forall x \in E \ \ f(x+T) = f(x).$$

Если $\exists x_0,\ x_0' \in E\colon f(x_0) \neq f(x_0')$ (т. е. $f \neq \mathrm{const.}$), то $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ не существует.

Доказательство. Обозначим $x_n = x_0 + nT,\quad x_n' = x_0' + nT$. Тогда

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_n \in E,\ x_n' \in E, \qquad f(x_n) = f(x_0),\ f(x_n') = f(x_0')$$

(очевидное доказательство по индукции).

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists N = \frac{p - x_0}{T}\colon \forall n > N \quad x_n = x_0 + nT > x_0 + \frac{p - x_0}{T} \cdot T = p,$$

т. е. $x_n \to +\infty$ (аналогично, $x_n' \to +\infty$). $f(x_n) = f(x_0) = \mathrm{const.} \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$. Аналогично, $f(x_n') \to f(x_0')$, что противоречит замечанию к теореме 2.8, поскольку $f(x_0) \neq f(x_0')$.

Аналогично доказываем, что не существует $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ (рассматриваем $x_n = x_0 - nT$, $x_n' = x_0' - nT$). В частности, функции sin, cos, tg, ctg не имеют пределов при $x \to \pm\infty$.

Определение 2.10 (Вектор-функция и её координатные функции)**.**
Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ *(вектор-функция). Тогда для* $\forall x \in X \quad f(x) = y = (y_1, \dots, y_n)$. k*-й координатной функцией вектор-функции* f *называется функция* $f_k\colon X \to \mathbb{R}$, *где* $f_k(x) = y_k$ *(*k*-я координата вектора* $y = f(x)$*). Таким образом,* $f(x) = \bigl(f_1(x), \dots, f_n(x)\bigr)$ *и для* $\forall k = 1, \dots, n \quad \mathrm{dom}\, f_k = \mathrm{dom}\, f = X$.

Теорема 2.9 (Теорема о покоординатной сходимости)**.**
Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ *— вектор-функция,* $f_1, \dots, f_n$ *— её координатные функции,* $\mathfrak{A}$ *— база множеств. Тогда*

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = b = (b_1, \dots, b_n) \Leftrightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad \lim_{\mathfrak{A}} f_k = b_k.$$

Доказательство. "$\Rightarrow$":

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad \rho\big(f(x), b\big) = |f(x) - b| < \varepsilon.$$

$$f(x) - b = \big(f_1(x) - b_1, \dots, f_n(x) - b_n\big),$$

$$\forall k = 1, \dots, n \quad |f_k(x) - b_k| \leqslant |f(x) - b| \text{ (свойства длины вектора)}$$

$$\Rightarrow \forall k = 1, \dots, n,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f_k(x) - b_k| < \varepsilon, \text{ т. е. } \forall k = 1, \dots, n \quad \lim_{\mathfrak{A}} f_k = b_k.$$

"$\Leftarrow$":

Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0$.

$$\forall k = 1, \dots, n \quad \lim_{\mathfrak{A}} f_k = b_k \Rightarrow \text{ для } \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0\ \exists A_k \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_k \quad |f_k(x) - b_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

По замечанию 2 к определению базы (2.1), $\exists A \in \mathfrak{A}\colon A \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Рассмотрим $\forall x \in A$.

$$x \in A \Rightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad x \in A_k \Rightarrow \forall k = 1, \dots, n \quad |f_k(x) - b_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

$$\text{Тогда } |f(x) - b| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \big(f_k(x) - b_k\big)^2} < \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Получили: $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f = b$.

Частный случай. Если $f\colon X \to \mathbb{C}$ (комплекснозначная функция), то

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = a + bi \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \operatorname{Re} f = a \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \operatorname{Im} f = b.$$

3. Свойства пределов, связанные с арифметическими операциями.

Лемма 3.1 (Два определения ограниченности в $\mathbb{R}$)**.**
$E \subset \mathbb{R}$ ограничено (сверху и снизу) $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}\colon \forall x \in E \quad |x| \leqslant M$.

Доказательство. "$\Rightarrow$":

E ограничено сверху и снизу $\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}\colon \forall x \in E \quad a \leqslant x \leqslant b$. Пусть $M = \max\{|a|, |b|\}$. Тогда $-M = \min\{-|a|, -|b|\}$.

$$\forall x \in E \quad -M \leqslant -|a| \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant |b| \leqslant M \Rightarrow -M \leqslant x \leqslant M \Rightarrow |x| \leqslant M.$$

"$\Leftarrow$":

$$\forall x \in E \quad |x| \leqslant M \Rightarrow -M \leqslant x \leqslant M \Rightarrow E \text{ ограничено сверху и снизу.}$$

Определение 3.1 (Ограниченное множество, ограниченная функция на множестве)**.** *Множество $E \subset \mathbb{C}, \mathbb{R}^n$ называется ограниченным, если $\exists M \in \mathbb{R}\colon \forall x \in E \quad |x| \leqslant M$ (согласовано с ограниченностью в $\mathbb{R}$).*

Функция со значениями в $\mathbb{R}$, комплекснозначная, вектор-функция называется ограниченной на множестве $A \subset dom\, f$, если множество её значений на множестве A (т. е. $f(A)$) ограничено. Это означает, что $\exists M \in \mathbb{R}\colon \forall x \in A \quad |f(x)| \leqslant M$. Функция f называется ограниченной, если f ограничена на $dom\, f$.

Примеры. $\sin, \cos$ — ограниченные функции ($M = 1$). Функция $f(x) = x$ — ограничена на конечных промежутках и не ограничена на $\mathbb{R}$.

Теорема 3.1 (Оценки функции, имеющей предел).
Пусть f — отображение со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, $\overline{\mathbb{C}}$ или $\mathbb{R}^n$, $\mathfrak{A}$ — база множеств.

1) Если существует конечный $\lim_{\mathfrak{A}} f$, то $\exists A \in \mathfrak{A}\colon f$ — ограничена на A.

2) Если $\mathrm{im}\, f \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = b$, $\quad b > p$, то $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > p$. Аналогично, если $b < p$, то $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) < p$.

3) Если существует $\lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0$ (конечный или $\pm\infty$) или f — бесконечно большая, то $\exists M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f(x)| > M$ (f "отделена от нуля" на множестве A).

Доказательство. 1) $\lim_{\mathfrak{A}} f = b$ (конечный)$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f(x) - b| < \varepsilon$. Тогда по свойствам длины вектора $|f(x)| = |b + (f(x) - b)| \leqslant |b| + |f(x) - b| < |b| + \varepsilon$, т. е. утверждение 1 выполнено для множества A и $M = |b| + \varepsilon$.

2) $\lim_{\mathfrak{A}} f = b \in \overline{\mathbb{R}}$, $b > p$. Есть такие возможности: а) b, p — конечны. б) b — конечно, $p = -\infty$. в) $b = +\infty$, p — конечно. г) $b = +\infty$, $p = -\infty$.

а) Положим $\varepsilon = b - p$. Поскольку $\lim_{\mathfrak{A}} f = b$, по определению конечного предела, для этого $\varepsilon > 0$

$$\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) \in B(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon; b + \varepsilon) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > b - \varepsilon = p.$$

б) По определению конечного предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) \in B(b, \varepsilon) = (b-\varepsilon; b+\varepsilon) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > b - \varepsilon > -\infty = p.$$

в) По определению $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty$ (см. определения предела на языке неравенств)

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > p.$$

г) Поскольку $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty$,

$$\forall p_1 \in \mathbb{R}\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > p_1 > -\infty = p.$$

Случай, когда $\lim_{\mathfrak{A}} f < p$ — аналогично (соответственно, а) b, p — конечны. б) b — конечно, $p = +\infty$. в) $b = -\infty$, p — конечно. г) $b = -\infty$, $p = +\infty$ и в случае а) $\varepsilon = p - b > 0$).

3) $\lim_{\mathfrak{A}} f = b \neq \mathbb{O}$.

а) b — конечно, $b \neq \mathbb{O} \Rightarrow |b| > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0$.

$$\text{Для этого } \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f(x) - b| < \frac{|b|}{2}.$$

По свойствам длины вектора

$$\forall x \in A \quad |f(x)| = |b + (f(x) - b)| \geqslant |b| - |f(x) - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2},$$

$$\text{т. е. } \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f(x)| > M = \frac{|b|}{2}.$$

б) $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall M > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > M > 0 \Rightarrow |f(x)| = f(x) > M$.

в) $\lim_{\mathfrak{A}} f = -\infty \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \forall M > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) < -M \Rightarrow |f(x)| = -f(x) > M$.

г) f — бесконечно большая, тогда по определению

$$\forall M > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f(x)| > M.$$

Следствие 1. Стабилизация знака функции.
Если $\lim_{\mathfrak{A}} f > 0$, то $\exists M > 0$, $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > M > 0$
и если $\lim_{\mathfrak{A}} f < 0$, то $\exists M < 0$, $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) < M < 0$.

Доказательство. Очевидно, существует $M \in \mathbb{R}\colon 0 < M < \lim_{\mathfrak{A}} f$ или, соответственно, $\lim_{\mathfrak{A}} f < M < 0$ (независимо, конечный предел или бесконечный), далее применяем п. 2 теоремы.

Следствие 2. *Если последовательность с конечными значениями имеет конечный предел, то она ограничена ("в целом").*

Доказательство. По п. 1 теоремы для последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\exists M \in \mathbb{R}$, $A \in \{A_N \colon N \in \mathbb{R}\}\colon \forall n \in A \quad |x_n| \leqslant M$. В примере 5 после определения 2.1 (примеры баз множеств) было доказано, что множество A из базы $\{A_N \colon N \in \mathbb{R}\}$ имеет вид $A = \{n_0, n_0{+}1, \ldots\}$, где $n_0 \in \mathbb{N}$. Если $n_0 = 1$, то всё доказано ($\forall n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leqslant M$). Если $n_0 > 1$, то номеров $n < n_0$ — конечное число. Обозначим $M_1 = \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|, M\}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}\ |x_n| \leqslant M_1$ (если $n \geqslant n_0$, то $|x_n| \leqslant M \leqslant M_1$, а если $n \leqslant n_0 - 1$, то $|x_n|$ — одно из $|x_1|, \ldots, |x_{n_0-1}|$, т. е. и в этом случае $|x_n| \leqslant M_1$).

Следствие 3. *Если* $\lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$, *то* $\exists M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > M$ *(т. е. f ограничена снизу на множестве A) и если* $\lim_{\mathfrak{A}} f < +\infty$, *то* $\exists M \in \mathbb{R}$, $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) < M$ *(т. е. f ограничена сверху на множестве A).*

Доказательство. $\lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$ (т. е. конечен или $+\infty$) $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}\colon -\infty < M < \lim_{\mathfrak{A}} f \quad (M = 0$, если $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty)$. Тогда по п. 2 теоремы $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > M$. 2-е утверждение — аналогично ($\exists M \in \mathbb{R}\colon \lim_{\mathfrak{A}} f < M < +\infty$).

Определение 3.2 (Бесконечно малые)**.** *Пусть f — функция, комплекснозначная функция или вектор-функция, $\mathfrak{A}$ — база множеств. f называется бесконечно малой по базе $\mathfrak{A}$, если $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0$ (то есть $\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f(x)| < \varepsilon$).*

Замечание. (тривиальное, но важное для дальнейшего).
Для того, чтобы f имела *конечный* предел b, необходимо и достаточно, чтобы $f - b$ или $|f - b|$ были бесконечно малыми (следует из определения конечного предела в $\mathbb{R}^n$).

Лемма 3.2 (Свойства бесконечно малых)**.**

1) Если $f_1, \ldots, f_m$ — бесконечно малые по базе $\mathfrak{A}$ (и принимают значения в одном и том же пространстве), то $f_1 + \ldots + f_m$ — тоже бесконечно малая по базе $\mathfrak{A}$.

2) Если f — бесконечно малая по базе $\mathfrak{A}$, g — ограничена на некотором множестве $A \in \mathfrak{A}$ и произведение $f \cdot g$ определено (f и g — вещественные или комплексные функции или одна вещественная и другая — вектор-функция), то $f \cdot g$ — бесконечно малая по базе $\mathfrak{A}$.

Доказательство. 1) $\varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{m} > 0$.

$$\forall k = 1, \ldots, m \ \lim_{\mathfrak{A}} f_k = \mathbb{O} \Rightarrow \ \text{для } \frac{\varepsilon}{m} > 0\ \exists A_k \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_k \quad |f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{m}.$$

По замечанию 2 к определению базы (определение 2.1), $\exists A \in \mathfrak{A}\colon A \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} A_k$. Тогда для

$$\forall x \in A \Rightarrow \forall k = 1, \ldots, m \quad x \in A_k \Rightarrow |f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{m} \Rightarrow$$
$$|f_1(x) + \ldots + f_m(x)| \leqslant |f_1(x)| + \ldots + |f_m(x)| < \underbrace{\frac{\varepsilon}{m} + \ldots + \frac{\varepsilon}{m}}_{m \text{ слагаемых}} = \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |(f_1 + \ldots + f_m)(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$f_1 + \ldots + f_m \text{ — бесконечно малая по базе } \mathfrak{A}.$$

2) g ограничена на множестве $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \exists M > 0\colon \forall x \in A \quad |f(x)| \leqslant M$. Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{\varepsilon}{M} > 0$.

$$f \text{ — бесконечно малая по базе } \mathfrak{A} \Rightarrow \text{для } \frac{\varepsilon}{M} > 0 \ \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

По определению базы 2.1 $\exists C \in \mathfrak{A}\colon C \subset A \cap B$. Тогда

$$\forall x \in C \Rightarrow x \in A \text{ и } x \in B \Rightarrow |g(x)| \leqslant M \text{ и } |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow$$
$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists C \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in C \quad |f(x)g(x)| < \varepsilon \Rightarrow f \cdot g \text{ — бесконечно малая по базе } \mathfrak{A}.$$

Лемма 3.3 (Об изменении знака).
Пусть f — функция (вещественная, комплексные) или вектор-функция.

1) (для вещественных функций) $\forall x \in A \quad f(x) \geqslant M \Leftrightarrow \forall x \in A \quad -f(x) \leqslant -M$;
$\forall x \in A \quad f(x) \leqslant M \Leftrightarrow \forall x \in A \quad -f(x) \geqslant -M$;

2) $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a$ *(конечный)* $\Leftrightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = -a$;

3) (для вещественных функций) $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Leftrightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = -\infty$;
$\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = -\infty \Leftrightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = +\infty$.

Доказательство. 1) Очевидно, следует из правил действий с неравенствами при изменении знака.

2) По правилам действий с абсолютной величиной вещественных чисел, модулем комплексных чисел или умножением числа на вектор $|f(x) - a| = |(-1)(-f(x) + a)| = |-1| \cdot |(-f)(x) - (-a)| = |(-f)(x) - (-a)|$. Тогда по определению конечного предела

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |(-f)(x) - (-a)| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = -a.$$

3) По определению бесконечного предела 2.3

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{R} \ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > p \Leftrightarrow$$
$$\forall (-p) \in \mathbb{R} \ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad (-f)(x) < -p \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = -\infty.$$

2-е утверждение п. 3 — аналогично.

Теорема 3.2 (Предел суммы).
Пусть f, g — функции (вещественные, комплексные) или вектор-функции со значениями в одном и том же пространстве, $\mathfrak{A}$ — база множеств.

1) Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a, \quad \lim_{\mathfrak{A}} g = b$ (оба конечны), то $\exists \lim_{\mathfrak{A}}(f + g) = a + b$.

2) Если f, g — вещественные функции, f ограничена снизу на множестве $A \in \mathfrak{A}$ (в частности, если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$) и $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}}(f + g) = +\infty$.

3) Если f, g — вещественные функции, f ограничена сверху на множестве $A \in \mathfrak{A}$ (в частности, если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f < +\infty$) и $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}}(f + g) = -\infty$.

Доказательство. 1) Обозначим $\alpha(x) = f(x) - a$, $\beta(x) = g(x) - b$. По замечанию к определению бесконечно малых, α и β — бесконечно малые по базе $\mathfrak{A}$. $(f + g) - (a + b) = (f - a) + (g - b) = \alpha + \beta$ — бесконечно малая по базе $\mathfrak{A}$ (по лемме о бесконечно малых). Снова по замечанию к определению бесконечно малых, $\exists \lim_{\mathfrak{A}}(f + g) = a + b$.

2) Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$, то по следствию 3 из теоремы 3.1 об оценках функции, имеющей предел, $\exists M \in \mathbb{R},\ A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > M$, т. е. f ограничена снизу на множестве A. Итак, в условиях п. 2 $\exists M \in \mathbb{R},\ A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > M$. Рассмотрим $\forall p \in \mathbb{R} \Rightarrow p - M \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty \Rightarrow \text{для } p - M \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad g(x) > p - M.$$

По определению базы, $\exists C \in \mathfrak{A}\colon C \subset A \cap B$. Тогда

$$\forall x \in C \Rightarrow x \in A \text{ и } x \in B \Rightarrow f(x) > M \text{ и } g(x) > p - M \Rightarrow f(x) + g(x) > M + p - M = p.$$

Получили:

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists C \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in C\colon f(x) + g(x) > p \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} (f + g) = +\infty.$$

3) Если f ограничена сверху на $A \in \mathfrak{A}$, то $-f$ ограничена снизу на том же множестве (лемма об изменении знака) и если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f < +\infty$, то по той же лемме $\exists \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = -\lim_{\mathfrak{A}} f > -\infty$ и по п.2 $-f$ ограничена снизу на некотором $A \in \mathfrak{A}$. $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}}(-g) = +\infty$ (по лемме). Получили: функции $-f$ и $-g$ удовлетворяют условиям п. 2. По уже доказанному, $\exists \lim_{\mathfrak{A}}(-f - g) = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}}(f + g) = -\infty$ (лемма).

Замечание. По результату в этой теореме можно естественно определить некоторые операции с бесконечностями: положим по определению

для $a \in \mathbb{R} \quad a + (+\infty) = +\infty$; $a + (-\infty) = -\infty$; $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$; $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

Символу $(+\infty) + (-\infty)$ нельзя придать разумный смысл, что видно из следующих примеров:

1) $f(x) = x + a, \quad g(x) = -x$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (по теореме, п. 2), $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ (по лемме об изменении знака) и $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = a$.

2) $f(x) = 2x, \quad g(x) = -x$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \ (\forall p \in \mathbb{R}\ \exists q = \frac{p}{2}\colon \forall x > q \quad f(x) > p), \ \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

и $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

3) $f(x) = x, \quad g(x) = -2x$. Тогда аналогично п. 2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \ (\forall p \in \mathbb{R}\ \exists q = \frac{p}{2}\colon \forall x < q \quad g(x) < p)$$

и $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x) = -\infty$.

4) $f(x) = x + \sin x, \quad g(x) = -x$. Тогда

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (по п. 2 теоремы, поскольку $\sin$ ограничен снизу), $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$

и $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ — не существует (пример после теоремы 2.8 о равносильности двух определений предела в точке).

Таким образом, если $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty$, то о $\lim_{\mathfrak{A}}(f + g)$ ничего сказать нельзя. В этом случае говорят, что имеет место "неопределённость типа $\infty - \infty$" и теорема о пределе суммы не применима. В итоге результат теоремы о пределе суммы коротко можно сформулировать так: если существуют $\lim_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g$ и $\lim_{\mathfrak{A}} f + \lim_{\mathfrak{A}} g$ имеет смысл, то существует $\lim_{\mathfrak{A}}(f + g) = \lim_{\mathfrak{A}} f + \lim_{\mathfrak{A}} g$. По индукции этот результат легко распространяется на любое конечное (фиксированное) число слагаемых (упражнение).

Следствие (Предел разности).
Если существуют $\lim_{\mathfrak{A}} f$ *и* $\lim_{\mathfrak{A}} g$ *и* $\lim_{\mathfrak{A}} f - \lim_{\mathfrak{A}} g$ *имеет смысл, то существует* $\lim_{\mathfrak{A}}(f-g) = \lim_{\mathfrak{A}} f - \lim_{\mathfrak{A}} g$.

(используется $f - g = f + (-g)$ и лемма об изменении знака).

Определение 3.3 (Билинейное отображение).
Отображение $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *называется билинейным, если*
1) для $\forall x, y \in \mathbb{R}^m,\ z \in \mathbb{R}^n \quad F(x+y,z) = F(x,z) + F(y,z)$.
2) для $\forall x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R} \quad F(\alpha x, y) = \alpha F(x,y)$.
3) для $\forall x \in \mathbb{R}^m,\ y, z \in \mathbb{R}^n \quad F(x, y+z) = F(x,y) + F(x,z)$.
4) для $\forall x \in \mathbb{R}^m,\ y \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R} \quad F(x, \alpha y) = \alpha F(x,y)$.

Лемма 3.4. *Если* $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *— билинейное отображение, то* $\exists C \geqslant 0\colon \forall x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n \quad |F(x,y)| \leqslant C \cdot |x| \cdot |y|$.

Доказательство. По индукции легко доказываются следующие обобщения свойств 1 и 3:
$$F\Big(\sum_{k=1}^{l} x_k, y\Big) = \sum_{k=1}^{l} F(x_k, y), \quad F\Big(x, \sum_{k=1}^{l} y_k\Big) = \sum_{k=1}^{l} F(x, y_k).$$
Обозначим $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^m$ (1 — на i-м месте), $\ i = 1, \ldots, m$. Тогда $x = (x_1, \ldots, x_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} x_i e_i$. Аналогично, если $e'_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ (1 — на j-м месте), $\ j = 1, \ldots, n$, то $y = (y_1, \ldots, y_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e'_j$. По обобщениям свойств 1 и 3:
$$F(x,y) = F\Big(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e'_j\Big) = \sum_{i=1}^{m} F\Big(x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e'_j\Big) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} F(x_i e_i, y_j e'_j).$$
По свойствам 2 и 4 $F(x_i e_i, y_j e'_j) = x_i y_j F(e_i, e'_j)$. По свойствам длины вектора
$$|F(x,y)| = \Big|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j F(e_i, e'_j)\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |x_i y_j F(e_i, e'_j)| =$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |x_i| \cdot |y_j| \cdot |F(e_i, e'_j)| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |x| \cdot |y| \cdot |F(e_i, e'_j)| = \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |F(e_i, e'_j)|\Big)|x| \cdot |y|.$$
Лемма доказана ($C = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} |F(e_i, e'_j)|$ — не зависит от x и y). Для конкретных билинейных отображений константа C может быть меньше.

Примеры. 1) $x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ F(x,y) = xy$. Свойства 1 — 4 следуют из дистрибутивного закона и ассоциативного и коммутативного законов умножения вещественных чисел. $|xy| = |x||y|, \quad C = 1$.

2) $x, y \in \mathbb{R}^n,\ F(x,y) = \langle x, y\rangle$ (скалярное произведение векторов). Свойства 1 — 4 доказываются во вводной главе. $|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|$ (следствие неравенства Коши), т. е. здесь $C = 1$.

3) $x, y \in \mathbb{R}^3,\ F(x,y) = x \times y \in \mathbb{R}^3$ (векторное произведение). Свойства 1 — 4 — в курсе геометрии (или из представления $x \times y$ в виде определителя). Как известно, $|x \times y| = |x||y| \sin\theta$, где θ — угол между векторами x и y, поэтому и здесь $C = 1$.

4) $\alpha \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n,\ F(\alpha, x) = \alpha x$ (умножение числа на вектор). Свойства 1 — 4 — по свойствам операций сложения векторов и умножения на числа в векторном пространстве $\mathbb{R}^n$. Длина $|\alpha x| = |\alpha||x|$, т. е. $C = 1$.

5) $x, y \in \mathbb{C},\ F(x, y) = x \cdot y$ (произведение комплексных чисел). Свойства 1 — 4 — из свойств операций над комплексными числами, которые образуют поле. Отображение F рассматриваем как билинейное отображение из $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$. По свойствам модуля $|xy| = |x||y|$, $C = 1$.

Теорема 3.3 (Предел билинейного отображения)**.**
Пусть $f\colon X_1 \to \mathbb{R}^m,\ g\colon X_2 \to \mathbb{R}^n,\ \mathfrak{A}$ *— база множеств,* $F\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *— билинейное отображение. Если существуют* $\lim_{\mathfrak{A}} f = a$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = b$ *(оба конечны), то существует* $\lim_{\mathfrak{A}} F\big(f(x), g(x)\big) = F(a, b)$.

Доказательство. По свойствам 1 и 3 билинейного отображения

$$F\big(f(x), g(x)\big) = F\big(f(x) - a + a, g(x)\big) = F\big(f(x) - a, g(x)\big) + F\big(a, g(x)\big) =$$
$$= F\big(f(x) - a, g(x)\big) + F\big(a, g(x) - b + b\big) = F\big(f(x) - a, g(x)\big) + +F\big(a, g(x) - b\big) + F(a, b).$$

По свойствам длины вектора и лемме 3.4 о билинейном отображении

$$\begin{aligned} |F\big(f(x), g(x)\big) - F(a, b)| &= |F\big(f(x) - a, g(x)\big) + F\big(a, g(x) - b\big)| \leqslant \\ &\leqslant C|f(x) - a| \cdot |g(x)| + C|a| \cdot |g(x) - b|. \end{aligned} \tag{$*$}$$

$\lim_{\mathfrak{A}} f = a$ (конечный)$\Rightarrow |f(x) - a|$ — бесконечно малая (замечание к определению бесконечно малых). $\lim_{\mathfrak{A}} g = b$ (конечный)$\Rightarrow g(x)$ ограничена на некотором $A \in \mathfrak{A}$ по теореме 3.1 об оценках функции, имеющей предел (очевидно, то же верно для функции $C \cdot |g(x)|$). $\lim_{\mathfrak{A}} g = b$ (конечный)$\Rightarrow |g(x) - b|$ — бесконечно малая (замечание к определению бесконечно малых), $C \cdot |a|$ =const. — ограниченная функция. Тогда по лемме 3.2 о свойствах бесконечно малых

$$C|f(x) - a| \cdot |g(x)| + C|a| \cdot |g(x) - b| \text{ — бесконечно малая. Это означает}$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad C|f(x) - a| \cdot |g(x)| + C|a| \cdot |g(x) - b| < \varepsilon.$$

По неравенству (*) тогда для тех же $x \in B$ $|F\big(f(x), g(x)\big) - F(a, b)| < \varepsilon$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad |F\big(f(x), g(x)\big) - F(a, b)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} F\big(f(x), g(x)\big) = F(a, b).$$

Теорема 3.4 (Предел произведения)**.** *Пусть* $f,\ g$ *— вещественные или комплексные функции,* $\mathfrak{A}$ *— база множеств.*

1) Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a, \quad \lim_{\mathfrak{A}} g = b$ *(оба конечны), то* $\exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = ab$.

2) Пусть $f,\ g$ *— вещественные функции. Если*

$$\exists A \in \mathfrak{A},\ M > 0\colon \forall x \in A \quad f(x) \geqslant M > 0 \text{ или } \exists A \in \mathfrak{A},\ M < 0\colon \forall x \in A \quad f(x) \leqslant M < 0$$

(в частности, если существует $\lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0$*) и* $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = \pm\infty$*, то* $\exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = \pm\infty$ *(по правилу знаков).*

Доказательство. 1) — это частные случаи теоремы о пределе билинейного отображения (примеры 1 и 5).

2) Если $\lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0$, то либо $\lim_{\mathfrak{A}} f > 0$, либо $\lim_{\mathfrak{A}} f < 0$. По следствию 1 из теоремы 3.1 об оценках (стабилизация знака) в первом случае $\exists A \in \mathfrak{A},\ M > 0\colon \forall x \in A \quad f(x) > M > 0$, во втором случае $\exists A \in \mathfrak{A},\ M < 0\colon \forall x \in A \quad f(x) < M < 0$, т. е. выполнены условия утверждения 2.

Пусть $f(x) \geqslant M > 0$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty$. Рассмотрим $\forall p \in \mathbb{R}$, тогда $\frac{|p|+1}{M} > 0$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty \Rightarrow \text{для } \frac{|p|+1}{M} \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad g(x) > \frac{|p|+1}{M} > 0.$$

По определению базы, $\exists C \in \mathfrak{A}\colon C \subset A \cap B$. Рассмотрим $\forall x \in C$.

$$x \in C \Rightarrow x \in A \text{ и } x \in B \Rightarrow f(x) \geqslant M > 0 \text{ и } g(x) > \frac{|p|+1}{M} > 0 \Rightarrow f(x)g(x) > |p| + 1 > p.$$

Получили:

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists C \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in C \quad f(x)g(x) > p \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = +\infty.$$

Если на множестве $A \quad f(x) \leqslant M < 0$, то $(-f)(x) \geqslant (-M) > 0$. Если $\lim_{\mathfrak{A}} g = +\infty$, то по доказанному

$$\exists \lim_{\mathfrak{A}} (-f)g = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = -\infty \text{ по лемме 3.3 об изменении знака.}$$

Если на множестве $A \quad f(x) \leqslant M < 0$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty$, то по лемме об изменении знака $\lim_{\mathfrak{A}}(-g) = +\infty$ и по доказанному

$$\exists \lim_{\mathfrak{A}} (-f)(-g) = +\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} fg = +\infty.$$

Случай $f(x) \geqslant M > 0$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = -\infty$ — аналогично.

В соответствии с этой теоремой можно определить некоторые операции с $\pm\infty$: если $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, то $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, а если $a < 0$, то $a \cdot (+\infty) = -\infty$, $a \cdot (-\infty) = +\infty$; $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ (знак произведения определяется по правилу знаков).

Замечание. Символам $0 \cdot (\pm\infty)$ нельзя придать разумный смысл, что видно из следующих примеров:

1) $f(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$ (по примеру 4 после определения бесконечно больших (2.8) и теореме, п. 1) и $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (теорема, п. 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

3) $f(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = 1$.

4) $f(x) = x \cdot (2 + \sin x), \quad g(x) = \frac{1}{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ (по п. 2 теоремы, поскольку } 2 + \sin x \geqslant 1 > 0, \ \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

и $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2 + \sin x)$ — не существует (пример после теоремы 2.8 о равносильности двух определений предела в точке).

Таким образом, если $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g = 0$, то о $\lim_{\mathfrak{A}}(f \cdot g)$ ничего сказать нельзя. В этом случае говорят, что имеет место "неопределённость типа $\infty \cdot 0$" и теорема о пределе произведения не применима. В итоге результат теоремы о пределе произведения коротко можно сформулировать так: если существуют $\lim_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g$ и $\lim_{\mathfrak{A}} f \cdot \lim_{\mathfrak{A}} g$ имеет смысл, то существует $\lim_{\mathfrak{A}}(f \cdot g) = \lim_{\mathfrak{A}} f \cdot \lim_{\mathfrak{A}} g$. По индукции этот результат легко распространяется на любое конечное (фиксированное) число сомножителей (упражнение).

Определение 3.4. *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R}$, $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0$. *Если существует* $A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A$ $f(x) \geqslant 0$, *то пишем* $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0+$. *Если существует* $A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) \leqslant 0$, *то пишем* $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0-$.

Очевидно, $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0+ \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = 0-$.

Лемма 3.5. *Пусть* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *или* $\mathbb{C}$, $\mathfrak{A}$ *— база множеств.*

1) Если $\lim_{\mathfrak{A}} f = b \neq 0$, *(b — конечно), то* $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = \frac{1}{b}$;

2) Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ *и* $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) \neq 0$.

$$\text{Если } \lim_{\mathfrak{A}} f = 0+, \text{ то } \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = +\infty, \text{ а если } \lim_{\mathfrak{A}} f = 0-, \text{ то } \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = -\infty.$$

3) Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$. *Если* $\lim_{\mathfrak{A}} f = \pm\infty$, *то* $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = 0\pm$.

Доказательство. 1) $\lim_{\mathfrak{A}} f = b$, ($b$ — конечно) $\Rightarrow f - b$ — бесконечно малая (замечание к определению 3.2 бесконечно малых).

$$b \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f} - \frac{1}{b} = \frac{b-f}{bf} = -\frac{1}{bf}(f-b);$$
$$\lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0 \Rightarrow \exists M > 0,\ B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad |f(x)| > M \text{ (теорема 3.1 об оценках, п. 3).}$$

Тогда

$$\forall x \in B \Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ и } \left| -\frac{1}{b \cdot f(x)} \right| = \frac{1}{|b|} \cdot \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{|b| \cdot M},$$
$$\text{т. е. } -\frac{1}{bf} \text{ ограничена на } B,\quad f-b \text{ бесконечно малая по базе } \mathfrak{A}.$$

Тогда по лемме 3.2 о свойствах бесконечно малых

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{bf}(f-b) \text{ — бесконечно малая по базе } \mathfrak{A} \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = \frac{1}{b}.$$

2) Рассмотрим $\forall p \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{|p|+1} > 0$. По условию $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0+$, т. е.

$$\text{для } \frac{1}{|p|+1} > 0\ \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad |f(x)| < \frac{1}{|p|+1} \text{ и } \exists C \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in C \quad f(x) \geqslant 0.$$

По замечанию 2 к определению базы, $\exists D \in \mathfrak{A}\colon D \subset A \cap B \cap C$. Тогда для $\forall x \in D$

$$x \in A \text{ и } x \in B \text{ и } x \in C \Rightarrow f(x) \neq 0 \text{ и } |f(x)| < \frac{1}{|p|+1} \text{ и } f(x) \geqslant 0$$
$$\Rightarrow 0 < f(x) < \frac{1}{|p|+1} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > |p| + 1 > p.$$

Получили:

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists D \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in D \quad \frac{1}{f(x)} > p \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = +\infty.$$

Если $\lim_{\mathfrak{A}} f = 0-$, то $\lim_{\mathfrak{A}}(-f) = 0+$ (по замечанию к определению 3.4). Тогда по доказанному $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{-f} = +\infty \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = -\infty$ (по лемме 3.3 об изменении знака).

3) Рассмотрим $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} > 0$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Rightarrow \text{для } \frac{1}{\varepsilon}\ \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad f(x) > \frac{1}{\varepsilon} > 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{f(x)} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = 0.$$

При этом $\forall x \in B \quad \frac{1}{f(x)} > 0 \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = 0+$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = -\infty \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}}(-f) = +\infty \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{-f} = 0+ \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{f} = 0-$$

(применяем лемму об изменении знака и замечание к определению 3.4).

Теорема 3.5 (Предел частного).

1) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, $\mathfrak{A}$ — база множеств. Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = b \neq 0$ (оба конечны), то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \frac{a}{b}$.

2) Пусть f, g — вещественные функции. Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = \pm\infty$, $\lim_{\mathfrak{A}} g = b \neq 0$ (конечно), то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \pm\infty$ (по правилу знаков пределов функций f и g).

3) Пусть f, g — вещественные функции. Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a$ (конечно), $\lim_{\mathfrak{A}} g = \pm\infty$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = 0$.

4) Пусть f, g — вещественные функции. Если $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f \neq 0$ (конечный или $\pm\infty$), $\lim_{\mathfrak{A}} g = 0\pm$ и $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) \neq 0$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \pm\infty$ (по правилу знаков пределов функций f и g).

Доказательство. 1) По лемме 3.5 п.1 $\exists \lim \frac{1}{g} = \frac{1}{b}$. Тогда по теореме 3.4 о пределе произведения, п.1 $\exists \lim \frac{f}{g} = \lim \left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

2) По лемме 3.5 п.1 $\exists \lim \frac{1}{g} = \frac{1}{b}$. Тогда по теореме 3.4 о пределе произведения, п.2 $\exists \lim \frac{f}{g} = \lim \left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = \pm\infty$ (по правилу знаков пределов функций f и g).

3) По лемме 3.5 п.3 $\exists \lim \frac{1}{g} = 0$. Тогда по теореме 3.4 о пределе произведения, п.1 $\exists \lim \frac{f}{g} = \lim \left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = a \cdot 0 = 0$.

4) По лемме 3.5 п.2 $\exists \lim \frac{1}{g} = \pm\infty$. Тогда по теореме 3.4 о пределе произведения, п.2 $\exists \lim \frac{f}{g} = \lim \left(f \cdot \frac{1}{g}\right) = \pm\infty$. (по правилу знаков пределов функций f и g).

Замечание. В соответствии с этой теоремой можно определить:

$$\text{при } b \neq 0 \text{ (конечном) } \frac{\pm\infty}{b} = \pm\infty \text{ по правилу знаков, при } a \text{ — конечном } \frac{a}{\pm\infty} = 0,$$
$$\text{при } a \neq 0 \text{ (конечном или } \pm\infty) \ \frac{a}{0\pm} = \pm\infty \text{ по правилу знаков.}$$

Символам $\frac{0}{0}$ и $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ нельзя придать разумный смысл.

Пример. $f(x) = x(2 + \sin x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (теорема о пределе произведения, п.2), $g(x) = x$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, но $\frac{f(x)}{g(x)} = 2 + \sin x$ — не имеет предела в $+\infty$. Остальные примеры получаются аналогично из примеров после теоремы о пределе произведения (случаи неопределённости $0 \cdot \infty$), $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$. В этих случаях говорят, что имеют место "неопределённости в частном" типов $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ и теорема о пределе частного не применима. После определения операций с бесконечностями в частном и с нулём в знаменателе теорему о пределе частного можно коротко сформулировать так: если существуют $\lim_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\mathfrak{A}} g$ и отношение пределов имеет смысл, то существует $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{\mathfrak{A}} f}{\lim_{\mathfrak{A}} g}$.

Определение 3.5 (Арифметические операции над функциями с разными областями определения)**.**

1) Пусть f, g — вещественные, комплексные или вектор-функции со значениями в одном и том же пространстве. Суммой функций f и g называется функция, обозначаемая $f+g$ с областью определения

$$dom(f+g) = dom\, f \cap dom\, g \text{ и } \forall x \in dom(f+g) \quad (f+g)(x) = f(x)+g(x).$$

Разностью функций f и g называется функция, обозначаемая $f-g$ с областью определения

$$dom(f-g) = dom\, f \cap dom\, g \text{ и } \forall x \in dom(f-g) \quad (f-g)(x) = f(x)-g(x).$$

2) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или одна вещественная, а другая — вектор-функция. Произведением функций f и g называется функция, обозначаемая $f \cdot g$ с областью определения

$$dom(f\cdot g) = dom\, f \cap dom\, g \text{ и } \forall x \in dom(f\cdot g) \quad (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x).$$

3) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или f — вектор-функция, а g — вещественная. Частным функций f и g называется функция, обозначаемая $\frac{f}{g}$ с областью определения

$$dom\left(\frac{f}{g}\right) = \{x \in dom\, f \cap dom\, g\colon g(x) \neq 0\} \text{ и } \forall x \in dom\left(\frac{f}{g}\right) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Если $f_1, \ldots, f_m$ — функции со значениями в одном и том же пространстве, то

$$dom(f_1+\ldots+f_m) = \bigcap_{k=1}^{m} dom\, f_k, \ \forall x \in dom(f_1+\ldots+f_m) \quad (f_1+\ldots+f_m)(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x).$$

Если $f_1, \ldots, f_m$ — вещественные или комплексные функции, то

$$dom(f_1\cdot\ldots\cdot f_m) = \bigcap_{k=1}^{m} dom\, f_k, \ \forall x \in dom(f_1\cdot\ldots\cdot f_m) \quad (f_1\cdot\ldots\cdot f_m)(x) = \prod_{k=1}^{m} f_k(x).$$

Теорема 3.6 (Арифметические действия над функциями, имеющими предел в точке)**.** *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, f, g — вещественные, комплексные или вектор-функции, $dom\, f$, $dom\, g \subset X$.*

1) Пусть f, g — со значениями в одном и том же пространстве. Если

$$\exists \lim_{x\to a} f(x), \ \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_a f + \lim_a g \text{ имеет смысл и } a \text{ — предельная точка } \mathrm{dom}(f+g),$$

то $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (аналогично для $f-g$).

2) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или одна вещественная, а другая — вектор-функция. Если

$$\exists \lim_{x\to a} f(x), \ \lim_{x\to a} g(x), \quad \lim_a f \cdot \lim_a g \text{ имеет смысл и } a \text{ — предельная точка } \mathrm{dom}(f\cdot g),$$

то $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

3) Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или f — вектор-функция, а g — вещественная. Если

$$\exists \lim_{x\to a} f(x), \ \lim_{x\to a} g(x), \quad \frac{\lim_a f}{\lim_a g} \text{ имеет смысл и } a \text{ — предельная точка } dom\left(\frac{f}{g}\right),$$

то $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

4) (Дополнение к лемме о бесконечно малых). Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, или одна вещественная, а другая — вектор-функция. Если f — бесконечно малая в точке a, g — ограничена на некотором множестве $\dot{B}(a,\delta)\cap\mathrm{dom}\, g$ и a — предельная точка $\mathrm{dom}(f\cdot g)$, то $f\cdot g$ — бесконечно малая в точке a.

Комментарий для лектора: стоит заметить, что в этой теореме пределы для функций f и g — по **разным** базам, поэтому предыдущие теоремы об арифметических действиях непосредственно не применимы и приходится накладывать дополнительное условие о предельной точке. Кстати, на практических занятиях обычно имеем дело с функциями с **разными областями определения**, а в лекциях для простоты изложения обычно предполагают, что область определения одна и та же.

Доказательство. 3) Поскольку a — предельная точка $\mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right)$, рассмотрим

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\colon \forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in \mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right),\ x_n\neq a,\ x_n\to a.$$

Поскольку $\mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right)\subset \mathrm{dom}\, f$, $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in\mathrm{dom}\, f,\ x_n\neq a,\ x_n\to a$. По теореме 2.8 о равносильности двух определений предела, $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \Rightarrow f(x_n)\to \lim\limits_{x\to a} f(x)$. Аналогично, $\mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right)\subset\mathrm{dom}\, g \Rightarrow g(x_n)\to\lim\limits_{x\to a} g(x)$. $\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in\mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right)\Rightarrow g(x_n)\neq 0$.

По условию $\frac{\lim_a f}{\lim_a g} = \frac{\lim f(x_n)}{\lim g(x_n)}$ имеет смысл, а тогда по теореме о пределе частного для последовательностей $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\to\frac{\lim_a f}{\lim_a g}$. Получили:

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\colon \forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in\mathrm{dom}\left(\frac{f}{g}\right),\ x_n\neq a,\ x_n\to a\quad \left(\frac{f}{g}\right)(x_n)\to\frac{\lim_a f}{\lim_a g}.$$

Снова по теореме о равносильности двух определений предела отсюда следует, что $\exists \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Доказательство пунктов 1 и 2 для $f\pm g$ и $f\cdot g$ — аналогично. Используется то, что $\mathrm{dom}(f\pm g)$ и $\mathrm{dom}(f\cdot g)$ содержатся в $\mathrm{dom}\, f$ и $\mathrm{dom}\, g$.

4) Рассмотрим $\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\colon\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in\mathrm{dom}(fg),\ x_n\neq a,\ x_n\to a\Rightarrow x_n\in\mathrm{dom}\, f$. f — бесконечно малая в точке $a\Rightarrow \lim_a f = 0\Rightarrow f(x_n)\to 0$ (по равносильности двух определений предела), т. е. $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая. По условию п.4

$$|g(x)|\leqslant M \text{ на } \dot{B}(a,\delta)\cap\mathrm{dom}\, g.\quad \forall n\in\mathbb{N}\, x_n\in\mathrm{dom}(fg)\subset\mathrm{dom}\, g\Rightarrow \text{ определена } \{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}.$$
$$x_n\to a\Rightarrow \text{ для } \delta>0\ \exists N\in\mathbb{N}\colon\forall n>N\quad x_n\in B(a,\delta),\ x_n\in\mathrm{dom}\, g,\ x_n\neq a\Rightarrow$$
$$\forall n>N\quad x_n\in\dot{B}(a,\delta)\cap\mathrm{dom}\, g\Rightarrow\forall n>N\quad |g(x_n)|\leqslant M.$$

Получили:

$\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая , $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — ограничена при $n>N\Rightarrow$ по лемме о бесконечно малых $\{f(x_n)\cdot g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ — бесконечно малая, т. е. $f(x_n)\cdot g(x_n)\to 0$.

Таким образом, по теореме о равносильности двух определений предела

$$\forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\colon\forall n\in\mathbb{N}\ x_n\in\mathrm{dom}(fg),\ x_n\neq a,\ x_n\to a\quad f(x_n)\cdot g(x_n)\to 0\Rightarrow$$
$$\exists\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0,\ \text{т. е. } f\cdot g \text{ — бесконечно малая в точке } a.$$

Следствие. *Пусть* $f_1, \ldots, f_m$ *— вещественные или комплексные функции. Если существуют* $\lim_a f_1, \ldots, \lim_a f_m$, $\sum\limits_{k=1}^{m} \lim_a f_k$ *имеет смысл и* a *— предельная точка* $\mathrm{dom}(f_1 + \ldots + f_m)$, *то существует* $\lim_a \sum\limits_{k=1}^{m} f_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \lim_a f_k$.

Если существуют $\lim_a f_1, \ldots, \lim_a f_m$, $\prod\limits_{k=1}^{m} \lim_a f_k$ *имеет смысл и* a *— предельная точка* $\mathrm{dom}(f_1 \cdot \ldots \cdot f_m)$, *то существует* $\lim_a \prod\limits_{k=1}^{m} f_k = \prod\limits_{k=1}^{m} \lim_a f_k$.

Доказательство (для произведения, по индукции). Для $m = 1$ — это тавтология: ($\lim_a f_1 = \lim_a f_1$). Предположим, что утверждение верно для m, докажем для $m+1$. По условию,

$$\prod_{k=1}^{m+1} \lim_a f_k \text{ имеет смысл} \Rightarrow \prod_{k=1}^{m} \lim_a f_k \text{ имеет смысл.}$$

$$a \text{ — предельная точка } \mathrm{dom}\left(\prod_{k=1}^{m+1} f_k\right) = \bigcap_{k=1}^{m+1} \mathrm{dom}\, f_k \subset \bigcap_{k=1}^{m} \mathrm{dom}\, f_k = \mathrm{dom}\left(\prod_{k=1}^{m} f_k\right) \Rightarrow$$

$$a \text{ — предельная точка } \mathrm{dom}\left(\prod_{k=1}^{m} f_k\right) \text{ (по замечанию 2 о расширении множества}$$

к определению 2.4 предельной точки).

По индукционному предположению, $\exists \lim_a \left(\prod\limits_{k=1}^{m} f_k\right) = \prod\limits_{k=1}^{m} \lim_a f_k$. a — предельная точка $\mathrm{dom}\left(\prod\limits_{k=1}^{m} f_k \cdot f_{m+1}\right)$, $\prod\limits_{k=1}^{m} \lim_a f_k \cdot \lim_a f_{m+1}$ имеет смысл. Тогда по теореме

$$\exists \lim_a \left(\prod_{k=1}^{m} f_k \cdot f_{m+1}\right) = \prod_{k=1}^{m} \lim_a f_k \cdot \lim_a f_{m+1}, \text{ т. е. } \lim_a \left(\prod_{k=1}^{m+1} f_k\right) = \prod_{k=1}^{m+1} \lim_a f_k.$$

Доказательство для суммы — совершенно аналогично (область определения суммы функций тоже равна пересечению областей определения слагаемых).

Пример (роль условия о предельной точке).
Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $f\colon [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$ (по ε находим $\delta = \varepsilon^2$); $g(x) = \sqrt{-x}$, $g\colon (-\infty; 0] \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{-x} = 0$. Но $\mathrm{dom}(f+g) = \{0\}$ — не имеет предельных точек, поэтому $\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x} + \sqrt{-x})$ — не определён.

4. Асимптотические оценки и асимптотические равенства.

Определение 4.1. *Пусть* f, g *— вещественные или комплексные функции,* $\mathfrak{A}$ *— база множеств. Функция* f *называется ограниченной по отношению к функции* g *по базе* $\mathfrak{A}$, *если*

$$\exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha\colon \forall x \in A \ f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ и функция } \alpha \text{ ограничена на } A.$$

Обозначение: $f = O(g)$ $(\mathfrak{A})$. *Если* $f = O(g)$ *и* $g = O(f)$, *то говорят, что* f *и* g *— одного порядка по базе* $\mathfrak{A}$. *Обозначение:* $f \asymp g$ $(\mathfrak{A})$.

Замечание. Если $\forall x \in A\ g(x) \neq 0$, то $f = O(g)\ (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ ограничено на A (очевидно, $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$).

Частные случаи. Если $a \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{A} = \{(a;b)\colon b > a\}$, то пишут $f(x) = O\big(g(x)\big)\ (x \to a+)$. Если $\mathfrak{A} = \{(b;a)\colon b < a\}$, то пишут $f(x) = O\big(g(x)\big)\ (x \to a-)$. Если $\mathfrak{A} = \{\dot{B}(a,\varepsilon)\colon \varepsilon > 0\}$, то пишут $f(x) = O\big(g(x)\big)\ (x \to a)$. Если $\mathfrak{A} = \{(b;+\infty)\colon b \in \mathbb{R}\}$, то пишут $f(x) = O\big(g(x)\big)\ (x \to +\infty)$. Если $\mathfrak{A} = \{(-\infty;b)\colon b \in \mathbb{R}\}$, то пишут $f(x) = O\big(g(x)\big)\ (x \to -\infty)$.

Примеры. 1) f ограничена на $A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow f = O(\mathbf{1})\ (\mathfrak{A})$ (по замечанию).

2) $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, тогда $P(x) = O(x^n)\ (x \to \pm\infty)$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty \text{ (предел произведения)} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{a_k}{x^k} = 0 \text{ (предел частного)}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\right) = a_n \text{ (предел суммы)}.$$

Поскольку предел конечен, по теореме 3.1 об оценках функции, имеющей предел, $\frac{P(x)}{x^n}$ ограничена на некотором множестве $(p;+\infty) \in \mathfrak{A} \Rightarrow P(x) = O(x^n)\ (x \to +\infty)$. Для $x \to -\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k = \pm\infty$ (в зависимости от чётности k), остальное — аналогично.

Упражнение. Если $a_n \neq 0$, то $P(x) \asymp x^n\ (x \to \pm\infty)$.

3) $P(x) = a_m x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \ldots a_n x^n\ (n > m)$, тогда $P(x) = O(x^m)\ (x \to 0)$.

Доказательство.

$$\lim_{x\to0} a_{m+k}x^k = 0 \Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{P(x)}{x^m} = \lim_{x\to0} \left(a_m + a_{m+1}x + \ldots + a_n x^{n-m}\right) = a_m.$$

Остальное — аналогично примеру 2.

Определение 4.2. *Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, $\mathfrak{A}$ — база множеств. Функция f называется бесконечно малой по отношению к функции g по базе $\mathfrak{A}$, если*

$$\exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha\colon \forall x \in A\ f(x) = \alpha(x)\cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 0.$$

Обозначение: $f = o(g)\ (\mathfrak{A})$. Аналогично частным случаям определения 4.1 смысл придаётся обозначениям $f = o(g)\ (x \to a+)$, $f = o(g)\ (x \to a-)$ и т. д. (по соответствующим базам).

Замечание. Если $\forall x \in A\ g(x) \neq 0$, то $f = o(g)\ (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = 0$ (очевидно, $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$).

Примеры. 1) f — бесконечно малая по базе $\mathfrak{A} \Leftrightarrow f = o(\mathbf{1})\ (\mathfrak{A})$ (по замечанию).

2) Если $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > \beta$, то $x^\alpha = o(x^\beta)\ (x \to 0+)$; $\quad x^\beta = o(x^\alpha)\ (x \to +\infty)$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to0+} \frac{x^\alpha}{x^\beta} = \lim\limits_{x\to0+} x^{\alpha-\beta} = 0$ (будет доказано в главе о непрерывных функциях после аккуратного определения степенной функции с произвольным вещественным показателем). По замечанию, тогда $x^\alpha = o(x^\beta)\ (x \to 0+)$. Аналогично, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{x^\alpha} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\beta-\alpha} = 0 \Rightarrow x^\beta = o(x^\alpha)\ (x \to +\infty)$. ("В нуле преобладают младшие степени, а в бесконечности — старшие").

3) $\forall \alpha > 0\ a > 1\quad x^\alpha = o(a^x)\ (x \to +\infty)$ ("степенная функция растёт медленнее показательной").

$\forall \beta > 0\ (\log_a x)^\beta = o(x^\alpha)\ (x \to +\infty)$ ("логарифм растёт медленнее степенной функции").

Эти утверждения будут доказаны в главе "дифференциальное исчисление". Здесь сформулированы для использования на практических занятиях.

Задачи для отличников. Доказать:

$$f = O(g)\ (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \exists A \in \mathfrak{A},\ M \geqslant 0 \colon \forall x \in A\ |f(x)| \leqslant M|g(x)|;$$
$$f = o(g)\ (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A} \colon \forall x \in A\ |f(x)| \leqslant \varepsilon|g(x)|.$$

(обычные определения асимптотических оценок). Определения с функцией α взяты из задачника (Виноградова, Олехник, Садовничий). Они позволяют во многих случаях быстрее доказывать различные утверждения об оценках, используя уже доказанные утверждения о пределах.

Определение 4.3. *Пусть f, g — вещественные или комплексные функции, $\mathfrak{A}$ — база множеств. Функция f называется асимптотически равной функции g по базе $\mathfrak{A}$, если*

$$\exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha \colon \forall x \in A\ f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1.$$

Обозначение: $f \sim g\ (\mathfrak{A})$. Аналогично частным случаям определения 4.1 смысл придаётся обозначениям $f \sim g\ (x \to a+)$, $f \sim g\ (x \to a-)$ и т. д. (по соответствующим базам).

Замечание. Если $\forall x \in A\ g(x) \neq 0$, то $f \sim g\ (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{g} = 1$
(очевидно, $\alpha(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$).

Примеры. 1) Если $\lim_{\mathfrak{A}} f = A,\ A \neq 0,\ \pm\infty$, то $f \sim A\ (\mathfrak{A})$ (по замечанию, поскольку $\lim_{\mathfrak{A}} \frac{f}{A} = 1$).

В главе о непрерывных функциях будет доказано:

2) $\sin x \sim x\ (x \to 0)$.

3) $\ln(1 + x) \sim x\ (x \to 0)$.

4) $e^x - 1 \sim x\ (x \to 0)$.

5) При $\alpha \neq 0 \quad (1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x\ (x \to 0)$.

(для использования на практических занятиях).

Замечание (ко всем определениям 4.1 — 4.3). У всех участвующих в определениях функций области определения могут быть различными, но для каждой из них существует множество из базы $\mathfrak{A}$, на которой она определена. По замечанию к определению базы (2.1), для $\forall A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}\ \exists A \in \mathfrak{A} \colon A \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Поэтому для любого конечного набора функций, участвующих в утверждениях этого параграфа, существует общее множество $A \in \mathfrak{A}$, такое, что на нём определены **<u>все</u>** участвующие функции. На протяжении этого параграфа это будет предполагаться по умолчанию.

Лемма 4.1 (Связь различных асимптотическх оценок)**.**
1) Если $f = o(g)\ (\mathfrak{A})$, то $f = O(g)\ (\mathfrak{A})$.
2) Если $f \sim g\ (\mathfrak{A})$, то $f \asymp g\ (\mathfrak{A})$.
3) $f \sim g\ (\mathfrak{A}) \Leftrightarrow f - g = o(g)\ (\mathfrak{A})$.

Доказательство.

$$1)\ f = o(g)\ (\mathfrak{A}) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha \colon \forall x \in A\ f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 0.$$

Поскольку $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha$ конечен, по теореме 3.1 об оценках функции, имеющей предел, $\exists B \in \mathfrak{A}$, такое, что функция α ограничена на $B \subset A = \operatorname{dom} \alpha$, т.е. $f = O(g)\ (\mathfrak{A})$.

$$2)\ f \sim g\ (\mathfrak{A}) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha \colon \forall x \in A\ f(x) = \alpha(x) \cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1.$$

Тогда по определению предела по базе

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists B \in \mathfrak{A}\colon B \subset A = \operatorname{dom}\alpha,\ \forall x \in B \quad |\alpha(x) - 1| < \frac{1}{2}.$$

По свойству длины вектора, тогда:

а) $\forall x \in B \quad |\alpha(x)| = |\alpha(x) - 1 + 1| \leqslant |\alpha(x) - 1| + 1 < \dfrac{3}{2}$,

т. е. функция α ограничена на $B \Rightarrow f = O(g)\ (\mathfrak{A})$.

б) $\forall x \in B \quad |\alpha(x)| = |1+\alpha(x)-1| \geqslant 1-|\alpha(x)-1| > \dfrac{1}{2} > 0 \Rightarrow \forall x \in B \quad \alpha(x) \neq 0,\ \left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right| < 2.$

$$\forall x \in B \quad f(x) = \alpha(x)\cdot g(x) \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\alpha(x)}\cdot f(x),\ \left|\frac{1}{\alpha(x)}\right| < 2 \Rightarrow g = O(f)\ (\mathfrak{A}).$$

(а) и (б)$\Rightarrow f \asymp g\ (\mathfrak{A})$.

$$3)\ f \sim g \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha\colon \forall x \in A\ f(x) = \alpha(x)\cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1 \Rightarrow$$

$$\forall x \in A\ f(x) - g(x) = (\alpha(x) - 1)g(x),\ \lim_{\mathfrak{A}}(\alpha - 1) = 0 \text{ (предел разности)} \Rightarrow f - g = o(g).$$

$$f - g = o(g) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \beta\colon \forall x \in A\ f(x) - g(x) = \beta(x)\cdot g(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \beta = 0 \Rightarrow$$

$$\forall x \in A\ f(x) = (\beta(x) + 1)g(x),\ \lim_{\mathfrak{A}}(\beta + 1) = 1 \text{ (предел суммы)} \Rightarrow f \sim g.$$

Замечание. Утверждения, обратные (1) и (2) неверны: так, $\sin(x) = O(\mathbf{1})\ (x \to +\infty)$, но $\sin(x) \neq o(\mathbf{1})\ (x \to +\infty)$; при $f(x) \neq 0$ на множестве $A \in \mathfrak{A}$ $f \asymp 2f$, но $f \nsim 2f$.

Теорема 4.1 (Свойства операций над асимптотическими оценками)**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — база множеств, относительно которой имеют место все участвующие оценки.*

1) Если $f_1 = O(g),\ f_2 = O(g)$, то $f_1 \pm f_2 = O(g)$; если $f_1 = o(g),\ f_2 = o(g)$, то $f_1 \pm f_2 = o(g)$.

2) Если $f_1 = O(g_1),\ f_2 = O(g_2)$, то $f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2)$; если $f_1 = o(g_1),\ f_2 = O(g_2)$, то $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$; если $f_1 = o(g_1),\ f_2 = o(g_2)$, то $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$.

3) Если $\exists A \in \mathfrak{A}\colon A \subset \operatorname{dom} h$ и $f = O(g)$, то $f \cdot h = O(g \cdot h)$; если $f = o(g)$, то $f \cdot h = o(g \cdot h)$.

4) Пусть C =const. Тогда: если $f = O(g)$, то $C \cdot f = O(g)$; если $f = o(g)$, то $C \cdot f = o(g)$; если $f = O(C \cdot g)$, то $f = O(g)$; если $f = o(C \cdot g)$, то $f = o(g)$ ("принцип пренебрежения константами").

5) Если $f = O(g),\ g = O(h)$, то $f = O(h)$; если $f = o(g),\ g = O(h)$, то $f = o(h)$; если $f = O(g),\ g = o(h)$, то $f = o(h)$; если $f = o(g),\ g = o(h)$, то $f = o(h)$.

6) Если $g \asymp h$, то: $f = O(g) \Leftrightarrow f = O(h),\ f = o(g) \Leftrightarrow f = o(h)$; если $g \sim h$, то: $f = O(g) \Leftrightarrow f = O(h),\ f = o(g) \Leftrightarrow f = o(h)$.

Комментарий для лектора: на эту теорему я ссылался на практических занятиях. Было удобно использовать её при вычислении пределов в виде символических "равенств":

1) $O(f) \pm O(f) = O(f), \quad o(f) \pm o(f) = o(f)$.
2) $O(f)\cdot O(g) = O(fg),\ o(f)\cdot O(g) = o(fg),\ o(f)\cdot o(g) = o(fg)$.
3) $h \cdot O(g) = O(hg),\ h \cdot o(g) = o(hg)$.
4) $C \cdot O(g) = O(g),\ C \cdot o(g) = o(g); \quad O(Cg) = O(g),\ o(Cg) = o(g)$.
5) $O\big(O(h)\big) = O(h),\ o\big(O(h)\big) = o(h),\ O\big(o(h)\big) = o(h),\ o\big(o(h)\big) = o(h)$.
6) $f \asymp g \Rightarrow O(f) = O(g)$ и $o(f) = o(g)$; $\quad f \sim g \Rightarrow O(f) = O(g)$ и $o(f) = o(g)$.

Доказательство. По замечанию после определений 4.1 — 4.3 существует множество $B \in \mathfrak{A}$ такое, что на нём определены все участвующие в этой теореме функции и все равенства и неравенства в доказательстве выполняются для любого $x \in B$.

$$1)\ f_1 = O(g),\ f_2 = O(g) \Rightarrow \exists \alpha_1,\ \alpha_2\colon f_1(x) = \alpha_1(x)g(x),\ f_2(x) = \alpha_2(x)g(x),$$
$$\text{при этом } |\alpha_1(x)| \leqslant M_1,\ |\alpha_2(x)| \leqslant M_2. \text{ Тогда } f_1(x) \pm f_2(x) = \big(\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)\big)g(x)$$
$$\text{и } |\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)| \leqslant |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| \leqslant M_1 + M_2 \Rightarrow f_1 \pm f_2 = O(g).$$

$$f_1 = o(g),\ f_2 = o(g) \Rightarrow \exists \alpha_1,\ \alpha_2\colon f_1(x) = \alpha_1(x)g(x),\ f_2(x) = \alpha_2(x)g(x),$$
$$\text{при этом } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha_1 = 0,\ \lim_{\mathfrak{A}} \alpha_2 = 0. \text{ Тогда } f_1(x) \pm f_2(x) = \big(\alpha_1(x) \pm \alpha_2(x)\big)g(x)$$
$$\text{и } \lim_{\mathfrak{A}}(\alpha_1 \pm \alpha_2) = 0 \Rightarrow f_1 \pm f_2 = o(g).$$

$$2)\ f_1 = O(g_1),\ f_2 = O(g_2) \Rightarrow \exists \alpha_1,\ \alpha_2\colon f_1(x) = \alpha_1(x)g_1(x),\ f_2(x) = \alpha_2(x)g_2(x),$$
$$\text{при этом } |\alpha_1(x)| \leqslant M_1,\ |\alpha_2(x)| \leqslant M_2. \text{ Тогда } f_1(x)f_2(x) = \big(\alpha_1(x)\alpha_2(x)\big)g_1(x)g_2(x)$$
$$\text{и } |\alpha_1(x)\alpha_2(x)| \leqslant |\alpha_1(x)| \cdot |\alpha_2(x)| \leqslant M_1M_2 \Rightarrow f_1f_2 = O(g_1g_2).$$

$$f_1 = o(g_1),\ f_2 = O(g_2) \Rightarrow \exists \alpha_1,\ \alpha_2\colon f_1(x) = \alpha_1(x)g_1(x),\ f_2(x) = \alpha_2(x)g_2(x),$$
$$\text{при этом } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha_1 = 0,\ |\alpha_2(x)| \leqslant M. \text{ Тогда } f_1(x)f_2(x) = \big(\alpha_1(x)\alpha_2(x)\big)g_1(x)g_2(x)$$
$$\text{и } \lim_{\mathfrak{A}}(\alpha_1\alpha_2) = 0 \text{ (по лемме о бесконечно малых)} \Rightarrow f_1f_2 = o(g_1g_2).$$

Если $f_1 = o(g_1),\ f_2 = o(g_2)$, то по лемме 4.1 (связь асимптотических оценок) из $f_2 = o(g_2)$ следует $f_2 = O(g_2)$, а тогда по только что доказанному $f_1f_2 = o(g_1g_2)$.

3) Очевидно, $h = O(h)$ (поскольку $\alpha \equiv 1$ на множестве A), поэтому утверждения п.3 — частные случаи п.2.

4) Поскольку для функции, тождественно равной C, очевидно, $C = O(\mathbf{1})$, то утверждения $f = O(g) \Rightarrow Cf = O(g)$ и $f = o(g) \Rightarrow Cf = o(g)$ являются частными случаями утверждений п.2 для $f_2 \equiv C,\ g_2 \equiv \mathbf{1}$.

При $C \neq 0$ для функции, тождественно равной $\frac{1}{C}$, очевидно, $\mathbf{1} = O(\frac{1}{C})$, тогда утверждения $f = O(Cg) \Rightarrow f = O(g)$ и $f = o(Cg) \Rightarrow f = o(g)$ являются частными случаями утверждений п.2 для $f_2 \equiv 1,\ g_2 \equiv \frac{1}{C}$. Если $C = 0$, то $Cg \equiv 0$, а тогда из $f = O(Cg)$ или $f = o(Cg)$ следует, что $f \equiv 0$. При этом очевидно, что $f = O(g)$ и $f = o(g)$ (для $\alpha \equiv 0$).

$$5)\ f = O(g),\ g = O(h) \Rightarrow \exists \alpha,\ \beta\colon f(x) = \alpha(x)g(x),\ g(x) = \beta(x)h(x), \text{ при этом}$$
$$|\alpha(x)| \leqslant M_1,\ |\beta(x)| \leqslant M_2. \text{ Тогда } f(x) = \alpha(x)\beta(x)h(x) \text{ и } |\alpha(x)\beta(x)| \leqslant M_1 \cdot M_2 \Rightarrow f = O(h).$$
$$f = O(g),\ g = o(h) \Rightarrow \exists \alpha,\ \beta\colon f(x) = \alpha(x)g(x),\ g(x) = \beta(x)h(x), \text{ при этом}$$
$$|\alpha(x)| \leqslant M_1,\ \lim_{\mathfrak{A}} \beta(x) = 0. \text{ Тогда } f(x) = \alpha(x)\beta(x)h(x) \text{ и } \lim_{\mathfrak{A}} \alpha(x)\beta(x) = 0$$
$$\text{(по лемме о бесконечно малых) } \Rightarrow f = o(h).$$

Случай $f = o(g),\ g = O(h)$ — аналогично: $(\lim_{\mathfrak{A}} \alpha(x) = 0,\ |\beta(x)| \leqslant M_2)$.

Если $f = o(g),\ g = o(h)$, то по лемме 4.1 о связи асимптотических оценок $g = o(h) \Rightarrow g = O(h)$ и, по уже доказанному, $f = o(h)$.

6) По определению 4.1 $g \asymp h \Rightarrow g = O(h)$. Тогда по утверждению 5 $f = O(g) \Rightarrow f = O(h)$ и $f = o(g) \Rightarrow f = o(h)$. Поскольку соотношение $g \asymp h \Leftrightarrow h \asymp g$, то и $f = O(g) \Leftrightarrow f = O(h)$, $f = o(g) \Leftrightarrow f = o(h)$.

По лемме о связи асимптотических оценок $f \sim g \Rightarrow f \asymp g$ и утверждения $f = O(g) \Leftrightarrow f = O(h)$, $f = o(g) \Leftrightarrow f = o(h)$ уже доказаны.

Теорема 4.2 (Асимптотическое равенство как отношение эквивалентности).
Пусть $\mathfrak{A}$ — база множеств, f, g, h — вещественные или комплексные функции, области определения которых содержат некоторые множества из $\mathfrak{A}$. Тогда
1) $f \sim f$ $(\mathfrak{A})$.
2) $f \sim g$ $(\mathfrak{A}) \Rightarrow g \sim f$ $(\mathfrak{A})$.
3) $f \sim g$ $(\mathfrak{A})$ и $g \sim h$ $(\mathfrak{A}) \Rightarrow f \sim h$ $(\mathfrak{A})$.

Доказательство. 1) Пусть $A \in \mathfrak{A}$ — множество, на котором выполнены все соотношения между функциями, участвующими в формулировке теоремы. Тогда если $\forall x \in A \quad \alpha(x) = 1$, то $f(x) = \alpha(x)f(x)$, $\lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1 \Rightarrow f \sim f$ $(\mathfrak{A})$.

2) $f \sim g$ $(\mathfrak{A}) \Rightarrow \exists \alpha\colon f(x) = \alpha(x)g(x)$, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \alpha = 1$. Тогда по лемме 3.5 о пределе $\dfrac{1}{\alpha}$

$$\exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad \frac{1}{\alpha(x)} \neq 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\alpha(x)} \cdot f(x),\ \lim_{\mathfrak{A}} \frac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow g \sim f\ (\mathfrak{A}).$$

3) $f \sim g$ $(\mathfrak{A})$, $g \sim h$ $(\mathfrak{A}) \Rightarrow \exists \alpha,\ \beta\colon f(x) = \alpha(x)g(x)$, $g(x) = \beta(x)h(x)$, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \alpha = 1$, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \beta = 1$.

Тогда $f(x) = \alpha(x)\beta(x)h(x)$, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \alpha\beta = 1$ (предел произведения) $\Rightarrow f \sim h$ $(\mathfrak{A})$.

Комментарий: эта теорема обосновывает возможность на практических занятиях писать цепочки $f_1 \sim f_2 \sim \ldots \sim f_n$ (любая пара элементов цепочки эквивалентна).

Теорема 4.3 (Умножение и деление асимптотических равенств).
Пусть $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ по базе $\mathfrak{A}$. Тогда:
1) $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$ $(\mathfrak{A})$;
2) Если $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A$ $f_2(x) \neq 0$, то $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$ $(\mathfrak{A})$.

Доказательство.

$f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2 \Rightarrow \exists \alpha,\ \beta\colon f_1(x) = \alpha(x)g_1(x)$, $f_2(x) = \beta(x)g_2(x)$, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \alpha = 1$, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \beta = 1$. Тогда

1) $f_1(x)f_2(x) = \alpha(x)\beta(x)g_1(x)g_2(x)$, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \alpha\beta = 1$ (предел произведения) $\Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$.

2) $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \beta = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B$ $\beta(x) \neq 0$ (по теореме 3.1 об оценках, п.3).

По определению базы, $\exists C \in \mathfrak{A}\colon C \subset A \cap B$. Тогда $\forall x \in C$ $f_2(x) \neq 0$ и $\beta(x) \neq 0 \Rightarrow g_2(x) \neq 0$.

Получили: $\forall x \in C \quad \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$, $\lim\limits_{\mathfrak{A}} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$ (предел частного) $\Rightarrow \dfrac{f_1}{f_2} \sim \dfrac{g_1}{g_2}$ $(\mathfrak{A})$.

Теорема 4.4 (Замена переменной в асимптотических оценках).
Пусть $\mathfrak{A}$ — база множеств, φ — вещественная или комплексная функция, f, g — функции с областями определения на подмножествах $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Если:
1) $\lim_{\mathfrak{A}} \varphi = a$;
2) $f(x) = O\big(g(x)\big)$ $(x \to a)$ или $f(x) = o\big(g(x)\big)$ $(x \to a)$ или $f(x) \sim g(x)$ $(x \to a)$;
3) $\exists A_0 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_0 \quad \varphi(x) \neq a$,
то, соответственно, $f \circ \varphi = O(g \circ \varphi)$ $(\mathfrak{A})$ или $f \circ \varphi = o(g \circ \varphi)$ $(\mathfrak{A})$ или $f \circ \varphi \sim g \circ \varphi)$ $(\mathfrak{A})$.
Если 2') $f(x) = O\big(g(x)\big)$ или $f(x) = o\big(g(x)\big)$ или $f(x) \sim g(x)$ при $(x \to a+)$;
3') $\exists A_0 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_0 \quad \varphi(x) > a$,
то заключение теоремы сохраняется. Аналогично, если оценки при $x \to a-$ и на множестве $A_0 \quad \varphi(x) < a$.

Доказательство.

$$f(x)=O\big(g(x)\big)\ (x\to a)\Rightarrow \exists \dot B(a,\varepsilon)\colon \forall x\in \dot B(a,\varepsilon)\quad f(x)=\alpha(x)g(x),\ |\alpha(x)|\leqslant M.$$

$$\lim_{\mathfrak{A}}\varphi=a\Rightarrow \text{для } \varepsilon>0\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall t\in A\quad \rho(\varphi(t),a)<\varepsilon\Rightarrow\varphi(t)\in B(a,\varepsilon).$$

По определению базы, $\exists B\in\mathfrak{A}\colon B\subset A\cap A_0$. Тогда

$$\forall t\in B\quad t\in A \text{ и } t\in A_0\Rightarrow \varphi(t)\in B(a,\varepsilon) \text{ и } \varphi(t)\neq a\Rightarrow\varphi(t)\in\dot B(a,\varepsilon).$$

$$\text{Получили: } \exists B\in\mathfrak{A}\colon \forall t\in B\quad x=\varphi(t)\in\dot B(a,\varepsilon)\Rightarrow f\big(\varphi(t)\big)=\alpha\big(\varphi(t)\big)g\big(\varphi(t)\big),$$
$$|\alpha\big(\varphi(t)\big)|\leqslant M\Rightarrow f\circ\varphi=O(g\circ\varphi)\ (\mathfrak{A}).$$

$$f(x)=o\big(g(x)\big)\ (x\to a)\Rightarrow\exists\dot B(a,\delta_0)\colon\forall x\in\dot B(a,\delta_0)\quad f(x)=\alpha(x)g(x),\ \lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

$$\text{Тогда } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon\forall x\colon x\in\operatorname{dom}\alpha=\dot B(a,\delta_0) \text{ и } \rho(x,a)<\delta\quad|\alpha(x)|<\varepsilon.$$

$$\text{Таким образом, если положить } \delta_1=\min\{\delta,\delta_0\},\ \text{то } \forall x\in\dot B(a,\delta_1)\quad|\alpha(x)|<\varepsilon.$$

$$\lim_{\mathfrak{A}}\varphi=a\Rightarrow\text{для } \delta_1>0\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon\forall t\in A\quad\rho(\varphi(t),a)<\delta_1\Rightarrow\varphi(t)\in B(a,\delta_1).$$

По определению базы, $\exists B\in\mathfrak{A}\colon B\subset A\cap A_0$. Тогда

$$\forall t\in B\quad t\in A\text{ и } t\in A_0\Rightarrow\varphi(t)\in B(a,\delta_1)\text{ и }\varphi(t)\neq a\Rightarrow\varphi(t)\in\dot B(a,\delta_1).$$

$$\text{Получили: }\exists B\in\mathfrak{A}\colon\forall t\in B\quad x=\varphi(t)\in\dot B(a,\delta_1)\Rightarrow f\big(\varphi(t)\big)=\alpha\big(\varphi(t)\big)g\big(\varphi(t)\big),$$
$$|\alpha\big(\varphi(t)\big)|\leqslant\varepsilon,\ \text{т. е. } \lim_{\mathfrak{A}}(\alpha\circ\varphi)=0\Rightarrow f\circ\varphi=O(g\circ\varphi)\ (\mathfrak{A}).$$

Для $f(x)\sim g(x)$ $(x\to a)$ доказательство аналогично (поскольку в этом случае $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=1$, вместо $|\alpha(x)|<\varepsilon,\ |\alpha\big(\varphi(t)\big)|\leqslant\varepsilon$ появится $|\alpha(x)-1|<\varepsilon,\ |\alpha\big(\varphi(t)\big)-1|\leqslant\varepsilon$ и $\lim_{\mathfrak{A}}(\alpha\circ\varphi)=1$.

В случае асимптотических оценок при $x\to a+$ или $x\to a-$ и условий $2')$, $3')$ в доказательстве вместо $\dot B(a,\varepsilon)$ используются множества из соответствующих баз: промежутки вида $(a;b)$ для случая $x\to a+$ и промежутки вида $(b;a)$ для $x\to a-$.

Пример. $\sin x\sim x$ $(x\to0)$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac1t=0,\ \frac1t\neq0\Rightarrow\sin\frac1t\sim\frac1t$ $(t\to+\infty)$.

Замечание. Другие операции над асимптотическими равенствами могут приводить к неверным результатам. Если применять композицию в другом порядке, чем в теореме 4.4, т. е. если $f\sim g$ $(\mathfrak{A})$, то может быть $\varphi\circ f\nsim\varphi\circ g$ $(\mathfrak{A})$, например, $x+1\sim x$ $(x\to+\infty)$, поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$, но $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{x+1}}{e^x}=e\neq1\Rightarrow e^{x+1}\nsim e^x$.
Также если $f_1\sim g_1,\ f_2\sim g_2$ $(\mathfrak{A})$, то может быть $f_1+f_2\nsim g_1+g_2$ $(\mathfrak{A})$, например, пусть $f_1(x)=\ln(1+x)$, $f_2(x)=\ln(1-x+x^2)$. Тогда $\ln(1+x)\sim x=g_1(x)$ $(x\to0)$, $\ln(1-x+x^2)\sim -x+x^2=g_2(x)$ $(x\to0)$. $f_1(x)+f_2(x)=\ln\big((1+x)(1-x+x^2)\big)=\ln(1+x^3)\sim x^3$. При этом $g_1(x)+g_2(x)=x^2$, т. е. $f_1+f_2\nsim g_1+g_2$. Но есть хорошая задача для отличников:

$$\text{Если } f_1\geqslant0,\ f_2\geqslant0,\ f_1\sim g_1\ (\mathfrak{A})\text{ и } f_2\sim g_2\ (\mathfrak{A}),\ \text{то } f_1+f_2\sim g_1+g_2\ (\mathfrak{A}).$$

На мой взгляд, для экзамена она трудновата, но можно предложить на практических занятиях в качестве домашнего задания.

Теорема 4.5 (Равенство пределов асимптотически равных функций).
Если $f\sim g$ $(\mathfrak{A})$, то $\lim_{\mathfrak{A}}f$ и $\lim_{\mathfrak{A}}g$ существуют (или не существуют) одновременно, и если существуют, то равны.

Доказательство.

$$f \sim g\ (\mathfrak{A}) \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A} \text{ и функция } \alpha\colon \forall x \in A \quad f(x) = \alpha(x)g(x),\ \lim_{\mathfrak{A}} \alpha = 1.$$

$$\exists \lim_{\mathfrak{A}} g \text{ (конечный или } \pm\infty) \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = \lim_{\mathfrak{A}} \alpha \cdot \lim_{\mathfrak{A}} g = \lim_{\mathfrak{A}} g \text{ (предел произведения).}$$

По теореме 4.2 отношение "$\sim$" симметрично, т. е. $f \sim g \Rightarrow g \sim f$ и, переставляя f и g, получаем: $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} g = \lim_{\mathfrak{A}} f$.

5. **Свойства предела, связанные с неравенствами.**

В этом параграфе все отображения — со значениями в $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$ (т. е. $f(x) \in \mathbb{R}$ или $f(x) = \pm\infty$).

Теорема 5.1 (Переход к пределу в неравенстве).
Пусть $\mathfrak{A}$ — база множеств. Если существует $A_0 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_0 \quad f(x) \leqslant g(x)$ и $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = a, \quad \lim_{\mathfrak{A}} g = b$, то $a \leqslant b$.

Доказательство. Предположим, что $a > b$, тогда существует $p \in \mathbb{R}\colon a > p > b$.

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = a > p \Rightarrow \exists A_1 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_1\ f(x) > p;\ \lim_{\mathfrak{A}} g = b < p \Rightarrow \exists A_2 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_2\ g(x) < p$$

(по теореме 3.1 об оценках). Тогда по замечанию 2 к определению базы, существует $A \in \mathfrak{A}\colon A \subset A_0 \cap A_1 \cap A_2$.

$$A \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_0 \in A \Rightarrow \begin{cases} x_0 \in A_1 \Rightarrow f(x_0) > p \\ x_0 \in A_2 \Rightarrow g(x_0) < p \end{cases} \Rightarrow f(x_0) > g(x_0).$$

При этом $x_0 \in A_0 \Rightarrow f(x_0 \leqslant g(x_0)$ — противоречие. От противного доказано: $a \leqslant b$.

Замечание. Если для любого $x \in A_0$ $f(x) < g(x)$, то, вообще говоря, нельзя сделать вывод, что $\lim_{\mathfrak{A}} f < \lim_{\mathfrak{A}} g$.
Пример. Пусть для $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = -\frac{1}{n},\ y_n = \frac{1}{n}$, тогда $x_n < y_n$, но $\lim x_n = \lim y_n = 0$.

Теорема 5.2 (О зажатой функции).
Пусть $\mathfrak{A}$ — база множеств, $f,\ g,\ h$ — функции.

Если $\exists A_0 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_0 \quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \quad$ и $\quad \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = \lim_{\mathfrak{A}} h = b$, то $\exists \lim_{\mathfrak{A}} g = b$.

Доказательство. По теореме 2.1 (эквивалентные определения предела, п.5):

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = b \Rightarrow \forall \varepsilon\colon 0 < \varepsilon < 2 \quad \exists A_1 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_1 \quad f(x) \in B(b, \varepsilon);$$
$$\lim_{\mathfrak{A}} h = b \Rightarrow \forall \varepsilon\colon 0 < \varepsilon < 2 \quad \exists A_2 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_2 \quad h(x) \in B(b, \varepsilon).$$

По замечанию 2 к определению базы, $\exists A \in \mathfrak{A}\colon A \subset A_0 \cap A_1 \cap A_2$. Рассмотрим любое $x \in A$:

$$x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A_1 \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon); \\ x \in A_2 \Rightarrow h(x) \in B(b, \varepsilon); \\ x \in A_0 \Rightarrow f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x). \end{cases}$$

Множество $B(b, \varepsilon)$ — это всегда промежуток. А именно, по теореме 1.1 о строении шаров в $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$: если $b \in \mathbb{R}$, то $B(b, \varepsilon) = (b - \varepsilon; b + \varepsilon)$; если $b = +\infty$, то $B(b, \varepsilon) = (p; +\infty]$ (для $0 < \varepsilon < 2$); если $b = -\infty$, то $B(b, \varepsilon) = [-\infty; q)$ (для $0 < \varepsilon < 2$).

Поскольку $f(x)$ и $h(x)$ принадлежат этому промежутку и $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, то и $g(x)$ принадлежит этому же промежутку. Получили:

$$\forall \varepsilon\colon 0<\varepsilon<2 \quad \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad g(x) \in B(b, \varepsilon) \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} g = b.$$

Определение 5.1 (Отображение, монотонное по базе)**.**
Пусть f — отображение со значениями в $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{A}$ — база множеств. Назовём отображение f возрастающим по базе $\mathfrak{A}$, если

$$\forall x \in X = \operatorname{dom} f \quad \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x' \in A \quad f(x') \geqslant f(x).$$

Назовём отображение f убывающим по базе $\mathfrak{A}$, если

$$\forall x \in X = \operatorname{dom} f \quad \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x' \in A \quad f(x') \leqslant f(x).$$

Возрастющее или убывающее отображение назовём монотонным по базе $\mathfrak{A}$.

Примеры. 1) Пусть $X = \operatorname{dom} f \subset [-\infty; a)$, $\quad f \nearrow$ (возрастает в обычном смысле, т. е. $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$) и a — предельная точка множества X. Тогда f возрастает по базе $\{\dot{B}(a,\delta) \cap X\}$.

Доказательство. a — предельная точка $X \Rightarrow X \neq \varnothing$ (замечание 1 к определению 2.4 предельной точки). Рассмотрим $\forall x \in X \subset [-\infty; a) \Rightarrow x < a$. Если $a \in \mathbb{R}$, то

$x < a < a+1 \Rightarrow (x; a+1)$ — окрестность точки a (следствие теоремы 1.1 о строении

шаров) $\Rightarrow \exists B(a,\delta) \subset (x; a+1)$. Тогда $\forall x' \in \dot{B}(a,\delta) \cap X \quad x' \in (x; a+1) \Rightarrow x' > x \Rightarrow f(x') \geqslant f(x)$, т. е. f возрастает по базе $\{\dot{B}(a,\delta) \cap X\}$.

Если $a = +\infty$, то $(x; +\infty]$ — окрестность точки $+\infty$ (даже некоторый шар при $x > -\infty$, по теореме 1.1) $\Rightarrow \forall x' \in \dot{B}(a,\delta) \cap X \quad x' > x \Rightarrow f(x') \geqslant f(x)$, т. е. f возрастает по базе $\{\dot{B}(a,\delta) \cap X\}$.

Аналогично доказывается: если $X = \operatorname{dom} f \subset [-\infty; a)$, $\quad f \searrow$ (убывает в обычном смысле, т. е. $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$) и a — предельная точка множества X, тогда f убывает по базе $\{\dot{B}(a,\delta) \cap X\}$.

В частности, если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает ($n_1 \leqslant n_2 \Rightarrow x_{n_1} \leqslant x_{n_2}$), то она возрастает по базе $\{\dot{B}(+\infty,\delta) \cap \mathbb{N}\} = \{A_N\}$, где множества $A_N = \{n \in \mathbb{N}\colon n > N\} = \{n_0, n_0+1, \ldots\}$ (аналогично для убывающей последовательности).

2) Пусть $X = \operatorname{dom} f \subset (a; +\infty]$, $\quad f \nearrow$ (возрастает в обычном смысле, т. е. $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$) и a — предельная точка множества X. Тогда f **убывает** по базе $\{\dot{B}(a,\delta) \cap X\}$.

Доказательство. a — предельная точка $X \Rightarrow X \neq \varnothing$ (замечание 1 к определению 2.4 предельной точки). Рассмотрим $\forall x \in X \subset (a; +\infty] \Rightarrow x > a$. Если $a \in \mathbb{R}$, то

$a - 1 < a < x \Rightarrow (a-1; x)$ — окрестность точки a (следствие теоремы 1.1 о строении

шаров) $\Rightarrow \exists B(a,\delta) \subset (a-1; x)$. Тогда $\forall x' \in \dot{B}(a,\delta) \cap X \quad x' \in (a-1; x) \Rightarrow x' < x \Rightarrow f(x') \leqslant f(x)$, т. е. f убывает по базе $\{\dot{B}(a,\delta) \cap X\}$.

Если $a = -\infty$, то $[-\infty; x)$ — окрестность точки $-\infty$ (даже некоторый шар при $x < +\infty$, по теореме 1.1) $\Rightarrow \forall x' \in \dot{B}(a,\delta) \cap X \quad x' < x \Rightarrow f(x') \leqslant f(x)$, т. е. f убывает по базе $\{\dot{B}(a,\delta) \cap X\}$.

Аналогично доказывается: если $X = \operatorname{dom} f \subset (a; +\infty]$, $\quad f \searrow$ (убывает в обычном смысле, т. е. $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$) и a — предельная точка множества X, тогда f **возрастает** по базе $\{\dot{B}(a,\delta) \cap X\}$.

3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда f возрастает по базе $\{\dot{B}(0,\delta)\}$ и убывает по базе $\{(-\infty;-p) \cup (p;+\infty)\}$ (доказать в качестве упражнения).

4) $f(x,y) = \frac{1}{|x|+|y|}$, тогда f возрастает по базе $\{\dot{B}\big((0,0),\delta\big)\}$ (упражнение).

Комментарий: интуитивный смысл возрастания по базе — "если множество уменьшается, то значения функции на нём увеличиваются".

Теорема 5.3 (Предел монотонного отображения).
Если $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ возрастает по базе $\mathfrak{A}$, то существует $\lim_{\mathfrak{A}} f = \sup\{f(x)\colon x \in X\}$. При этом, если $f\colon X \to \mathbb{R}$, и f ограничено сверху, то $\lim_{\mathfrak{A}} f$ конечен. Аналогично, если отображение f убывает по базе $\mathfrak{A}$, то существует $\lim_{\mathfrak{A}} f = \inf\{f(x)\colon x \in X\}$. При этом, если $f\colon X \to \mathbb{R}$, и f ограничено снизу, то $\lim_{\mathfrak{A}} f$ конечен.

Доказательство. Пусть f возрастает. Обозначим $b = \sup\{f(x)\colon x \in X\}$.

1) $b \in \mathbb{R}$. По определению sup, для $\forall\varepsilon > 0$ число $b-\varepsilon$ не является верхней границей множества $\{f(x)\colon x \in X\}$, поэтому существует $x_0 \in X\colon f(x_0) > b-\varepsilon$. По определению возрастания по базе, $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) \geqslant f(x_0) > b-\varepsilon$. С другой стороны, b — верхняя граница множества $\{f(x)\colon x \in X\}$, поэтому для $\forall x \in A \quad f(x) \leqslant b < b+\varepsilon$. Получили:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad b-\varepsilon < f(x) < b+\varepsilon \Rightarrow |f(x)-b| < \varepsilon,\ \text{т. е. } \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = b.$$

2) $b = +\infty = \sup\{f(x)\colon x \in X\}$, тогда любое $p \in \mathbb{R}$ не является верхней границей множества $\{f(x)\colon x \in X\}$, поэтому существует $x_0 \in X\colon f(x_0) > p$. По определению возрастания по базе, $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) \geqslant f(x_0) > p$. Получили:

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > p,\ \text{т. е. } \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty.$$

3) $b = -\infty = \sup\{f(x)\colon x \in X\} \Rightarrow \forall x \in X \quad f(x) = -\infty \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = -\infty$ (предел постоянного отображения).

Если $f\colon X \to \mathbb{R}$, то $\{f(x)\colon x \in X\} \subset \mathbb{R}$ и если f ограничена сверху (т. е. множество $\{f(x)\colon x \in X\} \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху), то $\lim_{\mathfrak{A}} f = \sup\{f(x)\colon x \in X\} \in \mathbb{R}$ (конечный).

Для убывающего отображения доказательство аналогично: вместо верхней границы используется нижняя граница, вместо $b-\varepsilon$ используется $b+\varepsilon$ и наоборот, все неравенства, связанные с $f(x)$, заменяются на противоположные.

Важные частные случаи.

1) Если f возрастает (в обычном смысле) на $(-\infty;a) \cap \operatorname{dom} f$ и a — левосторонняя предельная точка $X = \operatorname{dom} f$, то существует $\lim\limits_{x\to a-} f(x) = \sup\{f(x)\colon x \in X,\ x < a\}$.

2) Если f возрастает (в обычном смысле) на $(a;+\infty) \cap \operatorname{dom} f$ и a — правосторонняя предельная точка $X = \operatorname{dom} f$, то существует $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \inf\{f(x)\colon x \in X,\ x > a\}$.

Предложить студентам самостоятельно сформулировать случаи 3) и 4) для функции, убывающей в обычном смысле, соответственно, на $(-\infty;a) \cap \operatorname{dom} f$ и на $(a;+\infty) \cap \operatorname{dom} f$.

5) Пусть $\langle a;b\rangle \subset \mathbb{R}$, $\quad a < b$, $\quad f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$. Если f монотонна на $\langle a;b\rangle$, то во всех внутренних точках промежутка существуют и конечны оба односторонних предела: если $a < c < b$ и f возрастает, то $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim\limits_{x\to c-} f(x)$; если f убывает, то $\lim\limits_{x\to c-} f(x) \geqslant f(c) \geqslant \lim\limits_{x\to c-} f(x)$ (если a или b не входят в $\langle a;b\rangle$, то пределы в соответствующих точках существуют, но могут быть бесконечными).

6) Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает ($n_1 \leqslant n_2 \Rightarrow x_{n_1} \leqslant x_{n_2}$), то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$; если при этом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху, то её

предел конечен. Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$; если при этом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена снизу, то её предел конечен.

6. Принцип сходимости.

Определение 6.1 (Верхний и нижний пределы функции).
Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{A}$ — база множеств и существует $A_0 \in \mathfrak{A}\colon A_0 \subset X$. Тогда для любого $A \in \mathfrak{A}$ $f(A) \subset \overline{\mathbb{R}}$ и в $\overline{\mathbb{R}}$ существуют точные границы $\sup f(A)$ и $\inf f(A)$. Верхним пределом функции f по базе $\mathfrak{A}$ называется $\inf\{\sup f(A)\colon A \in \mathfrak{A}\}$. Нижним пределом функции f по базе $\mathfrak{A}$ называется $\sup\{\inf f(A)\colon A \in \mathfrak{A}\}$.

Обозначаются: верхний предел $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$, нижний предел $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$. Если (Y,ρ) — метрическое пространство, $X \subset Y$, a — предельная точка X, то верхний и нижний пределы в точке a (по базе $\{\dot{B}(a,r) \cap X\}$) обозначаются $\overline{\lim}_a f = \overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$ и $\underline{\lim}_a f = \underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$. Для последовательности $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, соответственно, $\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$ (поскольку $+\infty$ — единственная предельная точка $\mathbb{N}$, обычно не пишут $n \to \infty$).

Примеры. 1) $f(x) = \sin x$, $\mathfrak{A} = \{(p; +\infty)\}$. Тогда

$$\sup f(A) = \sup\{\sin x\colon x \in (p;+\infty)\} = 1, \quad \inf f(A) = \inf\{\sin x\colon x \in (p;+\infty)\} = -1$$

(наибольшие и наименьшие значения на $(p;+\infty)$ достигаются в точках $\pi/2 + 2\pi n$ и $-\pi/2 + 2\pi n$). Получаем:

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \sin x = \inf_{A\in\mathfrak{A}}\{\sup f(A)\} = 1, \qquad \underline{\lim_{x\to+\infty}} \sin x = \sup_{A\in\mathfrak{A}}\{\inf f(A)\} = -1.$$

2) $f(n) = x_n = n(-1)^n$, $\quad \mathfrak{A} = \big\{\{m, m+1, \ldots\}\colon m \in \mathbb{N}\big\}$. Тогда для $A = \{m, m+1, \ldots\}$

$\sup f(A) = \sup\{n(-1)^n\colon n \geqslant m\} = +\infty$ (есть сколь угодно большие числа $x_{2k} = 2k$);

$\inf f(A) = \inf\{n(-1)^n\colon n \geqslant m\} = -\infty$ (есть числа $x_{2k-1} = -(2k-1)$ меньше $\forall p \in \mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \overline{\lim}\, x_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup\{n(-1)^n\colon n \geqslant m\} = +\infty, \ \underline{\lim}\, x_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf\{n(-1)^n\colon n \geqslant m\} = -\infty.$$

Теорема 6.1 (Свойства верхнего и нижнего пределов).
*1) Если $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) \leqslant p$, то $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leqslant p$;
если $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) \geqslant p$, то $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \geqslant p$.*
*2) Если $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < p$, то $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) < p$;
если $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f > p$, то $\exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > p$.*
3) $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leqslant \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$.
4) Если $\exists \lim f|_{X_0} = b$ (по базе $\{A \cap X_0\colon A \in \mathfrak{A}\}$), то $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leqslant b \leqslant \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$.

Доказательство. 1) $\forall x \in A$ $f(x) \leqslant p \Rightarrow p$ — верхняя граница для $f(A) \Rightarrow \sup f(A) \leqslant p$ (по определению sup)$\Rightarrow \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \inf\{\sup f(B)\colon B \in \mathfrak{A}\} \leqslant \sup f(A) \leqslant p$.

Для $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \sup\{\inf f(B)\colon B \in \mathfrak{A}\}$ — аналогично (по определению $\inf f(A) \geqslant p$).

2) $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \inf\{\sup f(A)\colon A \in \mathfrak{A}\} < p$, inf — наибольшая нижняя граница множества $\{\sup f(A)\colon A \in \mathfrak{A}\} \Rightarrow p$ — не нижняя граница множества $\{\sup f(A)\colon A \in \mathfrak{A}\}$. Это означает, что $\exists A_1 \in \mathfrak{A}\colon \sup f(A_1) < p$. По определению базы (2.1):

$$\exists A \in \mathfrak{A}\colon A \subset A_0 \cap A_1. \quad A \subset A_0 \subset \operatorname{dom} f \Rightarrow \forall x \in A \quad f(x) \text{ определено.}$$

$$A \subset A_1 \Rightarrow \forall x \in A \quad f(x) \in f(A_1) \Rightarrow f(x) \leqslant \sup f(A_1) < p.$$

$$\text{Получили: } \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) < p.$$

Для $\underline{\lim}$ — аналогично (вместо наибольшей нижней границы — наименьшая верхняя граница и неравенства заменяются на противоположные).

3) Доказываем от противного: предположим, что $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$, тогда существует $p \in \mathbb{R}$: $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < p < \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$. По пункту 2

$$\overline{\lim_{\mathfrak{A}}} f < p \Rightarrow \exists A_1 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_1 \quad f(x) < p, \quad \underline{\lim_{\mathfrak{A}}} f > p \Rightarrow \exists A_2 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_2 \quad f(x) < p$$

По определению базы $\exists B \in \mathfrak{A}\colon B \subset A_1 \cap A_2, \quad B \neq \varnothing \Rightarrow \exists x_0 \in B$.

$$x_0 \in B \Rightarrow x_0 \in A_1 \text{ и } x_0 \in A_2 \Rightarrow f(x_0) < p \text{ и } f(x_0) > p \text{ — противоречие.}$$

4) Обозначим $f_0 = f|_{X_0}$. От противного: предположим, что $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < b = \lim_{\{A \cap X_0\}} f_0$, тогда существует $p \in \mathbb{R}$: $\overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f < p < b$. По пункту 2

$$\exists A_0 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_0 \quad f(x) < p. \quad X_0 \subset X = \operatorname{dom} f \Rightarrow \forall x \in A_0 \cap X_0 \quad f(x) = f_0(x) < p.$$

По теореме 5.1 (предельный переход в неравенстве с $g(x) \equiv p$) тогда $\lim_{\{A \cap X_0\}} f_0 = b \leqslant p$ — противоречие с $p < b$.

Оценку $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f \leqslant b$ доказываем, предполагая $\underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f > p > b$ и снова используя пункт 2 (для $\underline{\lim}$).

Теорема 6.2 (Верхний и нижний пределы последовательности)**.**
Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность со значениями в* $\overline{\mathbb{R}}$, $y_n = \sup\{x_m \mid m \geqslant n\}$, $z_n = \inf\{x_m \mid m \geqslant n\}$. *Тогда* $y_n \searrow$, $y_n \to \overline{\lim}\, x_n$; $\quad z_n \nearrow$, $z_n \to \underline{\lim}\, x_n$.

Доказательство. $\{x_m \mid m \geqslant n+1\} \subset \{x_m \mid m \geqslant n\}$. y_n — верхняя граница множества $\{x_m \mid m \geqslant n\} \Rightarrow y_n$ — верхняя граница множества $\{x_m \mid m \geqslant n+1\}$. Тогда $y_{n+1} = \sup\{x_m \mid m \geqslant n+1\} \leqslant y_n$ (поскольку $\sup\{x_m \mid m \geqslant n+1\}$ — наименьшая верхняя граница множества $\{x_m \mid m \geqslant n+1\}$). Последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ убывает, тогда по теореме 5.3 (предел монотонного отображения, частный случай последовательности)

$$\exists \lim y_n = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \bigl\{ \sup\{x_m \mid m \geqslant n\} \bigr\} = \overline{\lim}\, x_n.$$

Для $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ — аналогично:

$$z_n \text{ — нижняя граница для } \{x_m \mid m \geqslant n+1\} \Rightarrow z_{n+1} = \inf\{x_m \mid m \geqslant n+1\} \geqslant z_n.$$

Теорема 6.3 (Подпоследовательности, сходящиеся к $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$)**.**
Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность со значениями в* $\overline{\mathbb{R}}$. *Тогда существуют подпоследовательности* $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : x_{n_k} \to \overline{\lim}\, x_n$ *и* $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} : x_{n_m} \to \underline{\lim}\, x_n$.

Доказательство.

1) Пусть $\overline{\lim}\, x_n = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = +\infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad y_n = \sup\{x_m \mid m \geqslant n\} = +\infty. \quad (1)$

Построим по индукции последовательность $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots : \forall k \in \mathbb{N} \quad x_{n_k} > k$. $\sup\{x_m \mid m \geqslant 1\} = +\infty \Rightarrow 1$ не является верхней границей $\{x_m \mid m \geqslant 1\} \Rightarrow \exists\, x_{n_1} > 1$.

Предположим, что уже построены $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ со свойством $x_{n_k} > k$. По (1)

$$y_{n_k+1} = \sup\{x_m \mid m \geqslant n_k + 1\} = +\infty \Rightarrow k+1 \text{ не является верхней границей множества } \{x_m \mid m \geqslant n_k + 1\} \Rightarrow \exists m \geqslant n_k + 1\colon x_m > k+1.$$

Выберем одно из таких m и обозначим его n_{k+1}. Тогда

$$n_{k+1} \geqslant n_k + 1 > n_k \text{ и } x_{n_{k+1}} > k+1, \text{ т. е. } n_{k+1} \text{ — требуемое.}$$

Подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойством $+\infty \geqslant x_{n_k} > k \to +\infty$. Тогда по теореме 5.2 о зажатой функции $x_{n_k} \to +\infty = \overline{\lim}\, x_n$.

2) Пусть $\overline{\lim}\, x_n = b \in \mathbb{R}$. Построим по индукции последовательность

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots : \forall k \in \mathbb{N} \quad b - \frac{1}{k} < x_{n_k} < b + \frac{1}{k}.$$

По теореме 6.2 $b = \lim y_n = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Тогда

$$\text{для } \varepsilon = \frac{1}{k} > 0 \ \exists N_k \colon \forall n > N_k \quad |y_n - b| < \frac{1}{k} \Rightarrow b - \frac{1}{k} < y_n < b + \frac{1}{k}.$$

$$b = \inf\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \forall n > N_k \quad b \leqslant y_n < b + \frac{1}{k};$$

$$y_n = \sup\{x_m \mid m \geqslant n\} \geqslant b > b - \frac{1}{k} \Rightarrow b - \frac{1}{k} \text{ не является верхней границей}$$

$$\text{множества } \{x_m \mid m \geqslant n\} \Rightarrow \exists m \geqslant n \colon x_m > b - \frac{1}{k}.$$

$$\text{Получили: } \forall k \in \mathbb{N} \ \exists N_k \colon \forall n > N_k \ \exists m \geqslant n \colon b - \frac{1}{k} < x_m \leqslant y_n < b + \frac{1}{k}. \tag{2}$$

Если взять $k = 1$, то существует $m \geqslant n > N_1$ со свойством (2). Обозначим через n_1 одно из таких m, тогда

$$b - 1 < x_{n_1} < b + 1.$$

Предположим, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ со свойством

$$b - \frac{1}{p} < x_{n_p} < b + \frac{1}{p}, \quad p = 1, \ldots, k-1$$

уже построены. Тогда для $\forall n > \max\{N_k, n_{k-1}\} \geqslant N_k \ \exists m \geqslant n$ со свойством (2). Обозначим через n_k одно из таких m, тогда

$$n_k \geqslant n > n_{k-1}, \quad b - \frac{1}{k} < x_{n_k} < b + \frac{1}{k}.$$

Последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ построена.

$$b - \frac{1}{k} < x_{n_k} < b + \frac{1}{k}, \quad b - \frac{1}{k} \to b, \ b + \frac{1}{k} \to b \Rightarrow x_{n_k} \to b = \overline{\lim}\, x_n$$

по теореме 5.2 о зажатой функции.

3) $\overline{\lim}\, x_n = -\infty = \lim y_n \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R} \ \exists N \colon \forall n > N \quad y_n < p$.

$$x_n \leqslant \sup\{x_m \mid m \geqslant n\} = y_n \Rightarrow \forall n > N \quad x_n < p \Rightarrow x_n \to -\infty$$

(т. е. в этом случае сама последовательность $x_n \to -\infty = \overline{\lim}\, x_n$).

Для $\underline{\lim}$ — аналогично (3 случая: 1) $\underline{\lim} = -\infty$; 2) $\underline{\lim} = b \in \mathbb{R}$; 3) $\underline{\lim} = +\infty$. Используется z_n вместо y_n, sup вместо inf). Рекомендация для студентов — записать эту часть доказательства самостоятельно. На экзамене для отличников — провести эту часть доказательства.

Комментарий на лекции: поскольку если $x_{n_k} \to c$, то $\underline{\lim}\, x_n \leqslant c \leqslant \overline{\lim}\, x_n$ и $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \colon x_{n_k} \to \overline{\lim}\, x_n$, $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty} \colon x_{n_m} \to \underline{\lim}\, x_n$, то $\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{\lim}\, x_n$ ещё называют наибольшим и наименьшим пределами. При этом для произвольной базы $\mathfrak{A}$, вообще говоря, не существуют подмножества $X_1, X_2 \subset \operatorname{dom} f$ такие, что $\lim_{\{A \cap X_1\}} f|_{X_1} = \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$ и $\lim_{\{A \cap X_2\}} f|_{X_2} = \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f$. Но если $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty} \colon \forall A_n \in \mathfrak{A}$ и $\forall A \in \mathfrak{A} \ \exists A_n \subset A$, то такие подмножества существуют (неплохая задача для отличников, но для экзамена сложновата).

Теорема 6.4 (Признак существования предела в $\overline{\mathbb{R}}$).
Пусть $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{A}$ *— база множеств. Тогда* $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = b \in \overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = b$.

Доказательство. "$\Rightarrow$"
1) $b \in \mathbb{R}$. $\lim_{\mathfrak{A}} f = b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad |f(x) - b| < \varepsilon \Leftrightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Поскольку для любого $x \in A$ $f(x)$ определено, $A \subset \operatorname{dom} f$, т. е. определены $\overline{\lim} f$ и $\underline{\lim} f$. По теореме 6.1, п.1 и 3 (свойства $\overline{\lim} f$ и $\underline{\lim} f$)

$$\forall x \in A \quad b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon \leqslant \underline{\lim} f \leqslant \overline{\lim} f \leqslant b + \varepsilon.$$

В этом неравенстве перейдём пределу при $\varepsilon \to 0$ (теорема 5.1 и предел суммы и разности):

$$b \leqslant \underline{\lim} f \leqslant \overline{\lim} f \leqslant b \Rightarrow \underline{\lim} f = \overline{\lim} f = b.$$

2) $b = +\infty$. $\lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty \Rightarrow \forall p \in \mathbb{R}\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > p$. По теореме 6.1, п.1 и 3

$$\forall x \in A \quad p < f(x) \Rightarrow p \leqslant \underline{\lim} f \leqslant \overline{\lim} f \leqslant +\infty.$$

В этом неравенстве перейдём пределу при $p \to +\infty$:

$$+\infty \leqslant \underline{\lim} f \leqslant \overline{\lim} f \leqslant +\infty \Rightarrow \underline{\lim} f = \overline{\lim} f = +\infty.$$

3) $b = -\infty$ — аналогично (получить $-\infty \leqslant \underline{\lim} f \leqslant \overline{\lim} f \leqslant -\infty$).
"$\Leftarrow$"
1) $\underline{\lim} f = \overline{\lim} f = b$, $b \in \mathbb{R}$. По теореме 6.1, п.2 (свойства $\overline{\lim} f$ и $\underline{\lim} f$)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \begin{cases} \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = b < b + \varepsilon \Rightarrow \exists A_1 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_1 \quad f(x) < b + \varepsilon \\ \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = b > b - \varepsilon \Rightarrow \exists A_2 \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A_2 \quad f(x) > b - \varepsilon \end{cases}$$

По определению базы, $\exists B \in \mathfrak{A}\colon B \subset A_1 \cap A_2$. Тогда

$\forall x \in B \Rightarrow x \in A_1$ и $x \in A_2 \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists B \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in B \quad |f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f = b.$$

2) $b = +\infty$, $\forall p \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = \underline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = +\infty > p \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > p$ (по теореме 6.1, п.2), т. е.

$$\forall p \in \mathbb{R}\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad f(x) > p \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = +\infty.$$

3) $b = -\infty$ — аналогично ($\forall p \in \mathbb{R} \quad \overline{\lim}_{\mathfrak{A}} f = -\infty < p$).

Пример. Ещё раз получаем отсутствие предела у $\sin$ при $x \to +\infty$, поскольку $\underline{\lim}\limits_{x\to+\infty} \sin x = -1$, $\overline{\lim}\limits_{x\to+\infty} \sin x = 1$.

Определение 6.2 (Сходимость в себе).
Пусть (Y, ρ) *— метрическое пространство,* $f\colon X \to Y$, $\mathfrak{A}$ *— база множеств. Говорят, что отображение* f *сходится в себе по базе* $\mathfrak{A}$*, если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x, x' \in A \quad \rho\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon.$$

Комментарий: значения f на множествах из $\mathfrak{A}$ становятся "сколь угодно близки" друг к другу.

Теорема 6.5 (Принцип сходимости).
Если $Y = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$*, или* $\mathbb{R}^n$*, то* $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f \in Y \Leftrightarrow f$ *сходится в себе по базе* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. "$\Rightarrow$". По определению метрики в Y, $\rho(a,b)=|a-b|$ (абсолютная величина, модуль комплексного числа или длина вектора). Рассмотрим $\forall\varepsilon>0\Rightarrow\frac{\varepsilon}{2}>0$.

$$\exists\lim_{\mathfrak{A}} f=b\in Y\Rightarrow \text{ для } \frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon \forall x,x'\in A\quad |f(x)-b|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ и } |f(x')-b|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда по свойствам длины вектора

$$|f(x)-f(x')|=|f(x)-b+b-f(x')|\leqslant|f(x)-b|+|(-1)(f(x')-b)|=|f(x)-b|+|f(x')-b|<\varepsilon,$$

$$\text{т. е. } \forall\varepsilon>0\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon\forall x,x'\in A\quad \rho\big(f(x),f(x')\big)=|f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

"$\Leftarrow$"

1) $f\colon X\to\mathbb{R}$, $\quad f$ сходится в себе.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon\forall x,x'\in A\quad |f(x)-f(x')|<\varepsilon\Rightarrow f(x')-\varepsilon<f(x)<f(x')+\varepsilon.$$

При фиксированном $x'\in A$ правая и левая части этого неравенства — константы, принадлежащие $\mathbb{R}$. По теореме 6.1 (свойства верхнего и нижнего пределов, п.1 и 3) отсюда следует:

$$f(x')-\varepsilon\leqslant\varliminf_{\mathfrak{A}} f\leqslant\varlimsup_{\mathfrak{A}} f\leqslant f(x')+\varepsilon\Rightarrow\varliminf_{\mathfrak{A}} f,\varlimsup_{\mathfrak{A}} f\in\mathbb{R} \text{ и } 0\leqslant\varlimsup_{\mathfrak{A}} f-\varliminf_{\mathfrak{A}} f\leqslant 2\varepsilon.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $\varepsilon\to 0+$ (теорема 5.1), получим:

$$0\leqslant\varlimsup_{\mathfrak{A}} f-\varliminf_{\mathfrak{A}} f\leqslant 0\Rightarrow\varliminf_{\mathfrak{A}} f=\varlimsup_{\mathfrak{A}} f\in\mathbb{R}\Rightarrow \text{по предыдущей теореме 6.4 } \exists\lim_{\mathfrak{A}} f\in\mathbb{R}.$$

Комментарий: хороший вопрос для студентов на лекции — нельзя ли сократить доказательство и перейти к пределу в предыдущем неравенстве $f(x')-\varepsilon\leqslant\varliminf_{\mathfrak{A}} f\leqslant\varlimsup_{\mathfrak{A}} f\leqslant f(x')+\varepsilon$ и получить странный результат $\lim_{\mathfrak{A}} f=f(x')$? Грамотный ответ: поскольку $x'\in A$ и множество A, вообще говоря, зависит от ε, то $f(x')$ при предельном переходе $\varepsilon\to 0$ нельзя считать константой.

2) $f\colon X\to\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}^n$ (рассматриваем $\mathbb{C}$ как $\mathbb{R}^2$), f сходится в себе.

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A\in\mathfrak{A}\colon\forall x,x'\in A\quad |f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

$$f(x)-f(x')=\big(f_1(x)-f_1(x'),\dots,f_n(x)-f_n(x')\big),\ f_1,\dots,f_n \text{ — координатные функции.}$$

По оценке длины вектора через его координаты (введение):

$$\forall k=1,\dots,n,\forall x,x'\in A\quad |f_k(x)-f_k(x')|\leqslant|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$
$$\Rightarrow\forall k=1,\dots,n\ f_k \text{ сходится в себе.}$$

По доказанному в п. 1 $\forall k=1,\dots,n$ $\exists\lim_{\mathfrak{A}} f_k=b_k\in\mathbb{R}$. Тогда по теореме 2.9 о покоординатной сходимости $\exists\lim_{\mathfrak{A}} f=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$.

Некоторые частные случаи.

1) Принцип сходимости для последовательности (Больцано-Коши).

$$\exists\lim x_n\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{R}\colon\forall m,n>N\quad |x_m-x_n|<\varepsilon.$$

Замечание. Поскольку при $m=n$ $|x_m-x_n|=0<\varepsilon$ и при $m\neq n$ всегда можно считать, что $m>n$, принцип сходимости можно сформулировать так:

$$\exists\lim x_n\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{R}\colon\forall m>n>N\quad |x_m-x_n|<\varepsilon$$

(такая формулировка удобна для теории рядов).

2) Принцип сходимости Больцано-Коши для функции в точке $b\in\overline{\mathbb{R}}$ слева.

$$\exists\lim_{x\to b-} f(x)\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists B<b\colon\forall x,x'\in\operatorname{dom} f\colon B<x<x'<b\quad |f(x')-f(x)|<\varepsilon$$

(такая формулировка удобна для теории несобственных интегралов).
Доказательство. По определению 2.7 предел слева — это предел по базе $\{\dot{B}(b,\delta)\cap X_{b_-}\}$ (соответственно, сходимость в себе — по этой же базе). Если $b\in\mathbb{R}$, то $\dot{B}(b,\delta)\cap X_{b_-}=(b-\delta;b)\cap X$ (односторонние пределы на языке неравенств, после определения 2.7). Если $b=+\infty$, то по определению предела в точке $+\infty$ $\dot{B}(+\infty,\delta)\cap X=(p;+\infty)\cap X$. Обозначим: $B=b-\delta$ для $b\in\mathbb{R}$ и $B=p$ для $b=+\infty$, тогда в обоих случаях

$$\dot{B}(b,\delta)\cap X_{b_-}=(B;b)\cap X \text{ и } x,x'\in(B;b)\cap X\Leftrightarrow B<x,x'<b \text{ и } x,x'\in X.$$

Аналогично случаю последовательности, всегда можно считать, что $x<x'$.

Задание для студентов: сформулировать и доказать аналогичное утверждение для предела справа.