ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПРЕДЕЛОВ ПО БАЗЕ К ОТДЕЛЬНЫМ ЧАСТЯМ КУРСА

ПОТЕПУН А. В.

Contents

1. Изложение начала главы "Непрерывные функции" на основе предела по базе фильтра.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. $E \subset X$, $a \in E$. Система множеств $\{B(a, \delta) \mid \delta > 0\}$ образует базу (пример после определения базы), $a \in B(a, \delta) \cap E \Rightarrow B(a, \delta) \cap E \neq \varnothing \Rightarrow \mathfrak{A} = \{B(a, \delta) \cap E \mid \delta > 0\}$ образуют базу (замечание 1 к определению базы).

Определение 1.1 (Отображение, непрерывное в точке)**.**
Пусть (X, ρ_X), (Y, ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E$, $f \colon E \to Y$. Отображение f называется непрерывным в точке a, если существует предел f по базе $\mathfrak{A} = \{B(a, \delta) \cap E \mid \delta > 0\}$.

Лемма 1.1. *Если f непрерывно в точке a, то $\lim_{\mathfrak{A}} f = f(a)$.*

Доказательство.

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists B(a, \delta) \cap E \colon \forall x \in B(a, \delta) \cap E \quad \rho_Y(f(x), l) < \varepsilon.$$

Поскольку $a \in B(a, \delta) \cap E$, то $\rho_Y(f(a), l) < \varepsilon$. Получили: $\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leqslant \rho_Y(f(a), l) < \varepsilon$. Перейдём в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0+$:

$$0 \leqslant \rho_Y(f(a), l) \leqslant 0 \Rightarrow \rho_Y(f(a), l) = 0 \Rightarrow l = f(a).$$

Теперь можно сформулировать определение непрерывности так:

$$f \text{ непрерывно в точке } a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \operatorname{dom} f \colon \rho_X(x, a) < \delta \quad \rho_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \forall B(f(a), \varepsilon) \; \exists B(a, \delta) \colon \forall x \in B(a, \delta) \cap E \quad f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Частный случай: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$.

$$f \text{ непрерывно в точке } a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \colon \forall x \in \operatorname{dom} f \colon |x - a| < \delta \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

(это определение принадлежит Коши). Точно так же формулируется для $X = \mathbb{R}^m$, $Y = \mathbb{R}^n$ ($|x-a|$ и $|f(x)-f(a)|$ — длины соответствующих векторов).

Если $E_0 \subset E$ и для любого $a \in E_0$ f непрерывно в точке a, то говорят, что f *непрерывно на множестве* E_0. При этом, если f непрерывно на множестве $E = \operatorname{dom} f$, то f называем просто *непрерывным.*

Примеры. 1) $f\colon E \to Y,\ \forall x \in E \quad f(x) = b=$const. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x, a \in E \quad \rho_Y\big((f(x), f(a)\big) = \rho(b,b) = 0 < \varepsilon \Rightarrow f \text{ непрерывно.}$$

2) $f = id_X$ (т. е. $\forall x \in X \quad f(x) = x$). Для $\forall \varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$. Тогда для $\forall x, a \in X\colon \rho(x,a) < \delta \quad \rho\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon$, т. е. f непрерывно.

3) $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = \overline{z}$. Для $\forall \varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$. Тогда для $\forall w, z \in X\colon \rho(w,z) = |w-z| < \delta \quad |f(w) - f(z)| = |\overline{w} - \overline{z}| = |w-z| < \varepsilon$, т. е. f непрерывно.

4) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x_1,\dots,x_n) = x_i$, т. е. $f = pr_i$. Для $\forall \varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$. Тогда для $\forall x = (x_1,\dots,x_n), a = (a_1,\dots,a_n) \in X\colon \rho(x,a) = |x-a| < \delta \quad \rho\big(f(x), f(a)\big) = |x_i - a_i|$. По свойствам длины вектора $|x_i - a_i| \leqslant |x-a| < \varepsilon$, т. е. f непрерывно.

5) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ (длина вектора x). Для $\forall \varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$. Тогда для $\forall x, a \in X\colon \rho(x,a) = |x-a| < \delta \quad \rho\big(f(x), f(a)\big) = \big||x| - |a|\big|$. По свойствам длины вектора $\big||x| - |a|\big| \leqslant |x-a| < \varepsilon$, т. е. f непрерывно.

Определение 1.2 (Изолированная точка множества)**.**
Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$. Точка $a \in E$ называется изолированной точкой множества E, если $\exists B(a,r)\colon \dot B(a,r) \cap E = \varnothing \Leftrightarrow B(a,r) \cap E = \{a\}$

(т. е. в этом шаре содержится единственная точка a из множества E).

Замечания. 1) Достаточно потребовать существования некоторой окрестности $V(a)$ со свойством $\dot V(a) \cap E = \varnothing$, поскольку по определению окрестности (определение 1.2 из главы о пределах), существует $\dot B(a,r) \subset \dot V(a)$.
2) Если $a \in E$ и a — не изолированная точка, то a — предельная точка E (поскольку в этом случае для $\forall B(a,r)$ $\dot B(a,r) \cap E \neq \varnothing$ — определение предельной точки 2.4 из главы о пределах). Таким образом, все точки множества E делятся на изолированные и предельные, при этом бывают предельные точки множества, не входящие в него (например, концы открытого промежутка).

Лемма 1.2 (Непрерывность в предельной и изолированной точке)**.**
Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, $a \in E$, $f\colon E \to Y$. Тогда:

1) Если a — предельная точка E, то (f непрерывно в точке a) $\Leftrightarrow$ ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$);

2) Если a — изолированная точка E, то отображение f непрерывно в точке a.

Доказательство. 1) "$\Rightarrow$"

$$f \text{ непрерывно в точке } a \Rightarrow \forall B(f(a),\varepsilon)\ \exists B(a,\delta)\colon \forall x \in B(a,\delta) \cap E \quad f(x) \in B(f(a),\varepsilon).$$

$$\text{Тогда } \forall x \in \dot B(a,\delta) \cap E \quad f(x) \in B(f(a),\varepsilon) \text{ и } a \text{ — предельная точка } E \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

по определению предела в точке (определение 2.5 из главы о пределах).

"$\Leftarrow$"

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow \forall B(f(a),\varepsilon)\ \exists B(a,\delta)\colon \forall x \in \dot B(a,\delta) \cap E \quad f(x) \in B(f(a),\varepsilon).$$

$$\text{При } x = a \in B(a,\delta) \cap E \quad f(x) = f(a) \in B(f(a),\varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \in B(a,\delta) \cap E \quad f(x) \in B(f(a),\varepsilon) \Rightarrow f \text{ непрерывно в точке } a.$$

2) a — изолированная точка $E \Rightarrow \exists B(a,\delta)\colon B(a,\delta)\cap E = \{a\}$. Тогда $x \in B(a,\delta)\cap E \Rightarrow x = a \Rightarrow f(x) = f(a) \in B\big(f(a),\varepsilon\big)$ и это верно для любого $B\big(f(a),\varepsilon\big)$. Получили:

$$\forall B\big(f(a),\varepsilon\big)\ \exists B(a,\delta)\cap E\colon \forall x \in B(a,\delta)\cap E \quad f(x) = f(a) \in B\big(f(a),\varepsilon\big) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f \text{ непрерывно в точке } a.$$

Следствие (Продолжение по непрерывности в предельную точку).
Пусть $f\colon E \to Y$, a — предельная точка E. Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b \in Y$, то отображение

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in E,\ x \neq a \\ b, & \text{если } x = a \end{cases} \qquad \text{непрерывно в точке } a$$

(поскольку $b = \tilde f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \tilde f(x)$ — в определении предела участвуют только точки $x \neq a$).

Пример. Функция $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ непрерывна при $x \neq 0$ (будет доказано в параграфе о непрерывности элементарных функций), $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, тогда

$$\tilde f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0 \\ 1, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на $\mathbb{R}$.

Теорема 1.1 (Связь непрерывности отображения и его сужений).
Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y) — метрические пространства, $E \subset X$, $f\colon E \to Y$.

1) Если $E_0 \subset E$, $a \in E_0$, f непрерывно в точке a, то $f|_{E_0}$ непрерывно в точке a.

2) Если $E_1 \cup E_2 = E$, $f|_{E_1}$, $f|_{E_2}$ непрерывны в точке a, то f непрерывно в точке a.

3) Если $\exists \delta > 0\colon E_0 \supset B(a,\delta)\cap E$, то ($f$ непрерывно в точке a) $\Leftrightarrow$ ($f|_{E_0}$ непрерывно в точке a)

Доказательство. 1) $a \in E_0 \Rightarrow \forall B(a,\delta)\cap E_0 \neq \varnothing$.

$B(a,\delta)\cap E_0 = (B(a,\delta)\cap E)\cap E_0 \Rightarrow$ база $\mathfrak{A}_0 = \{B(a,\delta)\cap E_0 \mid \delta > 0\}$ — это пересечения множеств из базы $\mathfrak{A} = \{B(a,\delta)\cap E \mid \delta > 0\}$ с множеством E_0.

Тогда по п. 1 теоремы о связи пределов отображения и его сужений (теорема 2.5 из главы "Теория пределов")

$$\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = f(a) \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}_0} f|_{E_0} = f(a), \text{ т. е.}$$
$$(f \text{ непрерывно в точке } a) \Rightarrow (f|_{E_0} \text{ непрерывно в точке } a)$$

2) Обозначим $\mathfrak{A}_1 = \{B(a,\delta)\cap E_1 \mid \delta > 0\}$, $\mathfrak{A}_2 = \{B(a,\delta)\cap E_2 \mid \delta > 0\}$.
$f|_{E_1}$ непрерывно в точке $a \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}_1} f|_{E_1} = f(a)$ и $f|_{E_2}$ непрерывно в точке $a \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}_2} f|_{E_2} = f(a)$. Тогда по п. 2 теоремы о связи пределов отображения и его сужений $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f = f(a) \Rightarrow f$ непрерывно в точке a.

3) Аналогично, со ссылкой на п. 3 теоремы о связи пределов отображения и его сужений (поскольку $E_0 \supset B(a,\delta)\cap E \in \mathfrak{A}$).

Комментарий к п. 3: будет ли f непрерывно в точке a, зависит от поведения f в сколь угодно малой окрестности точки a, т. е. непрерывность — понятие локальное.

Определение 1.3 (Непрерывность справа и слева).
Пусть (Y,ρ) *— метрическое пространство,* $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f\colon E \to Y$. *Отображение* f *называется непрерывным слева в точке* a, *если* $f|_{E_{a-}}$ *непрерывно в точке* a ($E_{a-} = E \cap [-\infty; a]$). *Отображение* f *называется непрерывным справа в точке* a, *если* $f|_{E_{a+}}$ *непрерывно в точке* a ($E_{a+} = E \cap [a; +\infty]$).

Замечание. Если $a \in E$, то $a \in E_{a+},\ a \in E_{a-}$.

Следствие (Теорема об односторонней непрерывности). *В условиях определения 1.3*

$$f \text{ непрерывно в точке } a \Leftrightarrow f \text{ непрерывно справа и слева в точке } a.$$

Доказательство. Утверждение "$\Rightarrow$" следует из п. 1 теоремы о связи непрерывности отображения и его сужений, поскольку $a \in E_{a+},\ E_{a-}$.

Утверждение "$\Leftarrow$" следует из п. 2 той же теоремы, поскольку $E_{a+} \cup E_{a-} = E$.

Теорема 1.2 (Вторая теорема о пределе композиции).
Пусть (Y,ρ_Y), (Z,ρ_Z) *— метрические пространства,* $f\colon X \to Y$, $E \subset Y$, $g\colon E \to Z$, $\mathfrak{A}$ *— база множеств. Если*

1) $\exists \lim_{\mathfrak{A}} f(x) = b$;

2) g *непрерывно в точке* b;

3) $\forall A \in \mathfrak{A} \quad A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \neq \varnothing$,

то $\exists \lim (g \circ f) = g(b)$ *по базе* $\mathfrak{A}_1 = \{A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \mid A \in \mathfrak{A}\}$.

Доказательство. $\mathfrak{A}_1$ является базой по замечанию 1 к определению базы (определение 2.1 из главы "Теория пределов").

$$g \text{ непрерывно в точке } b \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall y \in E\colon \rho_Y(y,b) < \delta \quad \rho_Z(g(y), g(b)) < \varepsilon.$$

$$\lim_{\mathfrak{A}} f(x) = b \Rightarrow \text{ для } \delta > 0\ \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad \rho_Y(f(x), b) < \delta.$$

$$\text{Тогда для } \forall x \in A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \quad x \in A \text{ и } x \in \operatorname{dom}(g \circ f) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_Y(f(x), b) < \delta \text{ и } f(x) \in E = \operatorname{dom} g \Rightarrow \rho_Z\big(g(f(x)), g(b)\big) < \varepsilon.$$

Получили:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \in \mathfrak{A}_1 : \forall x \in A \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \quad \rho_Z\big(g(f(x)), g(b)\big) < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}_1} (g \circ f) = g(b).$$

Следствие 1 (Вторая теорема о пределе композиции в точке).
Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y), (Z,ρ_Z) *— метрические пространства,* $E_1 \subset X$, $f\colon E_1 \to Y$, $E_2 \subset Y$, $g\colon E_2 \to Z$. *Если*

1) $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;

2) g *непрерывно в точке* b;

3) a *— предельная точка множества* $\operatorname{dom}(g \circ f)$,

то $\exists \lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = g(b)$.

Для доказательства применяем теорему для баз $\mathfrak{A} = \{\dot{B}(a,\delta) \cap E_1 \mid \delta > 0\}$ и $\mathfrak{A}_1 = \{\dot{B}(a,\delta) \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \mid \delta > 0\}$ (поскольку $(\dot{B}(a,\delta) \cap E_1) \cap \operatorname{dom}(g \circ f) = \dot{B}(a,\delta) \cap \operatorname{dom}(g \circ f)$ и a — предельная точка множества $\operatorname{dom}(g \circ f)$, поэтому $\dot{B}(a,\delta) \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \neq \varnothing$).

Следствие 2 (Непрерывность композиции).
Пусть (X,ρ_X), (Y,ρ_Y), (Z,ρ_Z) *— метрические пространства,* $E_1 \subset X$, $f\colon E_1 \to Y$, $E_2 \subset Y$, $g\colon E_2 \to Z$.

1) Если f непрерывно в точке a, g непрерывно в точке $f(a)$, то $g \circ f$ непрерывно в точке a;

2) Если f и g непрерывны (в своих областях определения), то $g \circ f$ непрерывно (в своей области определения).

Доказательство.

$$1)\ f \text{ непрерывно в точке } a \Rightarrow \exists \lim_{\mathfrak{A}} f = f(a), \text{ где } \mathfrak{A} = \{B(a,\delta) \cap E_1 \mid \delta > 0\}.$$

g непрерывно в точке $f(a) \Rightarrow f(a) \in \operatorname{dom} g \Rightarrow a \in \operatorname{dom}(g \circ f) \Rightarrow B(a,\delta) \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \neq \varnothing$. В теореме рассматриваем в качестве точки $b = f(a)$, $\mathfrak{A}_1 = \{B(a,\delta) \cap \operatorname{dom}(g \circ f) \mid \delta > 0\}$.

2) $\forall a \in \operatorname{dom}(g \circ f) \subset \operatorname{dom} f \Rightarrow f$ непрерывно в точке a (f непрерывно на $\operatorname{dom} f$).

$$f(a) \in \operatorname{dom} g \Rightarrow g \text{ непрерывно в точке } f(a) \overset{1)}{\Rightarrow} g \circ f \text{ непрерывно в точке } a$$

(верно для $\forall a \in \operatorname{dom}(g \circ f)$).

Дальнейшие теоремы о непрерывных функциях можно доказывать, используя

$$f \text{ непрерывно в точке } a \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f(x) = f(a), \text{ где } \mathfrak{A} = \{B(a,\delta) \cap \operatorname{dom} f \mid \delta > 0\}$$

и ссылаясь на соответствующие теоремы из главы "Теория пределов". Это, в частности, удобно тем, что можно не делать различий между предельными и изолированными точками. Полезно для практических занятий сформулировать следующее утверждение: любая функция, полученная из элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и композиций, непрерывна в своей области определения (анонсировав, что непрерывность всех элементарных функций будет доказана). Можно предложить студентам доказать это утверждение индукцией по числу операций.

Доказательство теоремы 2.3 из главы "Теория пределов" о равносильности сходимости к конечному пределу в метриках $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$ (проводится после доказательства непрерывности элементарных функций)

а) Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}$ — база, $l \in \mathbb{R}$, $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике в $\mathbb{R}$. Функция $\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ непрерывна на $\mathbb{R}$, тогда по второй теореме о пределе композиции, $\lim_{\mathfrak{A}} \varphi \circ f = \varphi(l)$, т. е. по определению предела $\varphi \circ f$ в $\mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad \big|\varphi\big(f(x)\big) - \varphi(l)\big| < \varepsilon.$$

Но по определению метрики в $\overline{\mathbb{R}}$, $\big|\varphi\big(f(x)\big) - \varphi(l)\big| = \rho_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(x), l\big)$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad \rho_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(x), l\big) < \varepsilon \Rightarrow l = \lim_{\mathfrak{A}} f \text{ по метрике } \overline{\mathbb{R}}.$$

б) Пусть $l = \lim_{\mathfrak{A}} f$ по метрике в $\overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad \rho_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(x), l\big) < \varepsilon.$$

По определению метрики в $\overline{\mathbb{R}}$, $\quad \rho_{\overline{\mathbb{R}}}\big(f(x), l\big) = \big|\varphi\big(f(x)\big) - \varphi(l)\big|$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathfrak{A}\colon \forall x \in A \quad \big|\varphi\big(f(x)\big) - \varphi(l)\big| < \varepsilon.$$

По определению предела, это означает, что $\lim_{\mathfrak{A}} \varphi \circ f = \varphi(l)$ по метрике в $\mathbb{R}$. Поскольку $f\colon X \to \mathbb{R}$, $\quad f(x), l \in \mathbb{R}$, $\varphi\colon \mathbb{R} \to (-1;1)$, то $\varphi\big(f(x)\big)$, $\varphi(l) \in (-1;1)$. Функция $\varphi^{-1}(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ непрерывна на $(-1;1)$, поэтому по второй теореме о пределе композиции,

$$\lim_{\mathfrak{A}} \varphi^{-1} \circ \varphi \circ f = \varphi^{-1}\big(\varphi(l)\big), \text{ т. е. } \lim_{\mathfrak{A}} f = l \text{ по метрике в } \mathbb{R}.$$

Теорема 1.3 (О покоординатной непрерывности).
Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $E \subset X$, $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, $f_1,\dots,f_n$ — его координатные функции. Тогда

$$f \text{ непрерывно в точке } a \Leftrightarrow \forall k = 1,\dots,n \quad f_k \text{ непрерывно в точке } a$$

Доказательство. $\mathfrak{A} = \{B(a,\delta)\cap E \mid \delta > 0\}$.

$$f \text{ непрерывно в точке } a \Leftrightarrow \lim_{\mathfrak{A}} f = f(a) = \big(f_1(a),\dots,f_n(a)\big).$$

По теореме о покоординатной сходимости (теорема 2.9 из главы "Теория пределов")

$$\lim_{\mathfrak{A}} f = f(a) = \big(f_1(a),\dots,f_n(a)\big) \Leftrightarrow \forall k = 1,\dots,n \quad \lim_{\mathfrak{A}} f_k = f_k(a) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall k = 1,\dots,n \quad f_k \text{ непрерывно в точке } a.$$

2. Длина пути как предел. Тригонометрические функции.

Я излагал теоремы о длине пути в составе главы о непрерывных функциях и строго определял тригонометрические функции на основе длины дуги окружности, не используя площадей, в том числе для доказательства $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ используются оценки длины дуги через проекции.

Определение 2.1 (Путь, носитель пути, замкнутый путь).
Непрерывное отображение $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ называется путём в $\mathbb{R}^n$. Множество $\operatorname{im}\gamma = \{\gamma(t) \mid t \in [a;b]\} \subset \mathbb{R}^n$ называется носителем пути γ. Точка $\gamma(a)$ называется началом пути γ, точка $\gamma(b)$ — концом пути γ. Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, путь называется замкнутым.

Замечание. Пусть $\gamma(t) = x = (x_1,\dots,x_n)$, тогда

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ \vdots \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases} \qquad \gamma_1,\dots,\gamma_n \text{ — координатные функции отображения } \gamma.$$

По теореме о покоординатной непрерывности

$$\gamma \text{ — путь (непрерывен на } [a;b]) \Leftrightarrow \gamma_1,\dots,\gamma_n \text{ — непрерывны на } [a;b].$$

Определение 2.2 (Дробление промежутка, длина ломаной на пути, соответствующая дроблению). *Пусть $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$, $\tau = \{t_0,\dots,t_m\}$. Конечное множество τ называется дроблением промежутка $[a;b]$.*

$$|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \text{ — длина вектора, соединяющего точки } \gamma(t_i) \text{ и } \gamma(t_{i+1}) \text{ на пути.}$$

$$p(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \text{ — длина ломаной на пути, соответствующая дроблению } \tau.$$

Определение 2.3 (Обобщённая последовательность).
Пусть $\mathrm{A} \neq \varnothing$ и в множестве A задано отношение "$\succ$" (предпорядок) со свойствами:
1) $\alpha \succ \beta$ и $\beta \succ \gamma \Rightarrow \alpha \succ \gamma$;
2) для $\forall \alpha,\beta \in \mathrm{A}$ $\quad \exists \gamma \in \mathrm{A}\colon \gamma \succ \alpha$ и $\gamma \succ \beta$.
Тогда отображение $f\colon \mathrm{A} \to X$ называется обобщённой последовательностью с множеством индексов A и со значениями в множестве X. Обозначение: $f(\alpha) = x_\alpha$, вся обобщённая последовательность — $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$.

Пример 1. Обычная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathrm{A}=\mathbb{N}$, $m\succ n \Leftrightarrow m>n$ в обычном смысле. Проверка свойств из определения:

1) $m>n$ и $n>p \Rightarrow m>p$ — обычное свойство порядка в $\mathbb{N}$.

2) $\forall m,n\in\mathbb{N}\ \exists p=\max\{m,n\}+1 \Rightarrow p>m$ и $p>n$.

Пример 2. $\mathrm{A}=\{\tau\subset[a;b]\mid\tau$ — конечно, $a,b\in\tau\}$ — множество всех дроблений промежутка $[a;b]$. Тогда $\mathrm{A}\neq\varnothing$ (множество $\{a,b\}$ из двух элементов принадлежит A). Предпорядок: $\tau_1\succ\tau_2\Leftrightarrow\tau_1\supset\tau_2$ (как множества). Проверка свойств:

1) $\tau_1\supset\tau_2$ и $\tau_2\supset\tau_3\Rightarrow\tau_1\supset\tau_3$ — очевидно по определению включения множеств.

2) $\forall\tau_1,\tau_2\in\mathrm{A}\quad\tau_1\cup\tau_2\in\mathrm{A},\quad\tau_1\cup\tau_2\supset\tau_1,\ \tau_1\cup\tau_2\supset\tau_2$.

По определению, функция $\{p(\tau)\}_{\tau\in\mathrm{A}}$ — обобщённая последовательность.

Пример 3. Пусть T — непустое множество, $f\colon T\to\mathbb{R}$ — отображение, $f(t)=x_t$. Обозначим

$$\mathrm{A}=\{K\subset T\mid K \text{ — непустое конечное множество}\},\ s_K=\sum_{t\in K}x_t.$$

Предпорядок в множестве A — аналогично примеру 2 (по включению). По определению, $\{s_K\}_{K\in\mathrm{A}}$ — обобщённая последовательность. Этот пример найдёт применение при определении суммы числового семейства.

Лемма 2.1. *Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — обобщённая последовательность. Для $\alpha\in\mathrm{A}$ обозначим $A_\alpha=\{\beta\in\mathrm{A}\mid\beta\succ\alpha\}$. Тогда $\mathfrak{A}=\{A_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{A}\}$ — база множеств.*

Доказательство.

$$\mathrm{A}\neq\varnothing\Rightarrow\exists\alpha\in\mathrm{A}\Rightarrow\exists A_\alpha,\ \text{т. е. система множеств } \mathfrak{A}=\{A_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{A}\} \text{ — не пуста.}$$

По свойству 2 множества индексов (для случая $\alpha=\beta$):

$$\forall\alpha\in\mathrm{A}\ \exists\gamma\in\mathrm{A}\colon\gamma\succ\alpha\Rightarrow\forall A_\alpha\neq\varnothing.$$

По свойству 2 множества индексов для $\forall\alpha,\beta\in\mathrm{A}\quad\exists\gamma\in\mathrm{A}\colon\gamma\succ\alpha$ и $\gamma\succ\beta$. Тогда для $\forall\delta\in A_\gamma$ получаем по свойству 1 множества индексов:

$$\delta\succ\gamma,\ \gamma\succ\alpha \text{ и } \gamma\succ\beta\Rightarrow\delta\succ\alpha \text{ и } \delta\succ\beta\Rightarrow\delta\in A_\alpha \text{ и } \delta\in A_\beta,\ \text{т. е. } A_\gamma\subset A_\alpha\cap A_\beta.$$

Определение 2.4 (Предел обобщённой последовательности).
Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — обобщённая последовательность со значениями в X. Предел отображения $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ по базе $\mathfrak{A}=\{A_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{A}\}$ называется пределом обобщённой последовательности. По общему определению предела по базе (определение 2.2 из главы "Теория пределов"):

$$l=\lim x_\alpha\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists A_{\alpha_0}\in\mathfrak{A}\colon\forall\alpha\in A_{\alpha_0}\quad\rho(x_\alpha,l)<\varepsilon\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists\alpha_0\in\mathrm{A}\colon\forall\alpha\succ\alpha_0\quad\rho(x_\alpha,l)<\varepsilon.$$

Комментарий: вся теория пределов применима к обобщённым последовательностям.

Определение 2.5 (Возрастающие и убывающие обобщённые последовательности).
Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — обобщённая последовательность со значениями в $\mathbb{R}$ или $\overline{\mathbb{R}}$.

$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *называется возрастающей, если $\alpha\succ\beta\Rightarrow x_\alpha\geqslant x_\beta$. Обозначение: $x_\alpha\uparrow$.*

$\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ *называется убывающей, если $\alpha\succ\beta\Rightarrow x_\alpha\leqslant x_\beta$. Обозначение: $x_\alpha\downarrow$.*

Теорема 2.1 (Предел монотонной обобщённой последовательности).
Если $x_\alpha\uparrow$, то $\exists\lim x_\alpha=\sup\{x_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{A}\}$.
Если $x_\alpha\downarrow$, то $\exists\lim x_\alpha=\inf\{x_\alpha\mid\alpha\in\mathrm{A}\}$.

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ возрастает, докажем, что x_α возрастает по базе $\mathfrak{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$. Для $\forall\alpha \in \mathrm{A}$ $\exists A_\alpha \in \mathfrak{A}\colon \forall\beta \in A_\alpha \quad \beta \succ \alpha \Rightarrow x_\beta \geqslant x_\alpha$, т. е. выполнены условия определения возрастания отображения по базе (определение 5.1 из главы "Теория пределов"). Тогда по теореме о пределе монотонного отображения (теорема 5.3 из главы "Теория пределов") существует $\lim_{\mathfrak{A}} x_\alpha = \sup\{x_\alpha \mid \alpha \in \mathrm{A}\}$.

Для убывающей обобщённой последовательности — аналогично (проверяем её убывание по базе $\mathfrak{A}$).

Определение 2.6 (Длина пути).
Пусть $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ — путь, τ — дробление промежутка $[a;b]$, $p(\tau)$ — длина ломаной, соответствующая дроблению τ. Длиной пути γ называется предел длин ломаных на пути (предел обобщённой последовательности $\{p(\tau)\}_{\tau\in\mathrm{A}}$).

Теорема 2.2 (Существование длины пути).
Пусть $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ — путь, τ — дробление промежутка $[a;b]$, $p(\tau)$ — длина ломаной, соответствующая дроблению τ. Тогда $\exists \lim p(\tau) = \sup\{p(\tau) \mid \tau \in \mathrm{A}\}$.

Доказательство. Докажем, что обобщённая последовательность $\{p(\tau)\}_{\tau\in\mathrm{A}}$ возрастает. Пусть $\tau' \succ \tau \Rightarrow \tau' \supset \tau$, т. е. конечное множество τ' содержит k дополнительных точек по сравнению с τ. Докажем, что $p(\tau') \geqslant p(\tau)$ индукцией по k.

1) $k = 1$, т. е. $\tau' = \tau \cup \{t'\}$ (присоединена одна точка, расположенная между точками t_{i_0} и t_{i_0+1}: $t_{i_0} < t' < t_{i_0+1}$. По определению метрики в $\mathbb{R}^n$ $\rho(\gamma(t_{i_0+1}), \gamma(t_{i_0}) \leqslant \rho(\gamma(t_{i_0+1}), \gamma(t') + \rho(\gamma(t'), \gamma(t_{i_0})$, т. е. $|\gamma(t_{i_0+1}) - \gamma(t_{i_0}| \leqslant |\gamma(t_{i_0+1}) - \gamma(t')| + |\gamma(t') - \gamma(t_{i_0}|$.

$$p(\tau) = \sum_{i=0}^{i_0-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| + |\gamma(t_{i_0+1}) - \gamma(t_{i_0}| + \sum_{i=i_0+1}^{m-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{i_0-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| + |\gamma(t') - \gamma(t_{i_0}| + |\gamma(t_{i_0+1}) - \gamma(t')| + \sum_{i=i_0+1}^{m-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)| = p(\tau').$$

2) Пусть утверждение доказано для k дополнительных точек, докажем для $k+1$.

$$\tau' = \tau \cup \{t_1, \ldots, t_{k+1}\} = \tau'' \cup \{t_{k+1}\}, \text{ где } \tau'' = \tau \cup \{t_1, \ldots, t_k\}.$$

По предположению для k точек и доказанному для одной присоединённой точки

$$p(\tau) \leqslant p(\tau'') \leqslant p(\tau') \text{ — возрастание } \{p(\tau)\}_{\tau\in\mathrm{A}} \text{ доказано по индукции.}$$

По теореме о пределе монотонного отображения (теорема 5.3 из главы "Теория пределов") $\exists \lim p(\tau) = \sup\{p(\tau) \mid \tau \in \mathrm{A}\}$. Длина пути γ обозначается $l(\gamma)$.

Замечание. Поскольку $\forall p(\tau) \geqslant 0$, то $0 \leqslant l(\gamma) = \sup\{p(\tau) \mid \tau \in \mathrm{A}\} \leqslant +\infty$.

Теорема 2.3 (Аддитивность длины пути).
*Пусть $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ — путь, $a < c < b$, $\gamma_1 = \gamma|_{[a;c]}$, $\gamma_2 = \gamma|_{[c;b]}$.
Тогда $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.*

Доказательство.

$$\text{Пусть } \tau_1 = \{t_0, \ldots, t_k\} \text{ — дробление } [a;c]\colon a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = c,$$
$$\tau_2 = \{t_k, \ldots, t_m\} \text{ — дробление } [c;b]\colon c = t_k < t_{k+1} < \ldots < t_m = b.$$
$$\text{Тогда } \tau = \tau_1 \cup \tau_2 = \{t_0, \ldots, t_k, \ldots, t_m\} \text{ — дробление } [a;b].$$
$$p(\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} \left| \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \right| = \sum_{i=0}^{k-1} \left| \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \right| + \sum_{i=k}^{m-1} \left| \gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i) \right| =$$
$$= p(\tau_1) + p(\tau_2) \Rightarrow p(\tau) \geqslant p(\tau_1), p(\tau_2) \text{ (обе суммы неотрицательны).}$$
$$\text{Если } l(\gamma_1) = \sup\{p(\tau_1) \mid \tau_1 \text{ — дробление } [a;c]\} = +\infty,$$
$$\text{то для } \forall M \in \mathbb{R}\ \exists p(\tau_1) > M \Rightarrow p(\tau) > M \Rightarrow$$
$$\Rightarrow l(\gamma) = \sup\{p(\tau) \mid \tau \text{ — дробление } [a;b]\} = +\infty \Rightarrow l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

Аналогично, если $l(\gamma_2) = +\infty$, то $l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. Осталось доказать для случая $l(\gamma_1) < +\infty$, $l(\gamma_2) < +\infty$.

1) Пусть τ — произвольное дробление отреезка $[a;b]$. Если в множестве τ нет точки c, то образуем дробление $\tau' = \tau \cup \{c\}$, а если $c \in \tau$, то положим $\tau' = \tau$. В обоих случаях

$$\tau_1 = \tau' \cap [a;c] \text{ — дробление } [a;c], \quad \tau_2 = \tau' \cap [c;b] \text{ — дробление } [c;b], \quad \tau' = \tau_1 \cup \tau_2.$$

В теореме 2.2 (существование длины пути) было доказано, что обобщённая последовательность $\{p(\tau)\}_{\tau \in \mathrm{A}}$ возрастает. Тогда

$$p(\tau) \leqslant p(\tau') = p(\tau_1) + p(\tau_2) \leqslant \sup\{p(\tau_1)\} + \sup\{p(\tau_2)\} = l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$
$$l(\gamma_1) + l(\gamma_2) \text{ — верхняя граница множества } \{p(\tau)\} \Rightarrow l(\gamma) = \sup\{p(\tau)\} \leqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2).$$

2) Для произвольного $\varepsilon > 0$ $\quad l(\gamma_1) - \varepsilon < l(\gamma_1) = \sup\{p(\tau_1)\}$, т. е. $l(\gamma_1) - \varepsilon$ не является верхней границей множества $\{p(\tau_1)\} \Rightarrow \exists \tau_1$ — дробление $[a;c]$: $p(\tau_1) > l(\gamma_1) - \varepsilon$.

Аналогично, $\exists \tau_2$ — дробление $[c;b]$: $p(\tau_2) > l(\gamma_2) - \varepsilon$.

$$\text{Тогда для } \tau = \tau_1 \cup \tau_2 \text{ — дробления } [a;b] \quad p(\tau) = p(\tau_1) + p(\tau_2) > l(\gamma_1) + l(\gamma_2) - 2\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow l(\gamma) = \sup\{p(\tau)\} \geqslant p(\tau) > l(\gamma_1) + l(\gamma_2) - 2\varepsilon.$$

В этом неравенстве перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0+$ (по теореме 5.1 из главы "Теория пределов"), получим $l(\gamma) \geqslant l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$. Из неравенства в п. 1 тогда следует:
$l(\gamma) = l(\gamma_1) + l(\gamma_2)$.

Теорема 2.4 (Оценки длины пути через координатные функции)**.**
Пусть $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ *— путь,* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *— его координатные функции. Тогда*

1) $\forall i = 1, \ldots, n \quad l(\gamma) \geqslant |\gamma_i(b) - \gamma_i(a)|$.

2) Если все γ_i *— монотонные функции, то* $l(\gamma) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |\gamma_i(b) - \gamma_i(a)|$.

Доказательство. 1) Пусть $\tau_0 = \{a, b\}$, $\quad \tau = \{t_0, \ldots, t_m\}\colon a = t_0 < \ldots < t_m = b$, $p(\tau_0) = |\gamma(b) - \gamma(a)|$, $\quad p(\tau) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)|$. В теореме 2.2 о существовании длины пути было доказано, что обобщённая последовательность $\{p(\tau)\}_{\tau \in \mathrm{A}}$ возрастает. Поскольку $\tau \supset \tau_0$, $\quad p(\tau) \geqslant p(\tau_0)$. По оценке длины вектора через координаты

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad |\gamma_i(b) - \gamma_i(a)| \leqslant |\gamma(b) - \gamma(a)| = p(\tau_0) \leqslant p(\tau) \leqslant \sup\{p(\tau)\} = l(\gamma).$$

2) По оценке длины вектора через координаты

$$|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\tau) = \sum_{k=0}^{m-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{m-1} |\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)|.$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)) = -\gamma_i(t_0) + \gamma_i(t_1) - \gamma_i(t_1) + \gamma_i(t_2) - \ldots$$
$$\ldots + \gamma_i(t_{m-1}) - \gamma_i(t_{m-1}) + \gamma_i(t_m) = \gamma_i(t_m) - \gamma_i(t_0) = \gamma_i(b) - \gamma_i(a).$$

Поскольку функция γ_i монотонна, все разности $\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)$ — одного знака, а тогда абсолютная величина суммы таких слагаемых равна сумме их абсолютных величин:

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)| = \left| \sum_{k=0}^{m-1} (\gamma_i(t_{k+1}) - \gamma_i(t_k)) \right| = |\gamma_i(b) - \gamma_i(a)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p(\tau) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(b) - \gamma_i(a)| \Rightarrow l(\gamma) = \sup\{p(\tau)\} \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(b) - \gamma_i(a)|.$$

Следствие. *Путь с монотонными координатными функциями — спрямляем.*

Теорема 2.5 (Непрерывность длины пути с монотонными координатными функциями).
Пусть $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ — путь, его координатные функции $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — монотонны. Тогда для $a \leqslant c \leqslant b$ функция $f(c) = l(\gamma|_{[a;c]})$ — возрастает и непрерывна.

Доказательство. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — монотонны $\Rightarrow \gamma|_{[a;c]}$ — спрямляем, т. е. $f(c) < +\infty$. Пусть $a \leqslant c_1 < c_2 \leqslant b$. По аддитивности длины пути

$$l(\gamma|_{[a;c_2]}) = l(\gamma|_{[a;c_1]}) + l(\gamma|_{[c_1;c_2]}), \text{ т. е. } f(c_2) = f(c_1) + l(\gamma|_{[c_1;c_2]}) \geqslant f(c_1) \Rightarrow f \nearrow .$$

$$0 \leqslant f(c_2) - f(c_1) = l(\gamma|_{[c_1;c_2]}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(c_2) - \gamma_i(c_1)| \qquad (*)$$

(по теореме об оценках длины пути через координатные функции). Все γ_i непрерывны

$$\text{на } [a;b] \Rightarrow \lim_{c_2 \to c_1+} \gamma_i(c_2) = \gamma_i(c_1) \Rightarrow \lim_{c_2 \to c_1+} |\gamma_i(c_2) - \gamma_i(c_1)| = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{c_2 \to c_1+} \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(c_2) - \gamma_i(c_1)| = 0 \text{ (предел суммы).}$$

По теореме о зажатой функции (теорема 5.2 из главы "Теория пределов") и неравенствах (*) тогда $\lim\limits_{c_2 \to c_1+} \big(f(c_2) - f(c_1)\big) = 0$, т. е. $\lim\limits_{c_2 \to c_1+} f(c_2) = f(c_1) \Rightarrow f$ непрерывна справа в точке $c_1 : a \leqslant c_1 < b$.

Поскольку f возрастает, $f(c_1) \leqslant f(c_2) \Rightarrow |f(c_1) - f(c_2)| = f(c_2) - f(c_1)$. Тогда по (*)

$$0 \leqslant |f(c_1) - f(c_2)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(c_2) - \gamma_i(c_1)| = \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i(c_1) - \gamma_i(c_2)|.$$

По непрерывности γ_i на $[a;b]$ $\lim\limits_{c_1\to c_2-}\gamma_i(c_1)=\gamma_i(c_2)\Rightarrow\lim\limits_{c_1\to c_2-}|\gamma_i(c_1)-\gamma_i(c_2)|=0$. Аналогично случаю предела в точке c_1 справа по теореме о зажатой функции получим: $\lim\limits_{c_1\to c_2-}|f(c_1)-f(c_2)|=0\Rightarrow\lim\limits_{c_1\to c_2-}f(c_1)=f(c_2)$, т. е. f непрерывна слева в точке c_2, $a<c_2\leqslant b$. В итоге получили: f непрерывна (двусторонне) в точках c: $a<c<b$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b, т. е. непрерывна на $[a;b]$.

Замечание. На самом деле имеет место более сильный результат: если путь γ спрямляем, то f непрерывна (монотонность координатных функций не является необходимой) — без доказательства.

Определение 2.7 (Замена параметра на пути).
Пусть $\gamma\colon[a;b]\to\mathbb{R}^n$ — путь, $\varphi\colon[p;q]\xrightarrow{\text{на}}[a;b]$, φ — строго монотонна. Тогда φ биективна (инъективность следует из строгой монотонности). $\varphi([p;q])=[a;b]$ (промежуток), поэтому φ непрерывна по теореме "Признак непрерывности монотонной функции". По теореме о непрерывности композиции отображение $\gamma_1=\gamma\circ\varphi$ непрерывно, $\gamma_1\colon[p;q]\to\mathbb{R}^n$, т. е. γ_1 — путь. В этом случае говорят, что путь γ_1 получен из пути γ заменой параметра.

Поскольку функция φ строго монотонна и биективна, существует $\varphi^{-1}\colon[a;b]\xrightarrow{\text{на}}[p;q]$ — тоже строго монотонна и непрерывна. Тогда $\gamma=\gamma\circ\varphi\circ\varphi^{-1}=\gamma_1\circ\varphi^{-1}$, т. е. и γ получен из γ_1 заменой параметра при помощи обратной функции.

Теорема 2.6 (Сохранение длины пути при замене параметра).
Если путь γ_1 получен из пути γ заменой параметра, то $l(\gamma_1)=l(\gamma)$.

Доказательство. Пусть $\gamma\colon[a;b]\to\mathbb{R}^n$, $\varphi\colon[p;q]\xrightarrow{\text{на}}[a;b]$, φ — строго монотонна, $\gamma_1=\gamma\circ\varphi$. Рассмотрим дробление $\tau'=\{u_o,\dots,u_m\}$, $p=u_0<u_1<\ldots<u_m=q$. Если φ возрастает, то $a=\varphi(p)=\varphi(u_0)<\varphi(u_1)<\ldots<\varphi(u_m)=\varphi(q)=b$. Обозначим $t_i=\varphi(u_i)$, тогда $\tau=\{t_0,\dots,t_m\}$ — дробление промежутка $[a;b]$ и $\tau=\varphi(\tau')$ (образ множества). Длина ломаной на пути γ, соответствующая дроблению τ:

$$p(\tau)=\sum_{i=0}^{m-1}|\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)|=\sum_{i=0}^{m-1}|\gamma(\varphi(u_{i+1}))-\gamma(\varphi(u_i))|=\sum_{i=0}^{m-1}|\gamma_1(u_{i+1})-\gamma_1(u_i)|=p(\tau')$$

(длина ломаной на пути γ_1, соответствующая дроблению τ').

Если φ убывает, то $b=\varphi(p)=\varphi(u_0)>\varphi(u_1)>\ldots>\varphi(u_m)=\varphi(q)=a$, т. е. $\tau=\{t_0,\dots,t_m\}$ — дробление промежутка $[a;b]$ и $\tau=\varphi(\tau')$, только точки $t_i=\varphi(u_i)$ расположены в убывающем порядке. Для пути γ расположим их в возрастающем порядке: $a=t_m<t_{m-1}<\ldots<t_0=b$, тогда длина ломаной на пути γ:

$$p(\tau)=\sum_{i=m-1}^{i=0}|\gamma(t_i)-\gamma(t_{i+1})|=\sum_{i=m-1}^{i=0}|\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)|\ \text{(поскольку } |x|=|-x|\text{)}.$$

$$\sum_{i=m-1}^{i=0}|\gamma(t_{i+1})-\gamma(t_i)|=\sum_{i=m-1}^{i=0}|\gamma(\varphi(u_{i+1}))-\gamma(\varphi(u_i))|=\sum_{i=m-1}^{i=0}|\gamma_1(u_{i+1})-\gamma_1(u_i)|=p(\tau')$$

(длина ломаной на пути γ_1, соответствующая дроблению τ', только длины звеньев суммируются в противоположном порядке).

С помощью строго монотонной функции φ^{-1} любому дроблению τ промежутка $[a;b]$ сопоставим дробление $\tau'=\varphi^{-1}(\tau)$ промежутка $[p;q]$, при этом по доказанному

$p(\tau') = p(\tau)$, т. е. между дроблениями промежутков $[a;b]$ и $[p;q]$ установлено взаимно однозначное соответствие с сохранением длины ломаных на путях γ и γ_1. Тогда

$$l(\gamma_1) = \sup\{p(\tau') \mid \tau' \text{ — дробление } [p;q]\} = \sup\{p(\tau) \mid \tau \text{ — дробление } [a;b]\} = l(\gamma).$$

Определение 2.8 (Простой путь, простая кривая).
Пусть $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ *— путь.*

1) Если γ *инъективен, то* γ *называется простым незамкнутым путём.*

2) Если γ *— замкнутый путь и* $\gamma(t) = \gamma(t') \Rightarrow \{t, t'\} = \{a, b\}$*, то* γ *называется простым замкнутым путём.*

Если γ *— простой путь (замкнутый или незамкнутый), то множество* $M = \gamma([a;b])$ *называется простой кривой.*

Лемма 2.2. *Если* $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$ *— простой незамкнутый путь,* $M = \gamma([a;b])$*, то отображение* $\gamma^{-1}\colon M \to [a;b]$ *непрерывно.*

Доказательство. Предположим, что отображение γ^{-1} не является непрерывным в точке $x \in M$. По отрицанию непрерывности "на языке последовательностей" это означает, что существует последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $x_n \in M$, $x_n \to x$, но для $t_n = \gamma^{-1}(x_n)$ $\quad t_n \not\to t = \gamma^{-1}(x)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0\colon \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n > N\colon |t_n - t| \geqslant \varepsilon$. Выберем $n_1 > 1\colon |t_1 - t| \geqslant \varepsilon$. Предположим, что уже выбраны $n_1 < \ldots < n_k$ такие, что $\forall i = 1, \ldots k \quad |t_{n_i} - t| \geqslant \varepsilon$. Тогда для $N = n_k$ выберем $n_{k+1} > n_k\colon |t_{n_{k+1}} - t| \geqslant \varepsilon$. Таким образом, в силу принципа индукции построена последовательность $\{t_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, такая, что для $\forall k \in \mathbb{N} \quad |t_{n_k} - t| \geqslant \varepsilon$.

$t_{n_k} = \gamma^{-1}(x_{n_k}) \in [a;b]$, тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса существует её подпоследовательность $\{t_{n_{k_l}}\}_{l\in\mathbb{N}}$, такая, что $t_{n_{k_l}} \to t'$. По теореме о предельном переходе в неравенстве $a \leqslant t_{n_{k_l}} \leqslant b \Rightarrow a \leqslant t' \leqslant b$, т. е. $t' \in [a;b]$, при этом $|t_{n_{k_l}} - t| \geqslant \varepsilon \Rightarrow t' \neq t$. Отображение γ непрерывно, $t_{n_{k_l}} \to t' \Rightarrow x_{n_{k_l}} = \gamma(t_{n_{k_l}}) \to \gamma(t')$.

$x_n \to x \Rightarrow x_{n_{k_l}} \to x = \gamma(t)$ (подпоследовательность). По единственности предела

$\gamma(t) = \gamma(t')$, но $t' \neq t$ — противоречие с инъективностью γ.

Лемма 2.3. *Если* $\varphi\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ *непрерывна и инъективна, то* φ *строго монотонна.*

Доказательство. Пусть $\varphi(a) = p$, $\varphi(b) = q$, тогда в силу инъективности $p \neq q$. Предположим, что $p < q$.
1) Докажем, что для $\forall x\colon a < x < b \quad p < \varphi(x) < q$. Из инъективности следует, что $\varphi(x) \neq p$, $\varphi(x) \neq q$.

а) Предположим, что $\varphi(x) < p$, т. е. $\varphi(x) < p < q = \varphi(b)$. Поскольку φ непрерывна, по теореме Больцано-Вейерштрасса о промежуточных значениях существует $x_1 \in [x;b]\colon \varphi(x_1) = p = \varphi(a)$, при этом $x_1 \geqslant x > a$ — противоречие с инъективностью.

б) Предположим, что $\varphi(x) > q$, т. е. $\varphi(a) = p < q < \varphi(x)$. Поскольку φ непрерывна, по теореме Больцано-Вейерштрасса о промежуточных значениях существует $x_2 \in [a;x]\colon \varphi(x_2) = q = \varphi(b)$, при этом $x_2 \leqslant x < b$ — противоречие с инъективностью.
Получили: для $\forall x_1, x_2\colon a < x_1 < x_2 < b \quad \varphi(a) < \varphi(x_1) < \varphi(b)$ (по утверждению 1). Теперь применим утверждение 1 к промежутку $[x_1;b]$:

$$x_1 < x_2 < b, \quad \varphi(x_1) < \varphi(b) \Rightarrow \varphi(x_1) < \varphi(x_2) < \varphi(b), \text{ т. е. } \varphi(x_1) < \varphi(x_2).$$

Если $a = x_1 < x_2 < b$, то только что доказано: $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$.
Если $a < x_1 < x_2 = b$, то по утверждению 1 $\varphi(a) < \varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ и если $x_1 = a$, $x_2 = b$,

то по исходному предположению $\varphi(a) = p < q = \varphi(b)$. В итоге:

$$\forall x_1, x_2 \in [a;b]\colon x_1 < x_2 \quad \varphi(x_1) < \varphi(x_2), \text{ т. е. функция } \varphi \text{ строго возрастает.}$$

Если $p > q$, то аналогично доказываем, что функция φ строго убывает (все неравенства, в которых участвует функция φ, заменяются на противоположные).

Теорема 2.7 (Независимость длины простого незамкнутого пути от параметризации)**.**
Если $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_1 : [p;q] \to \mathbb{R}^n$ *— простые незамкнутые пути и* $\gamma([a;b]) = \gamma_1([p;q])$, *то* $l(\gamma) = l(\gamma_1)$.

Доказательство. Докажем, что в условиях теоремы путь γ_1 получен из пути γ заменой параметра. Обозначим $M = \gamma([a;b]) = \gamma_1([p;q])$. Поскольку γ_1 — простой незамкнутый путь, отображение $\gamma_1 : [p;q] \xrightarrow{\text{на}} M$ непрерывно и инъективно. По лемме 2.2 отображение $\gamma^{-1}\colon M \xrightarrow{\text{на}} [a;b]$ непрерывно и тоже инъективно, тогда композиция $\gamma^{-1} \circ \gamma_1 : [p;q] \xrightarrow{\text{на}} [a;b]$ непрерывна и инъективна. По лемме 2.3:

$$\varphi = \gamma^{-1} \circ \gamma_1 : [p;q] \xrightarrow{\text{на}} [a;b] \text{ строго монотонна, а тогда } \gamma_1 = \gamma \circ \gamma^{-1} \circ \gamma_1 = \gamma \circ \varphi.$$

По теореме 2.6 тогда $l(\gamma) = l(\gamma_1)$.

Замечание. Аналогично, длина простого замкнутого пути тоже не зависит от параметризации (без доказательства).

Комментарий для лектора: можно предложить студентам доказать это (предупредить, что задача не самая простая). В частности, утверждение $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$ верно только для случая, когда начала и концы путей γ и γ_1 совпадают.

Ввиду этих результатов можно определить длину простой кривой M (<u>множества</u> на плоскости) как длину любого простого пути с носителем M.

Тригонометрические функции

Рассмотрим простой незамкнутый путь

$$\gamma\colon \begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [0;1] \text{ (носитель — первая четверть окружности).}$$

Координатные функции непрерывны (операции над элементарными функциями, которые непрерывны: арифметические действия и композиция). При этом очевидно, что $x(t)$ строго убывает, а $y(t)$ строго возрастает, поэтому по следствию из теоремы 2.4 об оценках длины пути путь γ спрямляем. Числом π называется удвоенная длина пути γ (длина полуокружности радиуса 1). По теореме 2.4

$$|y(1) - y(0)| \leqslant l(\gamma) \leqslant |x(1) - x(0)| + |y(1) - y(0)|, \text{ т. е. } 1 \leqslant l(\gamma) \leqslant 2 \Rightarrow 2 \leqslant \pi \leqslant 4.$$

Рассмотрим функцию $l(y) = l(\gamma|_{[0;y]})$, $y \in [0;1]$ (длина дуги единичной окружности от точки $(1,0)$ до точки (x,y)). По теореме 2.5 (непрерывность длины пути с монотонными координатными функциями) функция l непрерывна. Если $0 \leqslant y_1 < y_2 \leqslant 1$, то по теоремам об аддитивности длины пути (2.3) и об оценках длины пути через координатные функции (2.4)

$$l(y_2) = l(\gamma|_{[0;y_2]}) = l(\gamma|_{[0;y_1]}) + l(\gamma|_{[y_1;y_2]}) \geqslant l(y_1) + (y_2 - y_1) > l(y_1) \Rightarrow l \text{ строго возрастает.}$$

По теореме об образе промежутка множество принимаемых ею значений — это промежуток $[l(0); l(1)] = [l(\gamma|_{[0;0]}); l(\gamma|_{[0;1]})] = [0; \pi/2]$. Поскольку $l(y)$ непрерывна и строго возрастает, по теореме о непрерывности обратной функции у функции l существует непрерывная строго возрастающая обратная функция $l^{-1}\colon [0;\pi/2] \xrightarrow{\text{на}} [0;1]$. Эта функция называется sin, т. е. $y = \sin l$, $l \in [0;\pi/2]$. Тогда для точки (x,y) на окружности $x = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 l} = \cos l$ (по определению). Поскольку sin строго возрастает на $[0;\pi/2]$, из определения ясно, что cos строго убывает.

Определим sin и cos для второй четверти окружности. Поворот на угол $\frac{\pi}{2}$, если рассматривать $\mathbb{R}^2$ как комплексную плоскость, это умножение на число i: $T(x+iy) = i(x+iy) = -y+ix$. Для $\mathbb{R}^2$: $T(x,y) = (-y,x)$. При этом повороте дуга окружности от точки $(1,0)$ до точки (x,y) переходит в дугу от $(0,1)$ до $(-y,x)$.

Поскольку $|T(z_1)-T(z_2)| = |iz_1 - iz_2| = |i|\cdot|z_1-z_2| = |z_1-z_2|$, поворот T сохраняет расстояния, т. е. длины ломаных на путях $\gamma|_{[0;y]}$ и $T\circ\gamma|_{[0;y]}$ одинаковы, поэтому и длины соответствующих дуг одинаковы. По аддитивности длины длина дуги l_1 от $(1,0)$ до $(-y,x)$ равна $l(\gamma) + l\big(T\circ\gamma|_{[0;y]}\big) = \frac{\pi}{2} + l$. Определяем sin и cos на промежутке $[\pi/2;\pi]$:

$$y_1 = \sin l_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right) = x(l) = \cos l; \quad x_1 = \cos l_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}+l\right) = -y(l) = -\sin l.$$

Поскольку $\sin l_1 = \cos l = \cos\left(l_1 - \frac{\pi}{2}\right)$ и $\cos l_1 = -\sin l = -\sin\left(l_1-\frac{\pi}{2}\right)$, (композиции непрерывной функции $l = l_1 - \frac{\pi}{2}$ с sin и cos на $[0;\pi/2]$), то на промежутке $[\pi/2;\pi]$ sin и cos непрерывны и строго убывают. Поскольку sin и cos в точке $\frac{\pi}{2}$ непрерывны справа и слева, в итоге получаем непрерывность на промежутке $[0;\pi]$.

Для определения sin и cos на $[\pi;3\pi/2]$ рассмотрим поворот на угол π (умножение на -1): $T_1(x,y) = (-x;-y)$. Аналогично, длины дуг от $(1,0)$ до (x,y) и от $(-1,0)$ до $(-x,-y)$ одинаковы. По аддитивности длины длина l_2 дуги от $(1,0)$ до $(-x,-y)$ равна $l(\gamma)+l(T\circ\gamma)+l\big(T_1\circ\gamma|_{[0;y]}\big) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+l = \pi+l$.

$$y_2 = \sin l_2 = \sin(\pi+l) = -y(l) = -\sin l; \quad x_2 = \cos l_2 = \cos(\pi+l) = -x(l) = -\cos l.$$

Аналогично предыдущему

$$\sin l_2 = -\sin l = -\sin(l_2-\pi), \quad \cos l_2 = -\cos l = -\cos(l_2-\pi)$$

(композиции непрерывной функции $l = l_2 - \pi$ с sin и cos на $[0;\pi/2]$), то на промежутке $[\pi;3\pi/2]$ sin и cos непрерывны. Из непрерывности sin и cos в точке π справа и слева следует непрерывность на $[0;3\pi/2]$.

Для определения sin и cos на $[3\pi/2;2\pi]$ рассмотрим поворот на угол $\frac{3\pi}{2}$ (умножение на $-i$): $T_2(x+iy) = (-i)(x+iy) = y-ix$. Аналогично, для $\mathbb{R}^2$: $T_2(x,y) = (y,-x)$. При этом повороте дуга окружности от точки $(1,0)$ до точки (x,y) переходит в дугу от $(0,-1)$ до $(y,-x)$, длины дуг от $(1,0)$ до (x,y) и от $(-1,0)$ до $(y,-x)$ одинаковы. По аддитивности длины длина l_3 дуги от $(1,0)$ до $(y,-x)$ равна $l(\gamma)+l(T\circ\gamma)+l(T_1\circ\gamma)+l\big(T_2\circ\gamma|_{[0;y]}\big) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+l = 3\pi/2+l$.

$$y_3 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}+l\right) = -x(l) = -\cos l; \quad x_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}+l\right) = y(l) = \sin l.$$

Аналогично предыдущему

$$\sin l_3 = -\cos l = -\cos\left(l_3 - \frac{3\pi}{2}\right); \quad \cos l_3 = \sin l = \sin\left(l_3-\frac{3\pi}{2}\right)$$

(композиции непрерывной функции $l = l_3 - \frac{3\pi}{2}$ с sin и cos на $[0;\pi/2]$), то на промежутке $[3\pi/2;2\pi]$ sin и cos непрерывны. Из непрерывности sin и cos в точке $\frac{3\pi}{2}$ справа и слева следует непрерывность на $[0;2\pi]$. Продолжение на $\mathbb{R}$ определяем по 2π-периодичности:

$$\sin l_k = \sin(2\pi k + l) = \sin l, \quad \cos l_k = \cos(2\pi k + l) = \cos l, \quad k \in \mathbb{Z},\ l \in [0;2\pi].$$

$l_k \in [2\pi k; 2\pi(k+1)]$, $\sin l_k = \sin l = \sin(l_k - 2\pi k)$, поэтому sin непрерывен на промежутках $[2\pi k; 2\pi(k+1)]$ как композиция непрерывных функций $l = l_k - 2\pi k$ и $\sin l$, $l \in [0;2\pi]$. В точках $2\pi k$ (общая точка двух соседних промежутков) sin непрерывен слева и справа, т. е. непрерывен (двусторонне). В итоге: sin непрерывен на $\mathbb{R}$. Совершенно аналогично доказывается непрерывность cos на $\mathbb{R}$.

При повороте на угол l_1 точка $(1,0)$ переходит в точку $(x_1, y_1) = (\cos l_1, \sin l_1)$ (по определению sin и cos на всех четвертях окружности). На комплексной плоскости этот поворот соответствует умножению на комплексное число $\cos l_1 + i\sin l_1$. Поворот на угол $l_1 + l_2$ может быть получен умножением на число $\cos(l_1+l_2) + i\sin(l_1+l_2)$ или двумя последовательными поворотами на углы l_1 и l_2, соответственно, умножением на число $(\cos l_1 + i\sin l_1)(\cos l_2 + i\sin l_2) = \cos l_1\cos l_2 - \sin l_1 \sin l_2 + i(\sin l_1\cos l_2 + \cos l_1 \sin l_2)$. Отсюда получаем обоснование теорем сложения:

$$\cos(l_1+l_2) = \cos l_1\cos l_2 - \sin l_1\sin l_2, \quad \sin(l_1+l_2) = \sin l_1\cos l_2 + \cos l_1\sin l_2.$$

Обоснование чётности cos и нечётности sin: поворот на угол $-l$ — это отображение, обратное к повороту на угол l. Поворот на угол l на комплексной плоскости — это умножение на число $\cos l + i\sin l$, очевидно, обратное к нему отображение — это умножение на число

$$\cos(-l) + i\sin(-l) = \frac{1}{\cos l + i\sin l} = \frac{\cos l - i\sin l}{\cos^2 l + \sin^2 l} = \cos l - i\sin l$$

(поскольку точка $\cos l + i\sin l = x + iy$ — на единичной окружности, $\cos^2 l + \sin^2 l = 1$). Получаем: $\cos(-l) = \cos l$, $\sin(-l) = -\sin l$.

Остальные тригонометрические формулы доказываются в школе.

Теорема 2.8 (Асимптотическое равенство для синуса)**.**

$$\lim_{l\to 0}\frac{\sin l}{l} = 1, \quad \sin l \sim l\ (l \to 0).$$

Доказательство. Рассмотрим путь на первой четверти окружности

$$\gamma_1\colon \begin{cases} x(t) = \sqrt{1-t^2} \\ y(t) = t \end{cases}, \quad t \in [0;y_0],\ y_0 \in [0;1]$$

Тогда $l = l(\gamma_1)$ его длина, начало — $(1,0)$, конец — $x_0 = \cos l$, $y_0 = \sin l$. Проекции этого пути на оси координат: на Ox — $[\cos l; 1]$, на Oy — $[0;\sin l]$. По теореме 2.4 (оценка длины пути через координатные функции)

$$\sin l \leqslant l \leqslant \sin l + (1-\cos l) \Rightarrow 0 \leqslant l - \sin l \leqslant 1 - \cos l = 2\sin^2\frac{l}{2} \leqslant 2\Big(\frac{l}{2}\Big)^2 = \frac{1}{2}l^2$$

(поскольку $\sin\frac{l}{2} \leqslant \frac{l}{2}$), т. е. $|\sin l - l| = l - \sin l \leqslant \frac{1}{2}l^2$ при $0 \leqslant l \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если $-\frac{\pi}{2} \leqslant l < 0$, то по нечётности sin $|\sin l - l| = |\sin(-l) - (-l)| \leqslant \frac{1}{2}(-l)^2 = \frac{1}{2}|l|^2$. В итоге:

$$\left|\frac{\sin l}{l} - 1\right| = \left|\frac{\sin l - l}{l}\right| \leqslant \frac{1}{2}|l| \text{ при } 0 < |l| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \min\left\{2\varepsilon, \frac{\pi}{2}\right\}$. Тогда

$$\text{при } 0 < |l| < \delta \quad \left|\frac{\sin l}{l} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}|l| < \frac{1}{2}\delta \leqslant \varepsilon \Rightarrow \lim_{l\to 0}\frac{\sin l}{l} = 1 \Rightarrow \sin l \sim l \ (l \to 0)$$

(по ε-δ-определению предела вещественной функции в конечной точке — частный случай определения 2.4 из главы "Теория пределов" и по замечанию к определению 4.3 асимптотического равенства — из той же главы).

Обратные тригонометрические функции определяются и доказывается их непрерывность, исходя из строгой монотонности и непрерывности синуса на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и косинуса на $[0; \pi]$ (см. определение sin и cos на соответствующих четвертях окружности). Монотонность и непрерывность тангенса на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и котангенса на $(0; \pi)$ — как монотонность и непрерывность дробей.

3. **Интеграл Римана**

В этой главе максимально быстро доказывается интегрируемость в смысле Римана для непрерывной функции (с помощью сходимости в себе интегральных сумм по соответствующей базе, без использования сумм Дарбу). Несобственные интегралы тоже удобно вводить для функций, непрерывных на промежутках вида $[a; b)$, $(a; b]$, $(a; b)$ (возможно, бесконечной длины). Для практических приложений этого вполне хватает и свойства доказываются легче, а в дальнейшем в курсе появляется интеграл Лебега, который обобщает интеграл Римана.

Существенные отличия появляются в приложениях интеграла (для определения плотности аддитивной функции промежутка снова используется предел по базе).

Определение 3.1 (Интегральные суммы)**.**
Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\}$ — дробление промежутка $[a; b]$. Пусть при этом для $i = 0, \ldots, n-1$ выбраны точки $\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$, тогда множество $\xi = \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\}$ называется оснащением дробления τ. Число $\lambda(\tau) = \max\{x_{i+1} - x_i \mid i = 0, \ldots, n-1\}$ называется рангом дробления τ.
Пусть $f\colon [a; b] \to \mathbb{R}^p$, $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\}$ — дробление промежутка $[a; b]$, $\xi = \{\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}\}$ — оснащение дробления τ. Тогда

$$\sigma(f, [a; b], \tau, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется интегральной суммой функции f на промежутке $[a; b]$, соответствующей паре (τ, ξ).

Для произвольного $\delta > 0$ обозначим $A_\delta = \{(\tau, \xi) \mid \lambda(\tau) < \delta\}$.

Лемма 3.1. *Система $\mathfrak{A} = \{A_\delta \mid \delta > 0\}$ — база множеств.*

Доказательство. Для $\forall \delta > 0$ по аксиоме Архимеда $\exists n \in \mathbb{N}\colon n > \frac{b-a}{\delta} \Rightarrow \frac{b-a}{n} < \delta$. Пусть $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\}$ — дробление промежутка $[a; b]$ на n равных частей:

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \Rightarrow x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n} \Rightarrow \lambda(\tau) = \frac{b-a}{n} < \delta.$$

Тогда для $\forall \xi$ — оснащения дробления τ получаем, что пара $(\tau, \xi) \in A_\delta \Rightarrow A_\delta \neq \varnothing$.

Пусть $\delta_1, \delta_2 > 0,\ \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

$$(\tau, \xi) \in A_\delta \Rightarrow \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow \lambda(\tau) < \delta_1 \text{ и } \lambda(\tau) < \delta_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\tau, \xi) \in A_{\delta_1} \text{ и } (\tau, \xi) \in A_{\delta_2} \text{ т. е. } A_\delta \subset A_{\delta_1} \cap A_{\delta_2}.$$

Определение 3.2 (Интеграл Римана).
Если существует конечный предел интегральных сумм $\sigma(f, [a;b], \tau, \xi)$ (как функции от пар (τ, ξ)) по базе $\mathfrak{A} = \{A_\delta \mid \delta > 0\}$, то функция f называется интегрируемой в смысле Римана на промежутке $[a;b]$ и $I = \lim_{\mathfrak{A}} \sigma(f, [a;b], \tau, \xi)$ называется интегралом Римана от функции f по промежутку $[a;b]$. По определению предела по базе (определение 2.2 из главы "Теория пределов")

$$I = \lim_{\mathfrak{A}} \sigma \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists A_\delta \in \mathfrak{A} \colon \forall (\tau, \xi) \in A_\delta \quad |\sigma(f, [a;b], \tau, \xi) - I| < \varepsilon \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon \forall (\tau, \xi) \colon \lambda(\tau) < \delta \quad |\sigma(f, [a;b], \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$

$$\textit{Обозначение: } I = \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Замечание 1. Если $f \colon [a;b] \to \mathbb{R}^p$, $\quad f_1, \ldots, f_p$ — её координатные функции, то $f(\xi_i)\Delta x_i = \big(f_1(\xi_i)\Delta x_i, \ldots, f_p(\xi_i)\Delta x_i\big) \Rightarrow \sigma(f) = \big(\sigma(f_1), \ldots, \sigma(f_p)\big)$ и по теореме о покоординатной сходимости (теорема 2.9 из главы "Теория пределов")

$$\lim \sigma(f) = \big(\lim \sigma(f_1), \ldots, \lim \sigma(f_p)\big), \text{ т. е. } f \text{ интегрируема } \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f_1, \ldots, f_p \text{ интегрируемы и } \int\limits_a^b f = \Bigg(\int\limits_a^b f_1, \ldots, \int\limits_a^b f_p\Bigg).$$

Замечание 2. Если f интегрируема на $[a;b]$ и последовательность оснащённых дроблений $\{(\tau^{(n)}, \xi^{(n)})\}_{n=1}^\infty$ такова, что $\lambda(\tau^{(n)}) \to 0$, то $\sigma_n = \sigma(f, [a;b], \tau^{(n)}, \xi^{(n)}) \to I$.
Доказательство. Поскольку f интегрируема, по определению

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon \forall (\tau, \xi) \colon \lambda(\tau) < \delta \quad |\sigma(f, [a;b], \tau, \xi) - I| < \varepsilon.$$
$$\lambda(\tau^{(n)}) \to 0 \Rightarrow \text{ для } \delta > 0\ \exists N \colon \forall n > N \quad \lambda(\tau^{(n)}) < \delta \Rightarrow |\sigma(f, [a;b], \tau^{(n)}, \xi^{(n)}) - I| < \varepsilon.$$
$$\text{Получили: } \forall \varepsilon > 0\ \exists N \colon \forall n > N \quad |\sigma_n - I| = |\sigma(f, [a;b], \tau^{(n)}, \xi^{(n)}) - I| < \varepsilon \Rightarrow \sigma_n \to I.$$

Пример. Пусть для $\forall x \in [a;b] \quad f(x) = M$ (const.) Тогда

$$\sigma(f, [a;b], \tau, \xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} M \cdot \Delta x_i = M \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = M \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) =$$
$$= M(-x_0 + x_1 - x_1 + x_2 - \ldots - x_{n-2} + x_{n-1} - x_{n-1} + x_n) = M(x_n - x_0) = M(b-a)$$
$$(\text{т. е. } \sigma(f, [a;b], \tau, \xi) \text{ не зависит от пары } (\tau, \xi)) \Rightarrow \exists \int\limits_a^b f = \lim \sigma = M(b-a).$$

Для $f \colon [a;b] \to \mathbb{R}$ обозначим $\omega(f, [a;b]) = \sup\{|f(x) - f(x')| \mid x, x' \in [a;b]\}$ (колебание функции f на промежутке $[a;b]$). При этом за счёт переименования аргументов всегда можно считать, что $f(x) \geqslant f(x')$, а тогда $\omega(f, [a;b]) = \sup\{f(x) - f(x') \mid x, x' \in [a;b]\}$.

Лемма 3.2. *Пусть* $f\colon [a;b]\to\mathbb{R}$. *для* $\forall(\tau,\xi)$, $\forall x\in[a;b]$
$|\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)-f(x)(b-a)|\leqslant\omega(f,[a;b])(b-a)$.

Доказательство. $\tau=\{x_0,\ldots,x_n\}$, $\quad a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, $\quad \Delta x_i=x_{i+1}-x_i$. В примере было равенство: $b-a=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\Delta x_i$. Тогда

$$|\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)-f(x)(b-a)|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i-f(x)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i\right|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(\xi_i)-f(x)\big)\Delta x_i\right|.$$

По свойствам длины вектора и поскольку $\Delta x_i>0$

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}\big(f(\xi_i)-f(x)\big)\Delta x_i\right|\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\left|\big(f(\xi_i)-f(x)\big)\Delta x_i\right|=$$
$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left|f(\xi_i)-f(x)\right|\Delta x_i\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\omega(f,[a;b])\Delta x_i=\omega(f,[a;b])\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=\omega(f,[a;b])(b-a).$$

Замечание. Если для $\forall x,x'\in[a;b]\quad\omega(f,[a;b])|\leqslant\varepsilon$, то
$$|\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)-f(x)(b-a)|\leqslant\varepsilon(b-a).$$

Для дробления $\tau=\{x_0,\ldots,x_n\}$ промежутка $[a;b]$ обозначим $\omega_i=\omega_i(\tau)=\omega(f,[x_i;x_{i+1}])$, $s(\tau)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i$.

Теорема 3.1 (Признак интегрируемости).

Пусть $f\colon[a;b]\to\mathbb{R}$. *Если* $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon\forall\tau\colon\lambda(\tau)<\delta\quad\sum\limits_{i=0}^{n-1}\omega_i(\tau)\Delta x_i<\varepsilon$, *то* f — *интегрируема.*

Доказательство. Докажем сходимость интегральных сумм в себе. Для $\forall\varepsilon>0$ по условию:
$$\text{для }\frac{\varepsilon}{2}>0\ \exists\delta>0\colon\forall\tau\colon\lambda(\tau)<\delta\quad\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\tau)\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Рассмотрим произвольные пары $(\tau_1,\xi^{(1)}),(\tau_2,\xi^{(2)})\colon\lambda(\tau_1)<\delta,\ \lambda(\tau_2)<\delta$.
$\tau_1=\{x_0,\ldots,x_n\}$, $\quad a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. Образуем дробление $\tau=\tau_1\cup\tau_2$ и его произвольное оснащение ξ. Поскольку $\tau\supset\tau_1$, любой промежуток $[x_i;x_{i+1}]$ разбивается точками дробления $\tau\colon x_i=x_{i0}<x_{i1}<\ldots<x_{ij}<\ldots<x_{im_i}=x_{i+1}$. Интегральная сумма для дробления τ состоит из слагаемых вида $f(\xi_{ij})(x_{i,j+1}-x_{ij})=f(\xi_{ij})\Delta x_{ij}$. При вычислении этой интегральной суммы вначале суммируем слагаемые при фиксированном i (на промежутке $[x_i;x_{i+1}]$), а затем суммируем по i:
$$\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m_i-1}f(\xi_{ij})\Delta x_{ij}.$$

По лемме 3.3, применённой к промежутку $[x_i;x_{i+1}]$ с длиной Δx_i и с $x=\xi_i$
$$\left|\sum_{j=0}^{m_i-1}f(\xi_{ij})\Delta x_{ij}-f(\xi_i)\Delta x_i\right|\leqslant\omega(f,[x_i;x_{i+1}])\Delta x_i=\omega_i(\tau_1)\Delta x_i.\qquad(*)$$

Получаем:

$$|\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)-\sigma(f,[a;b],\tau_1,\xi^{(1)})| = \left|\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m_i-1} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{m_i-1} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - f(\xi_i)\Delta x_i\right)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\sum_{j=0}^{m_i-1} f(\xi_{ij})\Delta x_{ij} - f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \text{ (по (*))}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\tau_1)\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (так как } \lambda(\tau_1)<\delta).$$

Аналогично (поскольку $\tau \supset \tau_2$ и $\lambda(\tau_2) < \delta$) $|\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)-\sigma(f,[a;b],\tau_2,\xi^{(2)})| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\begin{gathered}|\sigma(f,[a;b],\tau_2,\xi^{(2)})-\sigma(f,[a;b],\tau_1,\xi^{(1)})| \leqslant \\ \leqslant |\sigma(f,[a;b],\tau_2,\xi^{(2)})-\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)| + |\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)-\sigma(f,[a;b],\tau_1,\xi^{(1)})| = \\ = |\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)-\sigma(f,[a;b],\tau_2,\xi^{(2)})| + |\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)-\sigma(f,[a;b],\tau_1,\xi^{(1)})| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{gathered}$$

Получили:

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon \forall(\tau_1,\xi^{(1)}),(\tau_2,\xi^{(2)}) \in A_\delta \text{ (поскольку } \lambda(\tau_1)<\delta,\ \lambda(\tau_2)<\delta) \\ |\sigma(f,[a;b],\tau_2,\xi^{(2)})-\sigma(f,[a;b],\tau_1,\xi^{(1)})| < \varepsilon \text{ — сходимость в себе по базе } \mathfrak{A}\end{gathered}$$

(определение 6.2 из главы "Теория пределов").

По принципу сходимости (теорема 6.5 из главы "Теория пределов") существует конечный $\lim_{\mathfrak{A}} \sigma(f,[a;b],\tau,\xi) \Rightarrow f$ интегрируема на $[a;b]$.

Теорема 3.2 (Интегрируемость непрерывной функции)**.**
Пусть $f\colon [a;b]\to\mathbb{R}^p$. Если f непрерывна, то она интегрируема.

Доказательство. Проверим признак интегрируемости.

Рассмотрим $\forall\varepsilon>0 \Rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$. f непрерывна на $[a;b] \Rightarrow f$ равномерно непрерывна (по теореме Кантора), т. е.

$$\text{для } \varepsilon_1>0\ \exists\delta>0\colon \forall x,x'\in[a;b]\colon |x-x'|<\delta \quad |f(x)-f(x')|<\varepsilon_1. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольное дробление $\tau=\{x_0,\dots,x_n\}$ такое, что $\lambda(\tau)<\delta$. Тогда для любого промежутка $[x_i;x_{i+1}]$ и любых $x,x'\in[x_i;x_{i+1}]$

$$\begin{gathered}|x-x'| \leqslant x_{i+1}-x_i = \Delta x_i \leqslant \lambda(\tau) < \delta \Rightarrow |f(x)-f(x')| < \varepsilon_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega_i(\tau) = \sup\{|f(x)-f(x')| \mid x,x'\in[x_i;x_{i+1}]\} \leqslant \varepsilon_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow s(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\tau)\Delta x_i \leqslant \varepsilon_1\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = \varepsilon_1(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{gathered}$$

Получили: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\colon \forall\tau\colon \lambda(\tau)<\delta \quad \sum_{i=0}^{n-1}\omega_i(\tau)\Delta x_i < \varepsilon \Rightarrow f$ — интегрируема.

Теорема 3.3 (Свойства интеграла)**.**

1) Если f, g непрерывны на $[a;b]$, то $f+g$ непрерывна и $\int\limits_a^b (f+g) = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g$. 2) Если f непрерывна на $[a;b]$, $\lambda \in \mathbb{R}$, то λf непрерывна и $\int\limits_a^b (\lambda f) = \lambda \int\limits_a^b f$.

3) Пусть $a < c < b$, и f непрерывна на $[a;b]$.

$$\text{Тогда } \int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f.$$

4) Если $f, g\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, непрерывны и для $\forall x \in [a;b]$ $f(x) \leqslant g(x)$, то $\int\limits_a^b f \leqslant \int\limits_a^b g$.

5) Если f непрерывна на $[a;b]$, то $|f|$ непрерывна и $\left|\int\limits_a^b f\right| \leqslant \int\limits_a^b |f|$.

В п. 1 — 3 и 5 f может быть вектор-функцией.

Доказательство. 1) Поскольку f, g интегрируемы, существуют конечные пределы: $\lim_{\mathfrak{A}} \sigma(f,[a;b],\tau,\xi)$ и $\lim_{\mathfrak{A}} \sigma(g,[a;b],\tau,\xi)$.

$$\sigma(f+g,[a;b],\tau,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \big(f(\xi_i)+g(\xi_i)\big)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i =$$

$= \sigma(f,[a;b],\tau,\xi) + \sigma(g,[a;b],\tau,\xi)$. По общей теореме о пределе суммы по базе:

$$\exists \int\limits_a^b (f+g) = \lim_{\mathfrak{A}} \sigma(f+g,[a;b],\tau,\xi) = \lim_{\mathfrak{A}} \sigma(f,[a;b],\tau,\xi) + \lim_{\mathfrak{A}} \sigma(g,[a;b],\tau,\xi) = \int\limits_a^b f + \int\limits_a^b g.$$

$$2)\ \sigma(\lambda f,[a;b],\tau,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda f(\xi_i)\Delta x_i = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \lambda \cdot \sigma(f,[a;b],\tau,\xi).$$

По общей теореме о пределе произведения по базе (предел $\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)$ конечен:)

$$\exists \int\limits_a^b \lambda f = \lim_{\mathfrak{A}} \sigma(\lambda f,[a;b],\tau,\xi) = \lambda \cdot \lim_{\mathfrak{A}} \sigma(f,[a;b],\tau,\xi) = \lambda \int\limits_a^b f.$$

3) Поскольку f непрерывна на $[a;b]$, то она непрерывна на $[a;c]$ и $[c;b]$ (непрерывность сужений — теорема), следовательно, интегрируема на $[a;c]$ и $[c;b]$. Рассмотрим дробления этих промежутков на n равных частей: $\tau_n = \{x_0,\ldots,x_n\}$, где $x_0 = a$, $x_n = c$ и $\tau'_n = \{x_n,\ldots,x_{2n}\}$, где $x_n = c$, $x_{2n} = b$. Тогда $\lambda(\tau_n) = \frac{c-a}{n} \to 0$ и $\lambda(\tau'_n) = \frac{b-c}{n} \to 0$. Объединение этих дроблений $\tau_n \cup \tau'_n$ — дробление промежутка $[a;b]$ и $\lambda(\tau_n \cup \tau'_n) = \max\{\frac{c-a}{n}, \frac{b-c}{n}\} \to 0$. Для произвольных оснащений $\xi^{(n)}$ и $\xi^{(n')}$ этих дроблений соответствующие интегральные суммы

$$\sigma_n = \sigma(f,[a;c],\tau_n,\xi^{(n)}) \to \int\limits_a^c f, \quad \sigma'_n = \sigma(f,[c;b],\tau'_n,\xi^{(n')}) \to \int\limits_c^b f$$

по замечанию 2 к определению интеграла, поскольку $\lambda(\tau_n) \to 0,\ \lambda(\tau'_n) \to 0$. Тогда

$$\sigma(f,[a;b],\tau_n \cup \tau'_n, \xi^{(n)} \cup \xi^{(n')}) = \sum_{k=0}^{2n-1} f(\xi_k)\Delta x_k =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=n}^{2n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \sigma_n + \sigma'_n \to \int_a^c f + \int_c^b f \text{ (предел суммы).}$$

С другой стороны,

$$\sigma(f,[a;b],\tau_n \cup \tau'_n, \xi^{(n)} \cup \xi^{(n')}) \to \int_a^b f \text{ (поскольку } \lambda(\tau_n \cup \tau'_n) \to 0).$$

Из единственности предела следует: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

4) Для произвольного дробления $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\}$ промежутка $[a;b]$ $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i > 0$. Тогда

$$\forall x \in [a;b] \quad f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant g(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma(f,[a;b],\tau,\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} g(\xi_i)\Delta x_i = \sigma(g,[a;b],\tau,\xi) \text{ (для любой пары } (\tau,\xi)).$$

По теореме о переходе к пределу в неравенстве (теорема 5.1 из главы "Теория пределов") тогда

$$\int_a^b f = \lim_{\mathfrak{A}} \sigma(f,[a;b],\tau,\xi) \leqslant \lim_{\mathfrak{A}} \sigma(g,[a;b],\tau,\xi) = \int_a^b g.$$

5) Пусть $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}^p$ — непрерывная вектор-функция. Функция $g\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, где $g(y) = |y|$ (длина вектора) — непрерывна (пример 5 после леммы 1.1 из параграфа "Непрерывные функции"). Тогда функция $|f|$ непрерывна как композиция непрерывных функций (следствие 2 теоремы 1.2 из параграфа "Непрерывные функции"), т. е. $|f|$ интегрируема. Для произвольного оснащённого дробления (τ,ξ)

$$|\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)\Delta x_i| = \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i = \sigma(|f|,[a;b],\tau,\xi) \quad (1)$$

(по свойствам длины вектора и $\Delta x_i > 0$).

Существует $\lim_{\mathfrak{A}} \sigma(f,[a;b],\tau,\xi) = \int_a^b f$, функция $g(y) = |y|$ — непрерывна, тогда по второй теореме о пределе композиции (теорема 1.2 из параграфа "Непрерывные функции") существует $\lim_{\mathfrak{A}} |\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)| = \left|\int_a^b f\right|$. Поскольку также существует $\lim_{\mathfrak{A}} \sigma(|f|,[a;b],\tau,\xi) = \int_a^b |f|$, из неравенства (1) по теореме о предельном переходе в неравенстве следует:

$$\Big|\int\limits_a^b f\Big| = \lim_{\mathfrak{A}} |\sigma(f,[a;b],\tau,\xi)| \leqslant \lim_{\mathfrak{A}} \sigma(|f|,[a;b],\tau,\xi) = \int\limits_a^b |f|.$$

Определение 3.3 (Определение интеграла при $a \geqslant b$)**.**
Если $a > b$ и f интегрируема на $[b;a]$ или $a = b$, то положим по определению

$$\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f; \quad \int\limits_a^a f = 0.$$

Тогда, если f непрерывна на промежутке $I \subset \mathbb{R}$ и $a,b,c \in I$, то

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f \ (\text{при любом взаимном расположении точек } a,b,c).$$

Доказательство. 1) Пусть, например, $a < b < c$. Тогда

$$\int\limits_a^c f = \int\limits_a^b f + \int\limits_b^c f \Rightarrow \int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f - \int\limits_b^c f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f.$$

2) Пусть $b < a = c$. Тогда

$$\int\limits_a^b f = -\int\limits_b^a f = 0 - \int\limits_b^c f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f \ (\text{поскольку } a = c).$$

Остальные случаи взаимного расположения точек a,b,c предлагается студентам разобрать самостоятельно.

Замечание. Свойства интеграла 1) и 2), очевидно, сохраняются и при $a \geqslant b$. При $a = b$ в свойствах 4) и 5) равенство $0 = 0$. При $a > b$ и $f \leqslant g$ в свойстве 4) будет $\int\limits_a^b f \geqslant \int\limits_a^b g$, а свойство 5) выглядит так: $\Big|\int\limits_a^b f\Big| \geqslant \Big|\int\limits_a^b |f|\Big|$.

В дальнейшем изложение у меня было довольно стандартно (теорема о среднем, теорема Барроу, формула Ньютона-Лейбница, определение несобственных интегралов, замена переменной и интегрирование по частям в обычных и несобственных интегралах и т. д.) Отличия — в приложениях интеграла (снова используется предел по базе).

4. **Приложения интеграла**

Определение 4.1 (Аддитивная функция промежутка)**.**
Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $\langle a;b\rangle \subset \mathbb{R}$, $\Delta = [p;q] \subset \langle a;b\rangle$.
Функция $\Phi\colon \{\Delta \mid \Delta \subset \langle a;b\rangle\} \to \mathbb{R}^n$ называется функцией промежутка. Функция промежутка Φ называется <u>аддитивной</u>, если

$$\text{для } \forall \Delta_1,\Delta_2 \subset \langle a;b\rangle\colon \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{c\} \quad \Phi(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \Phi(\Delta_1) + \Phi(\Delta_2).$$

Примеры. 1) Если $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то

$$\text{для } \Delta = [p;q] \subset \langle a;b\rangle\ \exists \Phi_1(\Delta) = \max\{f(t) \mid t \in \Delta\}$$

(максимальное значение существует по теореме Вейерштрасса). Эта функция промежутка не аддитивна (например, для $f(t)$, тождественно равной 1 на $\mathbb{R}$).

2) Для непрерывной функции f на $\langle a;b\rangle$ положим $\Phi_2(\Delta) = \int\limits_p^q f$. По свойству интеграла для $p < r < q$ и $\Delta_1 = [p;r]$, $\Delta_2 = [r;q]$

$$\Phi_2(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \int\limits_p^q f = \int\limits_p^r f + \int\limits_r^q f = \Phi_2(\Delta_1) + \Phi_2(\Delta_2), \text{ т. е. } \Phi_2 \text{ — аддитивна.}$$

Дальнейшие примеры — пока без доказательств, на наглядном уровне (рисовал картинки на доске).

3) Площадь подграфика (доказательство будет).

4) Длина графика (доказательство будет).

5) Работа переменной силы при перемещении точки по прямой (подробно на практике).

6) Сила притяжения материальной точки к массе, непрерывно распределённой вдоль прямой — пример векторной аддитивной функции.

Определение 4.2 (Плотность аддитивной функции промежутка)**.**
Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $\langle a;b\rangle \subset \mathbb{R}$, $x \in \langle a;b\rangle$, $\delta > 0$. *Обозначим*

$$A_\delta = \{\Delta = [p;q] \subset \langle a;b\rangle \mid x \in \Delta,\ 0 < |\Delta| = q - p < \delta\}.$$

Тогда $\mathfrak{A} = \{A_\delta \mid \delta > 0\}$ *— база множеств: если* $x < b$, *то если положить* $p = x$ *и взять* $q\colon p < q < p + \min\{\delta, b - x\}$ *(если* $b = +\infty$, *то* $p < q < p + \delta$*), легко проверить, что* $\Delta = [p;q] \in A_\delta$, *т. е.* $A_\delta \neq \varnothing$ *(аналогично, если* $x > a$, *то можно положить* $q = x$, $q - \min\{\delta, x - a\} < p < q$*). При этом, если* $\delta_1, \delta_2 > 0$, *то* $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ *и*

$$|\Delta| < \delta_3 \Rightarrow |\Delta| < \delta_1 \text{ и } |\Delta| < \delta_2, \text{ т. е. } A_{\delta_3} \subset A_{\delta_1} \cap A_{\delta_2}.$$

Число $\rho = \lim_{\mathfrak{A}} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}$ *называется плотностью аддитивной функции* Φ *в точке* x.

По определению предела по базе $\mathfrak{A} = \{A_\delta \mid \delta > 0\}$ это означает:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists A_\delta \in \mathfrak{A}\colon \forall \Delta \in A_\delta \quad \left|\frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} - \rho\right| < \varepsilon, \text{ то есть}$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0\colon \forall \Delta \subset \langle a;b\rangle\colon x \in \Delta,\ 0 < |\Delta| < \delta \quad \left|\frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} - \rho\right| < \varepsilon.$$

Наглядно: если длина промежутка Δ, содержащего точку x, стремится к 0 (промежуток "стягивается к точке x"), то $\frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} \to \rho$. Обозначение: $\lim\limits_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ x \in \Delta}} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} = \rho$.

Если плотность существует для любой точки $x \in \langle a;b\rangle$, то возникает функция точки $f(x) = \lim\limits_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ x \in \Delta}} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}$ (плотность аддитивной функции Φ на промежутке $\langle a;b\rangle$). Очевидно, если Φ — векторная аддитивная функция, то f — тоже вектор-функция.

Теорема 4.1 (Представление аддитивной функции промежутка интегралом)**.**
Если у аддитивной функции промежутка Φ *для любой точки* $x \in \langle a;b\rangle$ *существует* $f(x) = \lim\limits_{\substack{|\Delta|\to 0\\ x\in\Delta}} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}$ *и функция* f *непрерывна на* $\langle a;b\rangle$, *то*

$$\text{\textit{для} } \forall\Delta = [p;q] \subset \langle a;b\rangle \quad \Phi(\Delta) = \int\limits_p^q f.$$

Доказательство. Обозначим $I_{p,q}$ "ориентированный отрезок" с концами p,q, т. е. точку p считаем началом, а q — концом ориентированного отрезка, независимо от взаимного расположения точек p и q. Доопределим $\Phi(I_{p,q})$:

$$\Phi(I_{p,q}) = \begin{cases} \Phi([p;q]) \text{ при } p < q; \\ -\Phi([q;p]) \text{ при } p > q; \\ 0 \text{ при } p = q. \end{cases}$$

Тогда для $\forall p,q,r \in \langle a;b\rangle \quad \Phi(I_{p,q}) = \Phi(I_{p,r}) + \Phi(I_{r,q})$. Доказательство вполне аналогично доказательству для интеграла (после дополнения к определению интеграла — определение 3.3). Пусть, например, $q < p < r$. По аддитивности Φ:

$$\Phi([q;r]) = \Phi([q;p]) + \Phi([p;r]) \Rightarrow -\Phi(I_{r,q}) = -\Phi(I_{p,q}) + \Phi(I_{p,r}) \Rightarrow \Phi(I_{p,q}) = \Phi(I_{p,r}) + \Phi(I_{r,q}).$$

Остальные случаи расположения точек p,q,r — самостоятельно.

Пусть $[p;q] \subset \langle a;b\rangle$, $x \in \langle a;b\rangle$. Рассмотрим функцию точки $F(x) = \Phi(I_{p,x})$ и докажем, что F — первообразная для плотности f на $\langle a;b\rangle$. Если $x + \Delta x \in \langle a;b\rangle$, то

$$F(x+\Delta x) = \Phi(I_{p,x+\Delta x}) = \Phi(I_{p,x}) + \Phi(I_{x,x+\Delta x}) = F(x) + \Phi(I_{x,x+\Delta x}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(x+\Delta x) - F(x) = \Phi(I_{x,x+\Delta x}) = \begin{cases} \Phi([x;x+\Delta x]), & \Delta x > 0; \\ -\Phi([x+\Delta x;x]), & \Delta x < 0. \end{cases}$$

Обозначим $P = \begin{cases} [x;x+\Delta x], & \Delta x > 0 \\ [x+\Delta x;x], & \Delta x < 0 \end{cases}$, $|P| = \begin{cases} \Delta x, & \Delta x > 0 \\ -\Delta x, & \Delta x > 0 \end{cases}$. Тогда

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{\Phi(P)}{\Delta x} = \frac{\Phi(P)}{|P|}, & \Delta x > 0 \\ -\frac{\Phi(P)}{\Delta x} = \frac{-\Phi(P)}{-|P|} = \frac{\Phi(P)}{|P|}, & \Delta x < 0 \end{cases}.$$

По условию, $f(x)$ — плотность Φ в точке x, т. е. $\lim\limits_{\substack{|P|\to 0\\ x\in P}} \frac{\Phi(P)}{|P|} = f(x)$. По определению этого предела

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \colon \forall P \subset \langle a;b\rangle \colon x \in P, \ 0 < |P| < \delta \quad \left|\frac{\Phi(P)}{|P|} - f(x)\right| < \varepsilon$$

в том числе для промежутков P вида $[x;x+\Delta x]$ и $[x+\Delta x;x]$ с длиной $0 < |\Delta x| < \delta$. Тогда

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta > 0 \colon \forall\Delta x \colon x+\Delta x \in \langle a;b\rangle, \ 0 < |\Delta x| < \delta$$
$$\left|\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x)\right| = \left|\frac{\Phi(P)}{|P|} - f(x)\right| < \varepsilon.$$

Это означает , что существует $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x)$, т. е. F — первообразная для f на $\langle a;b\rangle$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница и определению $\Phi(I_{p,q})$

$$\int\limits_p^q f = F(q) - F(p) = \Phi(I_{p,q}) - \Phi(I_{p,p}) = \Phi([p;q]).$$

Определение 4.3 (Площадь).
Пусть $\mathfrak{A}$ — множество подмножеств множества $\mathbb{R}^2$, обладающее свойствами:
1) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus A \in \mathfrak{A}$;
2) Если для любого $n = 1, 2, \ldots \quad A_n \in \mathfrak{A}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$.
Такое множество подмножеств называется сигма-алгеброй множеств. В дальнейшем в главе "Теория меры" доказывается, что если $A, B \in \mathfrak{A}$, то $A \cap B,\ A \setminus B \in \mathfrak{A}$ и $\varnothing \in \mathfrak{A}$.
Площадью называется отображение $S\colon \mathfrak{A} \to [0;+\infty]$ со свойствами:
1) Если $A, B \in \mathfrak{A}$ и $A \cap B = \varnothing$, то $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$ (аддитивность).
2) $S(\langle a;b\rangle \times \langle c;d\rangle) = (b-a)(d-c)$ (площадь прямоугольника).
3) Если $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ — движение (отображение, сохраняющее расстояние между точками: $|T(x) - T(y)| = |x - y|$), то $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow T(A) \in \mathfrak{A}$ и $S(T(A)) = S(A)$ (площадь не изменяется при движении).

В дальнейшем в главе "Теория меры" доказывается, что такая сигма-алгебра и такое отображение S существуют. Множества, принадлежащие сигма-алгебре $\mathfrak{A}$, называются квадрируемыми.

Лемма 4.1 (Дополнительные свойства площади).
1) Если $A, B \in \mathfrak{A}$ и $A \subset B$, то $S(A) \leqslant S(B)$ (монотонность). При этом, если $S(A) < +\infty$, то $S(B \setminus A) = S(B) - S(A)$.
2) $S(\varnothing) = 0$.
3) Если $A, B \in \mathfrak{A}$ и $S(A \cap B) = 0$, то $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$ (усиленная аддитивность).

Доказательство. 1) $A \subset B \Rightarrow B = A \cup (B \setminus A)$, при этом $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. По аддитивности и неотрицательности площади $S(B) = S(A) + S(B \setminus A) \geqslant S(A)$. Вычитая из последнего равенства число $S(A)$ (равенство сохранится, если $S(A)$ конечно), получим $S(B \setminus A) = S(B) - S(A)$.

2) По свойству 2 площади, если A — прямоугольник конечных размеров, то $S(A) < +\infty$. Тогда по п.1 $S(\varnothing) = S(A \setminus A) = S(A) - S(A) = 0$.

3) Обозначим $C = A \cap B,\ S(C) = 0$. Тогда по аддитивности

$$S(A) = S(A \setminus C) + S(C) = S(A \setminus C); \quad S(A \cup B) = S(A \setminus C) + S(B) = S(A) + S(B).$$

Лемма 4.2. *Пусть $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$, $\quad f$ непрерывна на $\langle a;b\rangle$. Если $x \in \langle a;b\rangle$, то*

$$\exists \lim_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ x \in \Delta}} \max\{f(t) \mid t \in \Delta\} = f(x), \quad \exists \lim_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ x \in \Delta}} \min\{f(t) \mid t \in \Delta\} = f(x)$$

(предел — по той же базе $\{A_\delta \mid \delta > 0\}$, которая участвует в определении плотности в точке).

Доказательство.

f непрерывна в точке $x \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon \forall t \in \langle a;b\rangle\colon |t-x| < \delta \quad |f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Рассмотрим $\forall\Delta = [p;q] \subset \langle a;b\rangle\colon x \in \Delta,\ 0 < |\Delta| < \delta$. Тогда

для $\forall t \in \Delta\ |t-x| \leqslant q - p = |\Delta| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

По теореме Вейерштрасса для функции f, непрерывной на $\Delta = [p;q] \subset \langle a;b\rangle$

$$\begin{gathered}
\text{существует } t^* \in \Delta\colon f(t^*) = \max\{f(t) \mid t \in \Delta\} \Rightarrow \\
\Rightarrow |f(t^*) - f(x)| < \varepsilon,\ \text{т. е. } |\max\{f(t) \mid t \in \Delta\} - f(x)| < \varepsilon. \text{ Получили:} \\
\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\colon \forall\Delta \subset \langle a;b\rangle\colon x \in \Delta,\ 0 < |\Delta| < \delta \quad |\max\{f(t) \mid t \in \Delta\} - f(x)| < \varepsilon \\
\text{т. е. } \lim_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ x \in \Delta}} \max\{f(t) \mid t \in \Delta\} = f(x). \text{ Для } \min \text{ — аналогично}
\end{gathered}$$

(по теореме Вейерштрасса существует $t_* \in \Delta\colon f(t_*) = \min\{f(t) \mid t \in \Delta\}$).

Определение 4.4 (Подграфик, строгий подграфик).
Пусть $f\colon X \to \mathbb{R},\ A \subset X,\ \forall x \in A\ f(x) \geqslant 0$. Подграфиком функции f на множестве A называется множество

$$P_A = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid x \in A,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Строгим подграфиком f на A называется множество

$$P'_A = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} \mid x \in A,\ 0 \leqslant y < f(x)\}.$$

Если $A = \langle a;b\rangle$, f непрерывна на A, то P_A и P'_A квадрируемы (будет доказано в главе "Интеграл по мере").

Теорема 4.2 (Площадь подграфика и строгого подграфика).
Пусть $f\colon \langle a;b\rangle \to \mathbb{R}$, f непрерывна, $\forall x \in \langle a;b\rangle\ f(x) \geqslant 0$. Тогда

$$\textit{для } \forall\Delta = [p;q] \subset \langle a;b\rangle \quad S(P_\Delta) = S(P'_\Delta) = \int_p^q f.$$

Доказательство. Докажем аддитивность функции промежутка $\Phi(\Delta) = S(P_\Delta)$. Пусть $\Delta_1, \Delta_2 \subset \langle a;b\rangle, \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{c\}$. Тогда

$$P_{\Delta_1} \cap P_{\Delta_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c,\ 0 \leqslant y \leqslant f(c)\} = [c;c] \times [0;f(c)], \quad S(P_{\Delta_1} \cap P_{\Delta_2}) = 0$$

(площадь прямоугольника, длина одной из сторон которого равна 0).

$$\begin{gathered}
P_{\Delta_1 \cup \Delta_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \Delta_1 \cup \Delta_2,\ 0 \leqslant y \leqslant f(c)\} = P_{\Delta_1} \cup P_{\Delta_2}; \\
\Phi(\Delta_1 \cup \Delta_2) = S(P_{\Delta_1 \cup \Delta_2}) = S(P_{\Delta_1} \cup P_{\Delta_2}) = S(P_{\Delta_1}) + S(P_{\Delta_2}) = \Phi(\Delta_1) + \Phi(\Delta_2)
\end{gathered}$$

(по лемме о дополнительных свойствах площади, п. 3).

Вычислим плотность аддитивной функции Φ. Для произвольного отрезка $\Delta \subset \langle a;b\rangle$ с длиной $|\Delta| > 0$ для $\forall t \in \Delta$, очевидно, верны оценки:

$$\begin{gathered}
0 \leqslant \min\{f(t) \mid t \in \Delta\} \leqslant f(t) \leqslant \max\{f(t) \mid t \in \Delta\} \Rightarrow \\
\Rightarrow [0;\min\{f(t) \mid t \in \Delta\}] \subset [0;f(t)] \subset [0;\max\{f(t) \mid t \in \Delta\}] \Rightarrow \\
\Delta \times [0;\min\{f(t) \mid t \in \Delta\}] \subset P_\Delta \subset \Delta \times \max\{f(t) \mid t \in \Delta\}.
\end{gathered}$$

По монотонности площади тогда

$$S(\Delta\times[0;\min\{f(t)\mid t\in\Delta\}])\leqslant S(P_\Delta)\leqslant S(\Delta\times\max\{f(t)\mid t\in\Delta\}),\ \text{т. е.}$$
$$|\Delta|\cdot\min\{f(t)\mid t\in\Delta\}\leqslant\Phi(\Delta)\leqslant|\Delta|\cdot\max\{f(t)\mid t\in\Delta\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\min\{f(t)\mid t\in\Delta\}\leqslant\frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}\leqslant\max\{f(t)\mid t\in\Delta\}.$$

Для произвольной точки $x\in\langle a;b\rangle$ по лемме 4.2 существуют

$$\lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ x\in\Delta}}\max\{f(t)\mid t\in\Delta\}=\lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ x\in\Delta}}\min\{f(t)\mid t\in\Delta\}=f(x).$$

Тогда по теореме о зажатой функции (теорема 5.2 из главы "Теория пределов", доказана для пределов по любой базе)

$$\text{существует}\ \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ x\in\Delta}}\frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}=f(x),\ \text{т. е. } f \text{ — плотность аддитивной функции } \Phi.$$

По теореме о представлении аддитивной функции интегралом

$$\text{для }\forall\Delta=[p;q]\subset\langle a;b\rangle\quad\Phi(\Delta)=S(P_\Delta)=\int\limits_p^q f.$$

Для строгого подграфика:

$$[0;\min\{f(t)\mid t\in\Delta\})\subset[0;f(t))\subset[0;\max\{f(t)\mid t\in\Delta\})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\Delta\times[0;\min\{f(t)\mid t\in\Delta\})\subset P'_\Delta\subset\Delta\times[0;\max\{f(t)\mid t\in\Delta\}).$$

Поскольку длина промежутка не зависит от того, входят ли в промежуток его концы, дальнейшие оценки для $\Phi_1(\Delta)=S(P'_\Delta)$ точно такие же, как для $\Phi(\Delta)$, и окончательные выводы сохраняются.

Следствие 1. *Площадь графика непрерывной функции на $\Delta=[p;q]$ равна 0.*

$$\Gamma_\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\in\Delta,\ y=f(x)\}=P_\Delta\setminus P'_\Delta,\quad P'_\Delta\subset P_\Delta\Rightarrow$$
$$\Rightarrow S(\Gamma_\Delta)=S(P_\Delta)-S(P'_\Delta)=\int\limits_p^q f-\int\limits_p^q f=0.$$

(по лемме о дополнительных свойствах площади, п. 1).

Следствие 2. *Если f,g непрерывны на $\langle a;b\rangle$, $[p;q]\subset\langle a;b\rangle$, $\forall x\in[p;q]\quad f(x)\leqslant g(x)$, то*

$$S\big(\{(x,y)\mid p\leqslant x\leqslant q,\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}\big)=\int\limits_p^q(g-f).$$

Комментарий: утверждение верно вне зависимости от знаков $f(x)$ и $g(x)$ — этим удобно для практических приложений.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса функция f на $[p;q]$ принимает наименьшее значение: $m=\min\{f(x)\mid x\in[p;q]\}$. Рассмотрим движение

$$T\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\quad T(x,y)=(x,y-m).\ \text{Обозначим } P=\{(x,y)\mid p\leqslant x\leqslant q,\ f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\},$$
$$\text{тогда } T(P)=\{(x,y)\mid p\leqslant x\leqslant q,\ f(x)-m\leqslant y\leqslant g(x)-m\}.$$

Поскольку $g(x)-m \geqslant f(x)-m \geqslant 0$, множество $T(P)$ является разностью подграфика $g(x)-m$ и строгого подграфика $f(x)-m$:

$$T(P)=\{(x,y)\mid p\leqslant x\leqslant q,\ 0\leqslant y\leqslant g(x)-m\}\setminus\{(x,y)\mid p\leqslant x\leqslant q,\ 0\leqslant y<f(x)-m\}=$$

$= P_1\setminus P_2$. Тогда по определению и дополнительным свойствам площади

$$S(P)=S\big(T(P)\big)=S(P_1)-S(P_2)=\int\limits_p^q(g-m)-\int\limits_p^q(f-m)=\int\limits_p^q(g-f).$$

Пример. Докажем школьную формулу для площади кругового сектора радиуса R с величиной центрального угла θ $(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$. Так как площадь инвариантна относительно поворотов, расположим один из лучей, ограничивающих сектор, вдоль оси Oy, другой в I квадранте под углом θ к первому. Тогда второй луч задаётся уравнением $y=x\operatorname{ctg}\theta$, сектор ограничен сверху дугой окружности $y=\sqrt{R^2-x^2}$, снизу прямой $y=x\operatorname{ctg}\theta$ для $0\leqslant x\leqslant R\sin\theta$. По следствию 2 теоремы о площади подграфика:

$$S(E)=\int\limits_0^{R\sin\theta}(\sqrt{R^2-x^2}-x\operatorname{ctg}\theta)\,dx=\left(\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2}-\frac{x^2}{2}\operatorname{ctg}\theta\right)\Bigg|_0^{R\sin\theta}=$$

$$=\frac{R^2}{2}\arcsin(\sin\theta)+\frac{R\sin\theta\cdot R\cos\theta}{2}-\frac{R^2}{2}\sin^2\theta\cdot\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{2}R^2\theta.$$

Определение 4.5 (Криволинейный сектор)**.**
Пусть $f\colon[\alpha;\beta]\to\mathbb{R}$, f — непрерывная функция, $\beta-\alpha\leqslant 2\pi$, $\forall\varphi\in[\alpha;\beta]\quad f(\varphi)\geqslant 0$. Криволинейным сектором на плоскости назовём множество

$$A_{[\alpha;\beta]}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\leqslant r\leqslant f(\varphi),\ \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\}.$$

В главе "Теория меры" будет доказано, что множество на плоскости, ограниченное конечным числом кривых, заданных в параметрическом виде непрерывными функциями, измеримо (имеет площадь).

Теорема 4.3 (Площадь криволинейного сектора)**.**
Если $f\colon[\alpha;\beta]\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, $\beta-\alpha\leqslant 2\pi$, $\forall\varphi\in[\alpha;\beta]\quad f(\varphi)\geqslant 0$, то

$$S(A_{[\alpha;\beta]})=\int\limits_\alpha^\beta\frac{1}{2}\big(f(\varphi)\big)^2\,d\varphi.$$

Доказательство. Для отрезка $\Delta\subset[\alpha;\beta]$ определим $\Phi(\Delta)=S(A_\Delta)$ и докажем её аддитивность. Пусть $\Delta_1\cup\Delta_2=\Delta\subset[\alpha;\beta]$, $\quad\Delta_1\cap\Delta_2=\{\gamma\}$. Тогда

$$A_{\Delta_1}\cap A_{\Delta_2}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ 0\leqslant r\leqslant f(\gamma),\ \varphi=\gamma\},$$

т. е. $A_{\Delta_1}\cap A_{\Delta_2}$ — отрезок на плоскости. Поэтому $S(A_{\Delta_1}\cap A_{\Delta_2})=0$ (отрезок получен поворотом из горизонтального отрезка — прямоугольника площади 0 и площадь не изменяется при поворотах). По лемме о дополнительных свойствах площади

$$S(A_{\Delta_1\cup\Delta_2})=S(A_{\Delta_1}\cup A_{\Delta_2})=S(A_{\Delta_1})+S(A_{\Delta_2}),\ \text{т. е. } \Phi(\Delta_1\cup\Delta_2)=\Phi(\Delta_1)+\Phi(\Delta_2).$$

Для нахождения плотности аддитивной функции Φ оценим $\Phi(\Delta)$ сверху и снизу:

$$E_1 \subset A_\Delta \subset E_2, \text{ где } E_1, E_2 \text{ — круговые секторы}$$
$$\text{с радиусами } r_1 = \min\{f(\varphi) \mid \varphi \in \Delta\},\ r_2 = \max\{f(\varphi) \mid \varphi \in \Delta\}:$$
$$E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \leqslant r \leqslant r_1,\ \varphi \in \Delta\},$$
$$E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \leqslant r \leqslant r_2,\ \varphi \in \Delta\}.$$

По лемме о дополнительных свойствах площади

$$E_1 \subset A_\Delta \subset E_2 \Rightarrow S(E_1) \leqslant S(A_\Delta) \leqslant S(E_2) \Rightarrow \frac{1}{2}r_1^2|\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant \frac{1}{2}r_2^2|\Delta| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Big(\min\{f(\varphi) \mid \varphi \in \Delta\}\Big)^2|\Delta| \leqslant \Phi(\Delta) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\max\{f(\varphi) \mid \varphi \in \Delta\}\Big)^2|\Delta| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\Big(\min\{f(\varphi) \mid \varphi \in \Delta\}\Big)^2 \leqslant \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\max\{f(\varphi) \mid \varphi \in \Delta\}\Big)^2.$$

Так как f непрерывна, по лемме 4.2

$$\lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ \varphi\in\Delta}} \max\{f(t) \mid t \in \Delta\} = \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ \varphi\in\Delta}} \min\{f(t) \mid t \in \Delta\} = f(\varphi).$$

Функция $z = \frac{1}{2}y^2$ непрерывна, тогда по второй теореме о пределе композиции (теорема 1.2 из добавления к главе "Непрерывные функции")

$$\text{существуют } \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ \varphi\in\Delta}} \frac{1}{2}\Big(\max\{f(t) \mid t \in \Delta\}\Big)^2 = \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ \varphi\in\Delta}} \frac{1}{2}\Big(\min\{f(t) \mid t \in \Delta\}\Big)^2 = \frac{1}{2}\big(f(\varphi)\big)^2.$$

Из последней оценки для $\frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|}$ и теоремы о зажатогй функции (теорема 5.2 из главы "Теория пределов") следует:

$$\exists \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ \varphi\in\Delta}} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} = \frac{1}{2}\big(f(\varphi)\big)^2, \text{ т. е. } \frac{1}{2}\big(f(\varphi)\big)^2 \text{ — плотность аддитивной функции } \Phi.$$

По теореме 4.1 о представлении аддитивной функции интегралом тогда

$$S(A_{[\alpha;\beta]}) = \Phi([\alpha;\beta]) = \int\limits_\alpha^\beta \frac{1}{2}\big(f(\varphi)\big)^2\, d\varphi.$$

Теорема 4.4 (Длина пути класса $C^{(1)}$).
Пусть $\gamma\colon [a;b] \to \mathbb{R}^n,\ \gamma \in C^{(1)}([a;b])$. *Тогда путь* γ *спрямляем (т. е.* $l(\gamma) < +\infty$*) и*

$$l(\gamma) = \int\limits_a^b \big|\gamma'(t)\big|\, dt = \int\limits_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n \big(\gamma_i'(t)\big)^2}\, dt.$$

Доказательство. Для отрезка $\Delta \subset [a;b]$ обозначим $\Phi(\Delta) = l(\gamma|_\Delta)$. Если $\Delta_1 = [p;q],\ \Delta_2 = [q;r]$, то $\Delta_1 \cup \Delta_2 = [p;r]$. По теореме об аддитивности длины пути (теорема 2.3)

$$\Phi(\Delta_1 \cup \Delta_2) = l(\gamma|_{[p;r]}) = l(\gamma|_{[p;q]}) + l(\gamma|_{[q;r]}) = \Phi(\Delta_1) + \Phi(\Delta_2), \text{ т. е. } \Phi \text{ — аддитивна.}$$

По определению длины пути (определение 2.6) $l(\gamma) = \lim p(\tau)$, где $p(\tau)$ — длина ломаной, соответствующая дроблению τ промежутка $[a;b]$.

1) Оценки для $p(\tau)$ и $l(\gamma)$.
Пусть $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ — координатные функции вектор-функции γ. По теореме о покоординатной сходимости (теорема 2.9 из главы "Теория пределов") производная вектор-функции γ вычисляется покоординатно: $\gamma' = (\gamma_1', \dots, \gamma_n')$. Поскольку $\gamma \in C^{(1)}([a;b])$, по теореме о покоординатной непрерывности (теорема 1.3 из раздела дополнений к главе "Непрерывные функции") функции γ_i' непрерывны. Поскольку функция $x \mapsto |x|$ непрерывна (пример после определения непрерывности), по непрерывности композиции функции $|\gamma_i'|$ непрерывны. По теореме Вейерштрасса существуют

$$m_i = \min\{|\gamma_i'(t)| \colon t \in [a;b]\}, \quad M_i = \max\{|\gamma_i'(t)| \colon t \in [a;b]\}, \quad m_i \leqslant |\gamma_i'(t)| \leqslant M_i.$$

Для $\forall t_1, t_2 \in [a;b]$ по теореме Лагранжа из главы "Дифференциальное исчисление"

$$\left|\gamma_i(t_2) - \gamma_i(t_1)\right|^2 = \left|\gamma_i'(c)\right|^2 \cdot |t_2 - t_1|^2 \Rightarrow m_i^2 (t_2 - t_1)^2 \leqslant \big(\gamma_i(t_2) - \gamma_i(t_1)\big)^2 \leqslant M_i^2 (t_2 - t_1)^2.$$

Пусть τ — дробление промежутка $[a;b]$: $a = t_0 < \ldots < t_j < t_m = b$.

$$p(\tau) = \sum_{j=0}^{m-1} \left|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\right| = \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(\gamma_i(t_{j+1}) - \gamma_i(t_j)\big)^2} \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^2 (t_{j+1} - t_j)^2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^2} \cdot (t_{j+1} - t_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^2} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^2} \cdot (b - a)$$

(сумма длин промежутков дробления $\sum\limits_{j=0}^{m-1} (t_{j+1} - t_j)$ равна длине промежутка $[a;b]$).

Аналогично из оценки $\big(\gamma_i(t_{j+1}) - \gamma_i(t_j)\big)^2 \geqslant m_i^2 (t_{j+1} - t_j)^2$ получим:
$p(\tau) \geqslant \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i^2} \cdot (b - a)$. Поскольку $l(\gamma) = \lim p(\tau)$, по теореме о переходе к пределу в неравенстве (теорема 5.1 из главы "Теория пределов")

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i^2} \cdot (b - a) \leqslant l(\gamma) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} M_i^2} \cdot (b - a) < +\infty. \qquad (*)$$

Таким образом, путь γ — спрямляем.

2) Доказательство формулы для длины пути.
Очевидно, оценка $(*)$ верна для любого отрезка $\Delta \subset [a;b]$:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(m_i(\Delta)\big)^2} \cdot |\Delta| \leqslant l(\gamma|_\Delta) = \Phi(\Delta) \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(M_i(\Delta)\big)^2} \cdot |\Delta|$$

(здесь $m_i(\Delta) = \min\{|\gamma_i'(t)| \colon t \in \Delta\} \quad M_i(\Delta) = \max\{|\gamma_i'(t)| \colon t \in \Delta\}$).

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(m_i(\Delta)\big)^2} \leqslant \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(M_i(\Delta)\big)^2}. \qquad (**)$$

по лемме 4.2 существуют $\lim\limits_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ t_0 \in \Delta}} m_i(\Delta) = \lim\limits_{\substack{|\Delta| \to 0 \\ t_0 \in \Delta}} M_i(\Delta) = |\gamma_i'(t_0)|$.

По теореме о пределе произведения и суммы

$$\lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ t_0\in\Delta}} \sum_{i=1}^{n} \big(m_i(\Delta)\big)^2 = \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ t_0\in\Delta}} \sum_{i=1}^{n} \big(M_i(\Delta)\big)^2 = \sum_{i=1}^{n} \big(\gamma_i'(t_0)\big)^2.$$

По непрерывности функции $z = \sqrt{y}$ и второй теореме о пределе композиции (теорема 1.2 из добавлений к главе "Непрерывные функции")

$$\lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ t_0\in\Delta}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(m_i(\Delta)\big)^2} = \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ t_0\in\Delta}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(M_i(\Delta)\big)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(\gamma_i'(t_0)\big)^2} = |\gamma'(t_0)|.$$

По неравенствам $(**)$ и теореме о пределе зажатой функции (теорема 5.2 из главы "Теория пределов")

$$\exists \lim_{\substack{|\Delta|\to 0\\ t_0\in\Delta}} \frac{\Phi(\Delta)}{|\Delta|} = |\gamma'(t_0)| \text{ — плотность аддитивной функции } \Phi.$$

Поскольку вектор-функция γ' непрерывна и функция $x \mapsto |x|$ непрерывна, их композиция $f(t) = |\gamma'(t)|$ непрерывна. По теореме о представлении аддитивной функции промежутка интегралом

$$l(\gamma) = \Phi([a;b]) = \int_a^b \big|\,\gamma'(t)\big|\,dt = \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big(\gamma_i'(t)\big)^2}\,dt.$$

Частный случай 1. Кривая на плоскости.

$$\text{Пусть } \gamma\colon \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [a;b] \Rightarrow l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt.$$

Частный случай 2. Движение со скоростью, постоянной по величине.
Если величина скорости (длина вектора скорости $\gamma'(t)$) постоянна, т. е. $|\gamma'(t)| = v =$ const., то $l(\gamma) = \int_a^b v\,dt = v(b-a)$. Таким образом, длина пройденного по кривой пути равна произведению величины скорости на время прохождения пути, т. е. математическое определение длины пути на кривой хорошо согласовано с интуитивным понятием длины пройденного пути.