ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Площадь плоской фигуры и интеграл

Определённый интеграл — это способ оценить функцию "в целом"*), сопоставив ей число, характеризующее "среднее" значение функции (чем больше функция, тем больше это число). Известны несколько определений интеграла от функции по промежутку. Если функция непрерывна, а промежуток конечный и замкнутый, то все эти определения приводят к одному и тому же.

Здесь будет использовано определение, основанное на геометрических соображениях, связанных с понятием площади плоской фигуры. Преимущество такого подхода в простоте и наглядности, хотя само понятие "площадь множества" требует некоторых пояснений.

Что же такое площадь? Пусть $\mathcal{F}$ — система всех ограниченных подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$ (всевозможные плоские "фигуры"). Иначе говоря, включение $E \in \mathcal{F}$ означает, что в $\mathbb{R}^2$ найдётся круг, содержащий множество E. Простейшая фигура — прямоугольник со сторонами параллельными осям координат: $P = \langle a, b\rangle \times \langle A, B\rangle$. Его площадь обозначим $|P| = (b-a)(B-A)$. Она подробно изучалась в школе.

Определение. Площадью называется функция $\sigma : \mathcal{F} \mapsto [0, +\infty)$, обладающая свойствами

$$\begin{cases} \sigma(P) = |P| \ \text{ для любого прямоугольника } \ P; \\ \sigma(E) = \sigma(E_1) + \sigma(E_2), \quad \text{если} \ \ E = E_1 \cup E_2 \ \ \text{и} \ \ E_1 \cap E_2 = \varnothing. \end{cases}$$

Таким образом, площадь это, с одной стороны, привычный математический объект — неотрицательная функция с конечными значениями. Но с другой стороны, она задана на довольно необычном множестве. Аргумент этой функции — не число или вектор, а ограниченное подмножество плоскости (т.е. плоская фигура).

Первое свойство площади называется *нормировкой*, а второе — *аддитивностью*. Если $\widetilde{E} \subset E \subset \mathbb{R}^2$, то множество E распадается на непересекающиеся части $\widetilde{E}$ и $E \setminus \widetilde{E}$. Так как все значения площади неотрицательны, то $\sigma(E) = \sigma(\widetilde{E}) + \sigma(E \setminus \widetilde{E}) \geqslant \sigma(\widetilde{E})$. Поэтому площадь *монотонна*:

$$\sigma(\widetilde{E}) \leqslant \sigma(E), \quad \text{если} \quad \widetilde{E} \subset E \subset \mathbb{R}^2.$$

Отсюда сразу следует, что множество, содержащееся в горизонтальном или вертикальном отрезке, имеет нулевую площадь.

В школьном курсе используются и другие свойства площади, например, равенство площадей конгруэнтных фигур. Однако, для построения интеграла они не потребуются. Более того, для наших целей достаточны лишь такие три свойства — нормировка, монотонность и *ослабленная аддитивность*: если вертикальная (или горизонтальная) прямая разбивает фигуру E на левую и правую (соответственно, на нижнюю и верхнюю) непересекающиеся части E_- и E_+, то $\sigma(E) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+)$.

---

*) Латинское слово "integer" означает "целый".

Приняв эти аксиомы, мы можем пользоваться ослабленной аддитивностью и при менее ограничительных предположениях — пересечение $e = E_- \cap E_+$ не обязательно считать пустым. Действительно, его площадь равна нулю, так как оно содержится в отрезке (вертикальном или горизонтальном). Поэтому множества E_+ и $E_+ \setminus e$ имеют равные площади, а E_- и $E_+ \setminus e$ образуют разбиение исходной фигуры E на непересекающиеся части, что позволяет воспользоваться ослабленной аддитивностью:

$$\sigma(E_-) + \sigma(E_+) = \sigma(E_-) + \sigma(E_+ \setminus e) = \sigma\big(E_- \cup (E_+ \setminus e)\big) = \sigma(E).$$

Замечание. В связи с приведённым определением возникают такие естественные вопросы: существует ли площадь? единственна ли она? как её вычислять?

На первый вопрос ответ интуитивно ясен — конечно, существует. Однако, формальное доказательство требует определённых усилий (см. далее упражнение).

Не всё так просто со вторым вопросом. Оказывается, вопреки интуитивному представлению, площадь не единственна. К счастью, это может проявиться лишь на “плохих” множествах, построить которые непросто. Ни в каких приложениях такие вычурные фигуры не встречаются. Как мы убедимся, существует очень широкий класс множеств, каждому из которых все площади (т.е. неотрицательные монотонные функции σ, подчинённые нормировке и ослабленной аддитивности) приписывают одно и то же значение.

Что же касается последнего вопроса — “как вычислять площадь?”, то именно многочисленные попытки ответить на него привели к созданию интегрального исчисления — эффективного инструмента для вычисления длин, площадей, объёмов и других величин, связанных с криволинейными фигурами (на плоскости или в пространстве). Первоначальному знакомству с этим исчислением и посвящён дальнейший текст. Но сначала убедимся, что два сходных и естественных построения могут привести к разным площадям.

Упражнение. Пусть $E \in \mathcal{F}$. Для произвольного конечного набора $\mathcal{P}(E) = \{P_j\}_j$ прямоугольников (со сторонами, параллельными осям координат), образующих покрытие фигуры E, т.е. $E \subset \bigcup_j P_j$, пусть $|\mathcal{P}(E)| = \sum_j |P_j|$ — “площадь” покрытия $\mathcal{P}(E)$. Докажите, что функция σ, задаваемая равенством

$$\sigma(E) = \inf_{\mathcal{P}(E)} |\mathcal{P}(E)|,$$

является площадью. Убедитесь, что $\sigma(E)$ не меняется при сдвиге множества E.

Что изменится, если кроме *конечного* набора прямоугольников рассматривать и их *последовательности*? Пусть последовательность прямоугольников $\widetilde{\mathcal{P}}(E) = \{P_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ покрывает фигуру E: $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$. Площадью такого покрытия назовём число

$$\big|\widetilde{\mathcal{P}}(E)\big| = \sum_{j=1}^{\infty} |P_j| = \lim_{j\to\infty}\big(|P_1| + \ldots + |P_j|\big).$$

Это приводит к несколько иному определению:

$$\widetilde{\sigma}(E) = \inf_{\widetilde{\mathcal{P}}(E)} |\widetilde{\mathcal{P}}(E)|.$$

Легко видеть, что функция $\widetilde{\sigma}$ также является площадью.

Теперь нижняя грань ищется по более широкому множеству покрытий (покрытие конечным набором прямоугольников есть частный случай покрытия последовательностью — достаточно взять в ней лишь конечное число непустых прямоугольников). Поэтому $\widetilde{\sigma}(E) \leqslant \sigma(E)$ для любой фигуры E. Оказывается, для некоторых множеств это неравенство строгое, т.е. площади σ и $\widetilde{\sigma}$ различны.

Упражнение. а) Докажите, что $\widetilde{\sigma}(E) = 0$, если точки множества E можно занумеровать: $E = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \dots\}$.

б) Докажите, что $\sigma(E) = 1$, если множество E "плотно расположено" в $[0,1]^2$ (т.е. сколь угодно малый круг в этом квадрате содержит точку из E).

в) Приведите пример множества $E = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \dots\}$, удовлетворяющего условию упражнения б). Тогда $\widetilde{\sigma}(E) = 0 < 1 = \sigma(E)$ и поэтому $\widetilde{\sigma} \neq \sigma$ (однако, как мы вскоре убедимся, $\widetilde{\sigma}(E) = \sigma(E)$ для всех "естественных" множеств E).

Для дальнейшего нам потребуются два простых понятия. Каждой функции f, заданной на каком-то множестве, сопоставим две новые функции $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$ — *положительная* и *отрицательная части функции* f. Отметим их очевидные свойства:

$$f_+, f_- \geqslant 0; \quad f = f_+ - f_-; \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Подграфиком неотрицательной функции f, заданной на множестве X, $X \subset \mathbb{R}$, называется множество на плоскости

$$P_f = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big| \, x \in X, \ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}.$$

Подграфик сужения функции f на множество A, $A \subset X$, будем обозначать символом $P_f(A)$. Ясно, что подграфик ограниченной функции — некоторая фигура на плоскости, т.е. $P_f(A) \in \mathcal{F}$, если множество A ограничено. Основной интерес для дальнейшего представляют лишь подграфики функций, непрерывных на конечных замкнутых промежутках. По теореме Вейерштрасса такие функции ограничены и поэтому их подграфики принадлежат классу $\mathcal{F}$.

Теперь у нас всё готово для принятия основного определения.

Определение. Пусть функция f непрерывна на промежутке $[a, b]$. *Интегралом от* f *по* $[a, b]$ называется число $\sigma(P_{f_+}) - \sigma(P_{f_-})$. Оно обозначается символом $\int_a^b f$.

Зачастую приходится интегрировать функцию, заданную на более широком множестве, чем промежуток, по которому ведётся интегрирование. Тогда $\int_a^b f$ понимается как интеграл от сужения f на $[a, b]$ (если оно непрерывно на этом промежутке).

Из определения сразу следует, что для неотрицательной функции $\int_a^b f = \sigma(P_f)$. Поэтому интеграл от такой функции имеет простой геометрический смысл — это площадь её подграфика, лежащего над этим промежутком. В частности, *интеграл от неотрицательной непрерывной функции неотрицателен.* Здесь подразумевается, что $a \leqslant b$. В случае $a = b$, подграфик вырождается в вертикальный отрезок, площадь которого равна нулю. Поэтому $\int_a^a f = 0$ (разумеется, это равенство справедливо не только для неотрицательных, но и для всех непрерывных функций). На невырожденном промежутке (т.е. при $a < b$) интеграл от неотрицательной функции может равняться нулю в единственном случае — если всюду на $[a,b]$ она равна нулю. Действительно, если $f(x_0)>0$ в некоторой точке x_0 из $[a,b]$, то для достаточно близких к x_0 точек x выполняется неравенство $f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)$. Поэтому подграфик P_f содержит прямоугольник высоты $\frac{1}{2}f(x_0)$ с невырожденным основанием. Площадь такого прямоугольника положительна и тем более положительна площадь подграфика, т.е. $\int_a^b f=\sigma\bigl(P_f\bigr)>0$.

Ясно, что умножение функции f на -1 меняет местами её положительную и отрицательную части, так что $\int_a^b(-f)=-\int_a^b f$. Отметим ещё, что в случае, когда функция постоянна на $[a,b]$, скажем $f\equiv C$, значение интеграла очевидно: $\int_a^b f=(b-a)C$ (при $C\geqslant 0$ интеграл равен площади подграфика, т.е. площади прямоугольника $[a,b]\times[0,C]$).

Принятое экономное обозначение $\int_a^b f$ удобно в теоретических рассуждениях, но может вызвать затруднения при вычислениях. Многие функции задаются формулами, которые естественно было бы использовать под знаком интеграла вместо символа f. Однако в таких формулах зачастую используются параметры, что может привести к путанице. Например, формула $x\cos y$ может задавать и линейную функцию $x\mapsto x\cos y$, и тригонометрическую функцию $y\mapsto x\cos y$. Чтобы избежать возникающих затруднений, используют более подробное обозначение интеграла: $\int_a^b f(x)\,dx$. Здесь дополнительный элемент dx указывает, что рассматривается “функция от аргумента x”, т.е. функция $x\mapsto f(x)$. В выборе символа, указывающего на аргумент функции, есть большая свобода (но, конечно, не следует брать уже “занятые” символы— a,b,f,d или $\int$). Таким образом, $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt=\int_a^b f(\text{щ})\,d\text{щ}=\int_a^b f(\maltese)\,d\maltese$ (это, конечно, не теорема, а соглашение об обозначении). В то же время для любого $\widetilde{x}\in[a,b]$ интеграл $\int_a^b f(\widetilde{x})\,dx$ равен $(b-a)f(\widetilde{x})$ (здесь интегрируется постоянная функция).

Формально, значение интеграла зависит не только от интегрируемой функции и промежутка интегрирования, но также и от того, какая площадь σ используется в определении. Однако, как мы убедимся в следующем параграфе, в действительности зависимости от σ нет. Оказывается, все площади приписывают подграфику неотрицательной непрерывной функции одно и то же число.

§ 2. Основные свойства интеграла

В первую очередь отметим фундаментальный факт, вытекающий из ослабленной аддитивности площади.

Теорема (аддитивность интеграла). *Если функция f непрерывна на промежутке $[a,b]$, то для любого $c\in[a,b]$ справедливо равенство*

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

Доказательство. Разобъём подграфики P_{f_+} и P_{f_-} вертикальной прямой $x=c$. Тогда в силу ослабленной аддитивности площади мы имеем:

$$\int_a^b f=\sigma\bigl(P_{f_+}\bigr)-\sigma\bigl(P_{f_-}\bigr)=\sigma\bigl(P_{f_+}([a,c])\bigr)+\sigma\bigl(P_{f_+}([c,b])\bigr)-\sigma\bigl(P_{f_-}([a,c])\bigr)-\sigma\bigl(P_{f_-}([c,b])\bigr).$$

Разность первой и третьей площадей равна интегралу $\int_a^c f$, а разность второй и четвёртой площадей — интегралу $\int_c^b f$. ■

С помощью индукции результат теоремы можно легко обобщить:

$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \ldots + \int_{c_n}^b f, \qquad \text{если} \quad a \leqslant c_1 \ldots \leqslant c_n \leqslant b.$$

Следующая теорема распространяет на произвольные непрерывные функции неравенство, которое для неотрицательных функций очевидно из геометрических соображений (точнее, из монотонности площади).

Теорема (МОНОТОННОСТЬ ИНТЕГРАЛА). *Если на промежутке* $[a, b]$ *функции* f, g *непрерывны и* $f \leqslant g$, *то* $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.

Доказательство. Из неравенства $f \leqslant g$ следует, что $f_+ \leqslant g_+$ и $f_- \geqslant g_-$. Поэтому $P_{f_+} \subset P_{g_+}$ и $P_{f_-} \supset P_{g_-}$. Так как площадь монотонна, то мы получаем, что

$$\sigma(P_{f_+}) \leqslant \sigma(P_{g_+}) \quad \text{и} \quad \sigma(P_{f_-}) \geqslant \sigma(P_{g_-}).$$

Следовательно,

$$\int_a^b f = \sigma\big(P_{f_+}\big) - \sigma\big(P_{f_-}\big) \leqslant \sigma\big(P_{g_+}\big) - \sigma\big(P_{g_-}\big) = \int_a^b g. \quad ■$$

Доказанная теорема делает понятным оборот речи "проинтегрировав неравенство $f \leqslant g$ по промежутку $[a, b]$, получим неравенство $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$".

Отметим частный случай теоремы:

$$\boxed{(b-a)\min_{[a,b]} f \leqslant \int_a^b f \leqslant (b-a)\max_{[a,b]} f}$$

(по теореме Вейерштрасса f достигает своих наибольшего и наименьшего значений на $[a, b]$). Действительно, для получения, например, правого неравенства следует применить теорему к постоянной функции $g \equiv \max\limits_{[a,b]} f$ (т.е. проинтегрировать неравенство $f \leqslant \max\limits_{[a,b]} f$).

Следствие (ОЦЕНКА АБСОЛЮТНОЙ ВЕЛИЧИНЫ ИНТЕГРАЛА). *Пусть функция* f *непрерывна на промежутке* $[a, b]$. *Тогда*

$$\boxed{\Big|\int_a^b f\Big| \leqslant \int_a^b |f|.}$$

Доказательство. Проинтегрируем двойное неравенство $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$:

$$\int_a^b (-|f|) \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|, \qquad \text{то есть} \qquad -\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$$

(после определения было отмечено, что минус единицу можно выносить за знак интеграла). Последнее двойное неравенство равносильно доказываемому. ■

Следствие (теорема о среднем значении). *Если функция f непрерывна на промежутке $[a,b]$, то найдётся такое число $c \in [a,b]$, что*

$$\boxed{\int_a^b f = (b-a)f(c).}$$

С геометрической точки зрения это утверждение почти очевидно: если функция f неотрицательна, то площадь подграфика равна площади прямоугольника с тем же основанием и некоторой "промежуточной" высотой $f(c)$, т.е. подграфик можно так разрезать горизонтальной прямой, что его часть, лежащая над ней, будет иметь ту же площадь, что и фигура, лежащая под прямой, но выше графика функции.

Доказательство. Если $a = b$, то нечего доказывать — обе части проверяемого равенства равны нулю (и $c = a$). Далее считаем, что $a < b$. Воспользуемся отмеченным частным случаем теоремы. Тогда

$$\min_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leqslant \max_{[a,b]} f,$$

т.е. число $I_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ принадлежит промежутку $[\min f, \max f] = f([a,b])$ (это равенство справедливо по теореме о сохранении промежутка). Поэтому I_f — одно из значений функции f на $[a,b]$, т.е. существует такой аргумент $c \in [a,b]$, что $f(c) = I_f$. Осталось заметить, что полученное равенство совпадает с утверждением следствия. ■

Замечание. Число I_f называют средним значением функции f на промежутке $[a,b]$. Как мы убедились, оно заключено между $\min f$ и $\max f$.

Определение. Пусть функция f непрерывна на промежутке $[a,b]$. Тогда функция $\Phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, действующая по правилу

$$\Phi(x) = \int_a^x f \quad \text{для} \quad x \in [a,b],$$

называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Следующая теорема устанавливает важный результат: у каждой непрерывной на промежутке функции имеется первообразная.

Теорема (Барроу). *В условиях определения функция Φ является первообразной функции f на промежутке $[a,b]$:*

$$\Phi'(x) = f(x) \quad \textit{для любого} \quad x \quad \textit{из} \quad [a,b].$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку x из $[a,b]$ и докажем, что $R(y) = \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} \underset{y\to x}{\longrightarrow} f(x)$ (всюду далее $y \in [a,b]$ и $y \neq x$). В силу аддитивности интеграла при $y > x$ дробь $R(y)$ можно записать в виде

$$R(y) = \frac{\Phi(y)-\Phi(x)}{y-x} = \frac{1}{y-x}\Big(\int_a^y f - \int_a^x f\Big) = \frac{1}{y-x}\int_x^y f.$$

Справа стоит среднее значение функции f на промежутке $[x,y]$. Поэтому существует такое число $c_y \in [x,y]$, что $R(y) = f(c_y)$. Если же $y < x$, то по тем же соображениям

$$R(y) = \frac{\Phi(x) - \Phi(y)}{x-y} = \frac{1}{x-y}\Big(\int_a^x f - \int_a^y f\Big) = \frac{1}{x-y}\int_y^x f = f(c_y),$$

где $c_y \in [y,x]$. В обоих случаях мы получаем равенство $R(y) = f(c_y)$, причём $c_y \in [a,b]$ и $|c_y - x| \leqslant |y-x|$. Ясно, что $c_y \underset{y\to x}{\longrightarrow} x$. Поскольку функция f непрерывна, отсюда следует нужное утверждение: $R(y) = f(c_y) \underset{y\to x}{\longrightarrow} f(x)$. ■

Аналогично определяется интеграл с переменным нижним пределом $\Psi(x) = \int_x^b f$ и доказывается, что $\Psi'(x) = -f(x)$. Впрочем, после того, как теорема Барроу доказана, это сразу следует из тождества $\Phi(x) + \Psi(x) \equiv \int_a^b f$ (см. аддитивность интеграла). Даваемые теоремой Барроу равенства можно записать в разном виде:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\int_a^x f\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big) = \Big(\int_a^x f\Big)'_x = \Big(\int_a^x f(t)\,dt\Big)'_x$$

и

$$-f(x) = \frac{d}{dx}\Big(\int_x^b f\Big) = \frac{d}{dx}\Big(\int_x^b f(t)\,dt\Big) = \Big(\int_x^b f\Big)'_x = \Big(\int_x^b f(t)\,dt\Big)'_x.$$

Теперь нетрудно проверить, что если функция f определена и непрерывна на произвольном промежутке $\langle a,b\rangle$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, то и на нём у f есть первообразная. Её можно построить, например, так: зафиксировав произвольную точку $c \in (a,b)$, положим $F(x) = \int_c^x f$ для $x \in [c,b\rangle$ и $F(x) = -\int_x^c f$ для $x \in \langle a,c]$ (для $x = c$ в обоих случаях получается равенство $F(c) = 0$). Из указанных формул сразу следует, что $F'(x) = f(x)$ для всех x из $\langle a,b\rangle$.

Теорема Барроу позволяет установить связь между дифференциальным и интегральным исчислениями. Особенно наглядно она выражается следующей теоремой, часто называемой основной теоремой интегрального исчисления.

Теорема (Формула Ньютона – Лейбница). *Пусть F — первообразная непрерывной на промежутке $[a,b]$ функции f. Тогда*

$$\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a).}$$

Приращение $F(b) - F(a)$ первообразной обычно записывают в виде $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ или в краткой форме $F\Big|_a^b$. Тогда формула Ньютона – Лейбница принимает вид

$$\int_a^b f = F\Big|_a^b \qquad \text{или подробнее} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

Доказательство. Как известно, на промежутке любые две первообразные одной и той же функции различаются лишь на константу. Так как по теореме Барроу интеграл с переменным верхним пределом Φ является первообразной, то существует такое число C, что $F(x) = \Phi(x) + C$ для всех x из $[a, b]$. Учитывая, что $\Phi(a) = 0$, мы легко получаем нужное равенство:

$$F(b) - F(a) = \big(\Phi(b) + C\big) - \big(\Phi(a) + C\big) = \Phi(b) = \int_a^b f. \quad \blacksquare$$

Замечание. Определение первообразной сугубо аналитическое, оно никак не связано с геометрией и, конечно, не связано с понятием площади. В то же время площадь подграфика непрерывной неотрицательной функции просто выражается через значения первообразной (нужно знать лишь её значения на концах промежутка). Отсюда следует, в частности, что все площади, т.е. неотрицательные функции, заданные на классе $\mathcal{F}$ плоских фигур и удовлетворяющие трём аксиомам (нормировка, монотонность и ослабленная аддитивность), одинаково измеряют подграфик непрерывной неотрицательной функции. Поскольку всякая фигура, измеряемая на практике, распадается на конечное число таких криволинейных трапеций, становится ясно, что множества, которые по-разному измеряются разными площадями, устроены значительно сложнее. Они могут представлять лишь теоретический интерес.

Закончив построение интеграла, перейдём теперь к изучению его арифметических свойств, облегчающих вычисления.

Теорема (ЛИНЕЙНОСТЬ ИНТЕГРАЛА). *Если функции f, g непрерывны на промежутке $[a, b]$, то для любых коэффициентов C_1, C_2 выполняется равенство*

$$\int_a^b (C_1 f + C_2 g) = C_1 \int_a^b f + C_2 \int_a^b g.$$

В частности, $\int_a^b (f \pm g) = \int_a^b f \pm \int_a^b g$ и $\int_a^b (Cf) = C \int_a^b f$.

Доказательство. Пусть F, G — первообразные функций f, g соответственно. Тогда $C_1F + C_2G$ — первообразная функции $C_1f + C_2g$. Действительно, $(C_1F + C_2G)' = C_1F' + C_2G' = C_1f + C_2g$. Теперь формула Ньютона – Лейбница приводит к нужному равенству:

$$\int_a^b (C_1 f + C_2 g) = (C_1F + C_2G)\Big|_a^b = C_1\, F\Big|_a^b + C_2\, G\Big|_a^b = C_1 \int_a^b f + C_2 \int_a^b g. \quad \blacksquare$$

Пример (НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ). Начнём с элементарного неравенства: если обе функции f, g возрастают на промежутке $[a, b]$ (или обе убывают), то

$$\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x, y \in [a, b].$$

Действительно, можно считать, что $y \leqslant x$. Тогда для возрастающих функций разности $f(x) - f(y)$ и $g(x) - g(y)$ неотрицательны, а для убывающих функций они не положительны. В обоих случаях произведение этих разностей неотрицательно.

Далее будем считать, что функции f, g не только возрастают, но и непрерывны на $[a, b]$. Тогда при фиксированном значении x в левой части неравенства стоит неотрицательная непрерывная функция от y. Она имеет неотрицательный интеграл:

$$0 \leqslant \int_a^b \big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big)\, dy.$$

Раскрыв скобки под этим интегралом, мы получим

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_a^b f(x)g(x)\, dy - \int_a^b f(x)g(y)\, dy - \int_a^b f(y)g(x)\, dy + \int_a^b f(y)g(y)\, dy = \\ &= (b-a)f(x)g(x) - f(x)\int_a^b g(y)\, dy - g(x)\int_a^b f(y)\, dy + \int_a^b f(y)g(y)\, dy. \end{aligned}$$

Справа стоит непрерывная функция от x, все значения которой неотрицательны. Поэтому неотрицателен и интеграл от этой функции (далее для краткости уже взятые по y интегралы записываются в сокращённой форме):

$$0 \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\, dx - \int_a^b f(x)\Big(\int_a^b g\Big)dx - \int_a^b g(x)\Big(\int_a^b f\Big)dx + \int_a^b \Big(\int_a^b fg\Big)dx.$$

Стоящие в круглых скобках “внутренние” интегралы являются коэффициентами для “внешних” интегралов. Поэтому

$$0 \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\, dx - \Big(\int_a^b g\Big)\int_a^b f(x)\, dx - \Big(\int_a^b f\Big)\int_a^b g(x)\, dx + (b-a)\int_a^b fg$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant (b-a)\int_a^b fg - \int_a^b g \cdot \int_a^b f - \int_a^b f \cdot \int_a^b g + (b-a)\int_a^b fg = 2(b-a)\int_a^b fg - 2\int_a^b f \cdot \int_a^b g.$$

В результате мы приходим к неравенству Чебышева:

$$\int_a^b f \cdot \int_a^b g \leqslant (b-a)\int_a^b fg.$$

Если разделить обе его части на $(b-a)^2$ и использовать обозначение I_f для среднего значения функции f (и, аналогично I_g, I_{fg} для средних значений функций g, fg), то это неравенство принимает совсем простой вид: $I_f \cdot I_g \leqslant I_{fg}$.

Отметим, наконец, что в случае, когда одна из функций возрастает, а другая убывает, все неравенства заменяются на противоположные.

Теорема (ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ). *Пусть* u, $v \in C^1([a, b])$. *Тогда*

$$\boxed{\int_a^b uv' = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v \quad \text{\textit{или подробнее}} \quad \int_a^b u(x)v'(x)\, dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x)\, dx.}$$

Доказательство. Интегрируя тождество $uv' = (uv)' - u'v$ по промежутку $[a,b]$, мы с помощью формулы Ньютона – Лейбница получаем доказываемое равенство:

$$\int_a^b uv' = \int_a^b (uv)' - \int_a^b u'v = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'v. \quad \blacksquare$$

Формула Ньютона – Лейбница подсказывает соглашение, которое удобно использовать при вычислении интегралов. До сих пор в обозначении определённого интеграла $\int_a^b f$ предполагалось, что $a \leqslant b$. Примем теперь такое соглашение: по определению

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

Это придаёт смысл “интегралу от a до b” для любых a, b, лишь бы функция была определена и непрерывна между a и b, т.е. на промежутке $[\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$. Нетрудно проверить, что при таком понимании символа $\int_a^b f$ сохраняется не только формула Ньютона – Лейбница, но другие формулы (аддитивность и линейность интеграла, теорема о среднем значении, интегрирование по частям). Но следует обратить внимание на неравенства, связанные с интегралами. В них условие — верхний предел интегрирования не меньше нижнего — существенно, от него отказаться нельзя. Например, если по каким-то причинам не известно, какое из чисел a и b больше, то абсолютную величину интеграла следует оценивать так: $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|$.

Теорема (ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ИНТЕГРАЛЕ). *Пусть $f \in C(\langle a,b\rangle)$ и $\varphi \in C^1(\langle \alpha,\beta\rangle)$, причём $\varphi(\langle \alpha,\beta\rangle) \subset \langle a,b\rangle$. Тогда для любых чисел p, q из $\langle \alpha,\beta\rangle$ справедливо равенство*

$$\boxed{\int_p^q f(\varphi)\,\varphi' = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f \quad \text{или подробнее} \quad \int_p^q f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(x)\,dx.}$$

Таким образом, при замене переменной в определённом интеграле кроме двух действий (замена функции и пересчёт дифференциала), проводимых при замене переменной в неопределённом интеграле, надо ещё заменить пределы интегрирования.

Доказательство. Пусть F — первообразная функции f на $\langle a,b\rangle$. Так как $(F(\varphi))' = F'(\varphi)\,\varphi' = f(\varphi)\,\varphi'$, то $F(\varphi)$ — первообразная функции $f(\varphi)\,\varphi'$ на $\langle \alpha,\beta\rangle$. Дважды используя формулу Ньютона – Лейбница, мы получаем нужное равенство:

$$\int_p^q f(\varphi)\,\varphi' = F(\varphi)\Big|_p^q = F(\varphi(q)) - F(\varphi(p)) = F\Big|_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f. \quad \blacksquare$$

Применяя доказанную формулу, говорят, что стоящие в ней интегралы связаны подстановкой $x = \varphi(t)$. Принятое перед теоремой соглашение позволило заметно упростить её формулировку. Конечно, не умаляя общности, можно было считать, что $p \leqslant q$. Но без сделанного соглашения пришлось бы формулировать два утверждения — первое для случая $\varphi(p) \leqslant \varphi(q)$ (возрастающая замена переменной) и второе для случая $\varphi(p) \geqslant \varphi(q)$ (убывающаяя замена).

Замену переменной используют, чтобы упростить подынтегральную функцию (точнее, процедуру её интегрирования). Какой из интегралов $\int_a^b f$ и $\int_p^q f(\varphi)\varphi'$ окажется проще, заранее не ясно, это зависит от функций f и φ. Иногда целесообразно применять формулу “напрямую”, проведя в данном интеграле $\int_a^b f(x)\,dx$ замену переменной $x=\varphi(t)$ (при этом необходимо подобрать нужный промежуток с концами p и q, на котором будет изменяться новая переменная). В других ситуациях приходится преобразовывать интеграл “в противоположном направлении”, выделив у данной подынтегральной функции множитель φ' и представив её в виде $f(\varphi)\,\varphi'$.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие установленные приёмы вычисления интегралов. В первых четырёх подынтегральные функции неотрицательны, так что мы находим площади их подграфиков.

1) Вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Основную трудность представляет иррациональное выражение $\sqrt{1+x^2}$. Оно значительно упрощается после замены переменной $x=\operatorname{tg} t$. Ясно, что в качестве промежутка, на котором меняется новая переменная t, можно взять $[0,\frac{\pi}{4}]$. В результате мы получим

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos t\,dt = \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Вычислим интеграл $\int_a^b \frac{x}{1+x^4}\,dx$. Здесь надо заметить, что числитель с точностью до коэффициента равен производной от x^2, а знаменатель легко выражается через x^2. Поэтому целесообразно сделать замену переменной $y=\varphi(x)=x^2$:

$$\int_a^b \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int_a^b \frac{\frac{1}{2}\varphi'(x)}{1+\varphi^2(x)}\,dx = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} y\Big|_{a^2}^{b^2} = \frac{\operatorname{arctg} b^2 - \operatorname{arctg} a^2}{2}.$$

3) Вычисление следующего интеграла проводится сходным образом:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{4\sin^2 x+\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\,dx}{(2\operatorname{tg} x)^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2\operatorname{tg} x)'dx}{(2\operatorname{tg} x)^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dy}{y^2+1} = \frac{\operatorname{arctg} 2}{2}.$$

В следующих примерах используется интегрирование по частям.

4) Вычислим интеграл $\int_1^e \ln x\,dx$. В качестве $u(x)$ возьмём $\ln x$, а в качестве $v(x)$ — просто x. Тогда

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_1^e - \int_1^e u'(x)\,v(x)\,dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\,x\,dx =$$
$$= e - \int_1^e 1\,dx = e-(e-1) = 1.$$

5) Вычисление интеграла $\int_0^{N\pi} x\cos x\,dx$ (здесь $N\in\mathbb{N}$) показывает, как большие положительные значения функции могут почти полностью погашаться её отрицательными значениями:

$$\int_0^{N\pi} x\cos x\,dx = \int_0^{N\pi} x(\sin x)'dx = x\sin x\Big|_0^{N\pi} - \int_0^{N\pi} \sin x\,dx = 0+\cos x\Big|_0^{N\pi} = (-1)^N - 1.$$

Ясно, что для нецелых значений параметра N за счёт двойной подстановки интеграл может быть сколь угодно большим (как положительным, так и отрицательным).

6) Интегрирование по частям позволяет иногда обходиться без применения формулы Ньютона – Лейбница. Например, повторное интегрирование по частям в интеграле $I = \int_0^t \frac{\sin\lambda x}{e^x}\,dx$ приводит к простому уравнению относительно I. Действительно,

$$I = -\int_0^t (e^{-x})'\sin\lambda x\,dx = -\frac{\sin\lambda x}{e^x}\Big|_0^t + \int_0^t e^{-x}(\sin\lambda x)'dx = -\frac{\sin\lambda t}{e^t} - \lambda\int_0^t (e^{-x})'\cos\lambda x\,dx.$$

Ещё раз проинтегрируем по частям:

$$I = -\frac{\sin\lambda t}{e^t} - \lambda\frac{\cos\lambda x}{e^x}\Big|_0^t + \lambda\int_0^t e^{-x}(\cos\lambda x)'dx = -\frac{\sin\lambda t}{e^t} + \lambda\Big(1 - \frac{\cos\lambda t}{e^t}\Big) - \lambda^2 I.$$

Решив получившееся уравнение относительно I, получим

$$\int_0^t \frac{\sin\lambda x}{e^x}\,dx = \frac{1}{1+\lambda^2}\Big(\lambda - \frac{\sin\lambda t + \lambda\cos\lambda t}{e^t}\Big).$$

Рассматриваемые в следующем примере интегралы приводят к замечательной *формуле Валлиса*.

7) Вычислим интегралы

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

С ростом n подынтегральная функция уменьшается. Поэтому $W_0 \geqslant \dots \geqslant W_{n-1} \geqslant W_n$. Ясно, что $W_0 = \frac{\pi}{2}$ и $W_1 = 1$. Считая $n \geqslant 2$, после интегрирования по частям получим:

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,(\sin x)'dx = \sin x\cos^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\big(\cos^{n-1} x\big)'dx.$$

Двойная подстановка равна нулю, а так как $\big(\cos^{n-1} x\big)' = -(n-1)\sin x\,\cos^{n-2} x$, то

$$W_n = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\cos^{n-2} x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x)\,\cos^{n-2} x\,dx =$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^{n-2} x - \cos^n x\big)\,dx = (n-1)\big(W_{n-2} - W_n\big).$$

Поэтому интегралы W_n удовлетворяют рекуррентной формуле

$$W_n = \frac{n-1}{n}\,W_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Для чётного n её повторное применение даёт нам

$$W_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\,W_{2(k-1)} = \frac{2k-1}{2k}\,\frac{2k-3}{2k-2}W_{2(k-2)} = \dots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}W_0.$$

Поскольку $W_0 = \frac{\pi}{2}$, отсюда следует, что*) $W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}$. Аналогично доказывается равенство $W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$. Итак,

$$W_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\,v_n, \quad \text{где} \quad v_n = \begin{cases} 1 & \text{при нечётном } n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при чётном } n. \end{cases}$$

Теперь нетрудно получить формулу Валлиса. Действительно, так как $v_n v_{n-1} \equiv \frac{\pi}{2}$, то

$$W_n W_{n-1} = v_n \frac{(n-1)!!}{n!!}\, v_{n-1} \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(n-2)!!}{n!!} = \frac{\pi}{2n}, \qquad \text{то есть} \qquad W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2n}.$$

Из неравенств $W_n \leqslant W_{n-1} \leqslant W_{n-2} = \frac{n}{n-1} W_n$ следует, что $W_n \sim W_{n-1}$. Поэтому $W_n^2 \sim W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2n}$ и, таким образом, $2nW_n^2 \to \pi$. Ограничившись нечётными номерами $n = 2k+1$, мы получим сокращённую запись формулы Валлиса: $4k\, W_{2k+1}^2 \to \pi$. В развёрнутом виде она такова:

$$\pi = \lim_{k\to\infty} 4k \left(\frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{3\cdot 5\cdots(2k+1)}\right)^2 = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{2k}{2k-1}\right)^2.$$

Эта формула замечательна тем, что она даёт (впервые в математике) представление числа π в виде предела последовательности *рациональных* чисел. Для практических вычислений с большой точностью она не пригодна, поскольку найденная рациональная последовательность медленно сходится к π. Значительно более эффективные способы были созданы позже (см., например, п. 410 во втором томе курса Г.М.Фихтенгольца).

§ 3. Интегральное представление остатка в формуле Тейлора

Здесь мы применим интеграл для существенного дополнения главного результата дифференциального исчисления — формулы Тейлора. Напомним, всякая функция, имеющая в точке x_0 конечную r-ю производную, может быть представлена в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r + \rho_r(x),$$

где остаток $\rho_r(x)$ мал с следующем смысле: $\rho_r(x) = o\big((x-x_0)^r\big)$ при $x\to x_0$ (ради упрощения обозначений здесь не отмечена зависимость остатка от функции f и точки x_0). К сожалению, при этом нет никакой возможности гарантировать малость конкретного значения $\rho_r(x)$, даже если известно, что разность $x–x_0$ очень мала. Следующий результат восполняет этот пробел за счёт некоторого усиления предположений о функции.

Теорема (формула Тейлора с интегральным представлением остатка). *Пусть* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ *и* $f \in C^{r+1}(\langle a,b\rangle)$ *при некотором* $r = 0, 1, 2\ldots.$ *Тогда для всех* x, $x_0 \in \langle a,b\rangle$ *справедливо равенство*

$$\rho_r(x) = \frac{1}{r!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^r f^{(r+1)}(t)\,dt.$$

*) Символ $n!!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и одной с ним чётности.

Доказательство. При $r = 0$ достаточно применить формулу Ньютона – Лейбница (поскольку функция f — первообразная своей производной f'):

$$f(x) = f(x_0) + \big(f(x) - f(x_0)\big) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt = f(x_0) + \rho_0(x).$$

При $r = 1$ надо проинтегрировать по частям в получившемся интеграле (интегрируем по t, числа x, x_0 — параметры):

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,d(t-x) = f(x_0) + (t-x)f'(t)\Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^{x}(t-x)\,df'(t) =$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-t)\,f''(t)\,dt = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \rho_1(x).$$

Далее этот процесс повторяется. Для формального доказательства воспользуемся индукцией. База индукции при $r = 0, 1$ у нас уже есть. Допустим, что для функций класса C^r справедливо интегральное представление $(r-1)$-го остатка:

$$\rho_{r-1}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{r-1}f^{(r)}(t)\,dt.$$

Для функции класса C^{r+1} с помощью интегрирования по частям этот интеграл можно преобразовать:

$$\rho_{r-1}(x) = -\frac{1}{r!}\int_{x_0}^{x} f^{(r)}(t)\,d(x-t)^r = -\frac{f^{(r)}(t)}{r!}(x-t)^r\Big|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{r!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^r df^{(r)}(t) =$$
$$= \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r + \frac{1}{r!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^r f^{(r+1)}(t)\,dt.$$

Используя для r-го многочлена Тейлора обозначение T_r, мы приходим к равенству

$$f(x) = T_{r-1}(x) + \rho_{r-1}(x) = T_{r-1}(x) + \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r + \frac{1}{r!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^r f^{(r+1)}(t)\,dt =$$
$$= T_r(x) + \frac{1}{r!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^r f^{(r+1)}(t)\,dt,$$

из которого следует нужное интегральное представление r-го остатка $\rho_r = f - T_r$. ■

Замечание. Сделав в интеграле, представляющем остаток $\rho_r(x)$, линейную замену переменной $t = x_0 + \theta(x - x_0)$, $\theta \in [0,1]$, получим такое полезное равенство

$$\rho_r(x) = \frac{(x-x_0)^{r+1}}{r!}\int_0^1 (1-\theta)^r f^{(r+1)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big)d\theta.$$

С его помощью формуле Тейлора можно придать изящный вид.

Следствие (формула Тейлора с представлением остатка по Лагранжу). *В условиях теоремы между x и x_0 существует такое (зависящее от f, x, x_0, r) число $\overline{x}$, что $\rho_r(x) = \frac{f^{(r+1)}(\overline{x})}{(r+1)!}(x-x_0)^{r+1}$ и, следовательно,*

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r + \frac{f^{(r+1)}(\overline{x})}{(r+1)!}(x-x_0)^{r+1}.}$$

В частности, если $\left|f^{(r+1)}\right| \leqslant C$ всюду между x_0 и x, то $|\rho_r(x)| \leqslant C\frac{|x-x_0|^{r+1}}{(r+1)!}$, т.е.

$$\left|f(x) - \Big(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(r)}(x_0)}{r!}(x-x_0)^r\Big)\right| \leqslant C\frac{|x-x_0|^{r+1}}{(r+1)!}.$$

Это неравенство позволяет оценивать отклонение многочлена Тейлора от функции в ***фиксированной*** точке x (в отличие от представления остатка по Пеано, дающего информацию лишь о ***предельном*** поведении остатка).

Доказательство. Пусть m и M — минимальное и максимальное значения производной $f^{(r+1)}$ на промежутке с концами x_0 и x, т.е.

$$m = \min_{0\leqslant\theta\leqslant 1} f^{(r+1)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big) \quad \text{и} \quad M = \max_{0\leqslant\theta\leqslant 1} f^{(r+1)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big).$$

Тогда для интеграла $I = \int_0^1 (1-\theta)^r f^{(r+1)}\big(x_0 + \theta(x-x_0)\big)d\theta$ справедлива двойная оценка

$$m\int_0^1 (1-\theta)^r d\theta \leqslant I \leqslant M\int_0^1 (1-\theta)^r d\theta.$$

Так как $\int_0^1 (1-\theta)^r d\theta = -\frac{1}{r+1}(1-\theta)^{r+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{r+1}$, отсюда следует, что $\frac{m}{r+1} \leqslant I \leqslant \frac{M}{r+1}$, т.е. число $(r+1)I$ лежит между минимальным значением m производной $f^{(r+1)}$ и её максимальным значением M. Согласно теореме Больцано – Коши о промежуточном значении отсюда следует, что $(r+1)I = f^{(r+1)}(\overline{x})$ для некоторого аргумента $\overline{x}$, лежащего между x_0 и x. Учитывая представление остатка $\rho_r(x)$ с помощью интеграла по промежутку $[0,1]$, мы видим, что

$$\rho_r(x) = \frac{I}{r!}(x-x_0)^{r+1} = \frac{f^{(r+1)}(\overline{x})}{(r+1)!}(x-x_0)^{r+1}. \ \blacksquare$$

В некоторых случаях (когда производная $f^{(r+1)}$ очень сильно изменяется между точками x и x_0) лагранжева форма остатка оказывается недостаточно информативной, поскольку не ясно, сколь велико значение $f^{(r+1)}(\overline{x})$. Но если $(r+1)$-я производная меняется не слишком быстро, то очень удобно применять формулу Тейлора именно с таким представлением остатка.

Пример. Получим формулу для приближённого вычисления числа e. Для этого применим следствие к функции $f(x) = e^x$ с $x_0 = 0$ и $x = 1$. Поскольку в этом случае $f^{(k)}(0) = 1$ для всех k, мы приходим к равенству

$$e = f(1) = f(0) + f'(0) + \ldots + \frac{f^{(r)}(0)}{r!} + \frac{f^{(r+1)}(\overline{x})}{(r+1)!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{r!} + \frac{e^{\overline{x}}}{(r+1)!}.$$

Так как $0 \leqslant \overline{x} \leqslant 1$, то отсюда следует двусторонняя оценка погрешности:

$$0 < e - \Big(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(r-1)!} + \frac{1}{r!}\Big) \leqslant \frac{e}{(r+1)!} < \frac{3}{(r+1)!}.$$

В частности, при $r = 9$ приходим к неравенству

$$0 < e - \Big(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!}\Big) < \frac{3}{(10)!} < \frac{3}{3 \cdot 10^6} = 10^{-6}.$$

О.Коши обратил внимание на то, что оценка погрешности позволяет просто установить иррациональность числа e. Действительно, если $e = \frac{m}{n}$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$, то, взяв $r = n$, мы получим

$$0 < \frac{m}{n} - \Big(2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\Big) < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Умножим это неравенство на $n!$:

$$0 < m\,(n-1)! - \Big(2 \cdot n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \ldots + \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{n!}\Big) < \frac{3}{n+1}.$$

Поскольку $2 < e < 3$, знаменатель n не меньше двух и, следовательно, $\frac{3}{n+1} \leqslant 1$. Поэтому

$$0 < m\,(n-1)! - \Big(2 \cdot n! + 3 \cdots (n-1)n + 4 \cdots (n-1)n + \ldots + (n-1)n + n + 1\Big) < 1.$$

Но в середине этого неравенства стоит целое число (разность целых), которое не может лежать в интервале $(0, 1)$. Итак, предположение $e = \frac{m}{n}$ ведёт к противоречию.

Во втором томе “Курса дифференциального и интегрального исчисления” Г.М.Фихтенгольца (см. п. 319) доказывается значительно более сильное утверждение Ш.Эрмита: число e трансцендентно (оно не является корнем ни какого алгебраического многочлена с целыми коэффициентами). С числом π всё сложнее. Немецкий математик Ф.Линдеман, опираясь на метод Эрмита, доказал трансцендентность π. Этот результат закрыл проблему “квадратуры круга”, интересовавшую ещё античных математиков. Из трансцендентности π следует, что с помощью циркуля и линейки, исходя из единичного отрезка, невозможно построить отрезок длины π.

Как заметил Эрмит, более слабый результат — иррациональность π — можно доказать довольно просто. В следующем упражнении изложена предложенная им идея. Оказывается, в решении и этой “арифметической” задачи удобно использовать интеграл.

Упражнение (ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ ЧИСЛА π). Для произвольного номера j определим интеграл

$$H_j = \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\big(\frac{\pi}{2}\big)^2 - x^2\Big)^j \cos x\, dx.$$

Из-за коэффициента $\frac{1}{j!}$ интегралы H_j быстро стремятся к нулю:

$$0 < H_j \leqslant \frac{1}{j!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2j} \cos x\, dx = \frac{1}{j!} \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2j} < \frac{3^j}{j!} \to 0.$$

Дважды проинтегрировав по частям, докажите формулу понижения для этих интегралов: $H_j = (4j-2)H_{j-1} - \pi^2 H_{j-2}$. Так как $H_0 = 1$ и $H_1 = 2$, то из неё следует, что H_j “просто зависит” от π^2. Точнее, для каждого номера j существует такой алгебраический многочлен P_j степени не выше j с целыми коэффициентами, что $H_j = P_j(\pi^2)$. Отсюда уже несложно получить, что предположение $\pi^2 = \frac{m}{n}$, где $m, n \in \mathbb{N}$, ведёт к противоречию. Действительно, так как коэффициенты многочлена P_j целые, то

$$0 < H_j = P_j(\pi^2) = P_j\Big(\frac{m}{n}\Big) = \frac{\text{целое}}{n^j},$$

и, следовательно, $n^j H_j$ — положительное целое число. В частности, $n^j H_j \geqslant 1$. Но согласно установленной в начале оценке произведение $n^j H_j$ не больше $\frac{1}{j!}(3n)^j$, а это бесконечно малая при $j \to +\infty$ величина, что невозможно, так как $n^j H_j \geqslant 1$.

Итак, предположение $\pi^2 = \frac{m}{n}$ неверно, т.е. число π^2 (и тем более π) иррационально.

§ 4. Интегральные суммы

Во многих случаях формула Ньютона – Лейбница позволяет получать *численное* выражение для определённого интеграла. Однако иногда это выражение оказывается столь громоздким, что из него не ясно, большое ли это число, положительно ли оно. Более того, известно, что первообразные некоторых элементарных функций неэлементарны. В таком случае формула Ньютона – Лейбница не даёт никакой информации о величине интеграла. Поэтому возникает естественная задача о его приближённом вычислении. Поскольку у нас интеграл определяется как разность площадей подграфиков, эта задача сводится к приближённому вычислению таких площадей. Исходя из геометрических соображений, естественно поступить так: разбить промежуток интегрирования на большое число коротких промежутков и на каждом из них заменить подграфик функции прямоугольником с тем же основанием, взяв в качестве его высоты какое-то значение функции на этом маленьком промежутке. Просуммировав площади всех таких узких полосок, получим площадь ступенчатой фигуры, аппроксимирующей подграфик. Можно надеяться, что их площади близки. Для формального обоснования нам потребуется один результат о непрерывных функциях.

Напомним, что функция f, заданная на промежутке $\langle a, b\rangle$, непрерывна на нём, если она непрерывна в каждой его точке, т.е. если для любой точки x_0 из $\langle a, b\rangle$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $\delta_f(\varepsilon, x_0)$, что для каждой точки x из $\langle a, b\rangle$, для которой $|x - x_0| < \delta_f(\varepsilon, x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Зависимость δ от f отмечать не будем, поскольку далее функция фиксирована. Но вот зависимость от точки x_0 следует обсудить подробнее. Простые примеры показывают, что для некоторых функций любому уровню точности ε можно сопоставить общее, не зависящее от x_0, число δ, гарантирующее точность ε в вычислении значения $f(x)$, как только $|x - x_0| < \delta$. В иных же случаях указать такой “универсальное”, не зависящее от x_0, значение δ невозможно. Описанная благоприятная ситуация важна для наших дальнейших рассуждений. В связи с этим примем такое

Определение. Функция f, заданная на промежутке $\langle a, b\rangle$, называется *равномерно непрерывной,* если для любого числа ε, $\varepsilon > 0$, существует такое число δ, $\delta > 0$, что для любых аргументов x и x_0 из $\langle a,b\rangle$, удовлетворяющих неравенству $|x-x_0|<\delta$, справедлива оценка $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Очевидно, функция, удовлетворяющая этому определению, непрерывна в каждой точке промежутка (даваемое определением “универсальное” число δ обеспечивает выполнение условия определения непрерывности функции в произвольной точке). Таким образом, равномерная непрерывность функции влечёт её поточечную непрерывность. Несложные примеры (см. далее) показывают, что обратное утверждение не верно, т.е. равномерная непрерывность сильнее поточечной. Однако, как мы вскоре увидим, несколько неожиданную роль здесь играет тип промежутка $\langle a,b\rangle$. Оказывается, если он конечен и замкнут, т.е. $\langle a,b\rangle=[a,b]$, то на таком промежутке поточечная непрерывность влечёт равномерную (так что они равносильны).

Замечание. Теорема Лагранжа даёт простое условие на функцию, обеспечивающее её равномерную непрерывность: если функция f всюду дифференцируема на промежутке $\langle a,b\rangle$ и её производная ограничена на нём, то f равномерно непрерывна. Действительно, если C — верхняя граница для $|f'|$ на $\langle a,b\rangle$, то $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|\,|f'(\overline{x})|\leqslant C|x-x_0|$. Поэтому $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, если $|x-x_0|<\delta=\frac{\varepsilon}{C}$.
В частности, функции $\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{arctg} x$ равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$.

Равномерная непрерывность — качественная характеристика функции, которую в некоторых случаях полезно дополнить количественной — модулем непрерывности функции. Так называют функцию ω_f, заданную на $[0,+\infty)$ и действующую по правилу $\omega_f(t)=\sup\{|f(x')-f(x'')|\,|\,x',x''\in\langle a,b\rangle,\ |x'-x''|\leqslant t\}$ для любого $t\geqslant 0$.

Ясно, что это неотрицательная неубывающая функция, равная нулю в нуле. В силу равномерной непрерывности $\omega_f(t)\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$, т.е. она непрерывна в нуле. Например, если функция f всюду дифференцируема и $C=\sup|f'|<+\infty$, то $\omega_f(t)\leqslant Ct$.

Упражнение. Пусть ω_f — модуль непрерывности функции f, равномерно непрерывной на промежутке (возможно, бесконечной длины). Докажите, что $\omega_f(t_1+t_2)\leqslant\omega_f(t_1)+\omega_f(t_2)$ для любых $t_1,t_2\geqslant 0$. Выведите отсюда неравенство $\omega_f(nt)\leqslant n\omega_f(t)$ ($t\geqslant 0,\ n\in\mathbb{N}$). Поскольку ω_f ограничена вблизи нуля, это неравенство гарантирует конечность всех значений функции ω_f.

Рассмотрим примеры, в которых поточечная непрерывность есть, а равномерной непрерывности нет. Но сначала надо сформулировать отрицание равномерной непрерывности. Стандартная процедура приводит к такой формулировке — отсутствие равномерной непрерывности функции $f:\ \langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ означает, что

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x,x_0\in\langle a,b\rangle:\quad |x-x_0|<\delta,\quad |f(x)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon.$$

Иначе говоря, найдутся сколь угодно близкие аргументы, в которых значения функции различаются по крайней мере на некоторую фиксированную положительную величину.

Пример 1. Пусть $f(x)=x^2,\ x\in\mathbb{R}$. Убедимся, что эта непрерывная функция не является равномерно непрерывной. Возьмём $\varepsilon=1$ и для произвольного $\delta>0$ подберём такие числа x и x_0, что $x^2-x_0^2>1$, хотя $|x-x_0|<\delta$. Второе неравенство можно обеспечить, взяв $x=x_0+\frac{\delta}{2}$. Тогда $x^2-x_0^2=\delta\,x_0+\frac{\delta^2}{4}>\delta\,x_0$. Поэтому при $x_0=\frac{1}{\delta}$ мы получаем $x^2-x_0^2>1$.

Ясно, что в этом примере вместо $\varepsilon = 1$ можно взять сколь угодно большое число (надо будет выбирать аргумент x_0 ещё бо́льшим).

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$, $x \in (0, 1]$. В точке $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, она равна нулю, а в очень близкой точке $\overline{x}_n = \frac{1}{n+1/2}$ её значение равно $(-1)^n$. Таким образом, $|f(x_n) - f(\overline{x}_n)| = 1$ для всех n, хотя разность $|x_n - \overline{x}_n|$ может быть сделана сколь угодно малой за счёт выбора большого номера n.

Теперь у нас есть всё необходимое для того, чтобы установить свойство непрерывных функций, играющее важную роль в получении приближённых значений интеграла.

Теорема (Кантор.) *Непрерывная на конечном замкнутом промежутке функция равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть $-\infty < a < b < +\infty$ и $f \in C([a, b])$. Докажем равномерную непрерывность функции f. Допустим противное. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ при любом $\delta > 0$ найдутся такие аргументы $x(\delta)$ и $x_0(\delta)$, что $|x(\delta) - x_0(\delta)| < \delta$, но $\bigl|f\bigl(x(\delta)\bigr) - f\bigl(x_0(\delta)\bigr)\bigr| \geqslant \varepsilon$. Последовательно придавая параметру δ значения $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, обозначим $t_n = x\bigl(\frac{1}{n}\bigr)$ и $s_n = x_0\bigl(\frac{1}{n}\bigr)$. Тогда $t_n, s_n \in [a, b]$ и $|t_n - s_n| < \frac{1}{n}$ для всех n. Согласно принципу выбора Больцано – Вейерштрасса из последовательности $\{t_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{t_{n_j}\}$. Пусть $t_{n_j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} c$. Так как $t_n \in [a, b]$ для всех n, то $a \leqslant t_{n_j} \leqslant b$ для всех j. Перейдя к пределу при $j \to \infty$, мы получаем, что $a \leqslant c \leqslant b$, т.е. $c \in [a, b]$ (именно в этом рассуждении использована замкнутость и ограниченность промежутка). Кроме того, не только $t_{n_j} \to c$, но и $s_{n_j} \to c$ (так как $t_n - s_n \to 0$). Поскольку функция f непрерывна в точке c, отсюда следует, что $f\bigl(t_{n_j}\bigr) - f\bigl(s_{n_j}\bigr) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Но это невозможно из-за неравенств $|f(t_n) - f(s_n)| \geqslant \varepsilon$, справедливых для всех номеров n и, в частности, $\bigl|f\bigl(t_{n_j}\bigr) - f\bigl(s_{n_j}\bigr)\bigr| \geqslant \varepsilon$ для всех j. Полученное противоречие показывает, что сделанное предположение не верно, т.е. функция f равномерно непрерывна. ■

Перейдём к интересующей нас задаче — приближённому вычислению определённого интеграла. Для этого нам потребуются некоторые новые понятия и связанная с ними терминология.

Пусть $[a, b]$ — конечный замкнутый промежуток. Его дроблением τ назовём такой набор точек $\{x_j\}_{j=0}^n$, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Рангом $|\tau|$ этого дробления назовём наибольшую из длин промежутков, на которые τ разбивает $[a, b]$, т.е. $|\tau| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}(x_j - x_{j-1})$. Наконец, оснащением θ дробления τ назовём такой набор чисел $\{t_j\}_{j=1}^n$, что $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ для $j = 1, \ldots, n$. Пару $\tau\theta$ называют оснащённым дроблением.

Определение. Пусть функция f задана на конечном замкнутом промежутке $[a, b]$. Её *интегральной суммой,* соответствующей дроблению $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ и оснащению $\theta = \{t_j\}_{j=1}^n$, называется число

$$S_{\tau\theta}(f) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})f(t_j).$$

Здесь не предполагается непрерывность функции, но для нас основной интерес представляют интегральные суммы лишь непрерывных функций. Если функция f

неотрицательна, то сумма $S_{\tau\theta}(f)$ — не что иное, как площадь ступенчатой фигуры, аппроксимирующей подграфик P_f (о ней говорилось в начале параграфа). Теперь мы можем перейти к основной результату.

Теорема (ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СУММАХ). *Пусть $f \in C([a,b])$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое положительное число δ, что для произвольного дробления τ, ранг $|\tau|$ которого меньше δ, и для любого оснащения θ выполняется неравенство*

$$\Big|\int_a^b f - S_{\tau\theta}\Big| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда сразу следует, что если имеется последовательность дроблений τ_n и их оснащений θ_n, причём $|\tau_n| \to 0$, то $S_{\tau_n\theta_n}(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$.

Доказательство. Поскольку согласно теореме Кантора функция f равномерно непрерывна, существует такое число δ, $\delta > 0$, что $|f(x) - f(t)| < \varepsilon/(b-a)$, как только $|x - t| < \delta$. Убедимся, что это число требуемое.

Для этого оценим разность $\Delta = \int_a^b f - S_{\tau\theta}(f)$, считая, что $|\tau| < \delta$. Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^n$ и $\theta = \{t_j\}_{j=1}^n$. Тогда по определению интегральной суммы $S_{\tau\theta}(f) = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) f(t_j)$. Слагаемое $(x_j - x_{j-1})f(t_j)$ равно интегралу по промежутку $[x_{j-1}, x_j]$ от постоянной функции, равной на нём числу $f(t_j)$. Поэтому, пользуясь аддитивностью интеграла, мы можем записать разность Δ в виде

$$\Delta = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx - \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(t_j)\,dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(f(x) - f(t_j)\big)\,dx.$$

Следовательно,

$$|\Delta| \leqslant \sum_{j=1}^n \Big|\int_{x_{j-1}}^{x_j} \big(f(x) - f(t_j)\big)\,dx\Big| \leqslant \sum_{j=1}^n \int_{x_{j-1}}^{x_j} \big|f(x) - f(t_j)\big|\,dx.$$

В каждом интеграле $|x - t_j| \leqslant x_j - x_{j-1} \leqslant |\tau| < \delta$. Поэтому $|f(x) - f(t_j)| \leqslant \varepsilon/(b-a)$. Таким образом,

$$|\Delta| \leqslant \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a}(x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}\,(x_n - x_0) = \varepsilon. \blacksquare$$

Используя модуль непрерывности ω_f, легко проверить, что проведённое рассуждение даёт оценку: $\big|\int_a^b f - S_{\tau\theta}(f)\big| \leqslant (b-a)\,\omega_f(|\tau|)$.

Иногда, допуская некоторую вольность речи, утверждение теоремы формулируют так: *интегральные суммы $S_{\tau\theta}$ стремятся к интегралу $\int_a^b f$ при $|\tau| \to 0$.*

Первое формальное определения интеграла от непрерывной функции дал Коши, причём он в основу своего определения положил не геометрические соображения, а интегральные суммы $S_{\tau\theta}$ (их обычно называют суммами Коши). Интегралом же он назвал такое число I, что $S_{\tau\theta} \to I$ при $|\tau| \to 0$, т.е. такое число I, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\big|S_{\tau\theta} - I\big| \leqslant \varepsilon$ для всех дроблений τ и их оснащений

θ, как только $|\tau| < \delta$. При таком подходе необходимо сначала доказывать существование числа I у каждой непрерывной функции, а затем требуется довольно рутинное доказательство аддитивности полученного интеграла.

Риман стал использовать определение Коши, отказавшись от априорного предположения о непрерывности — если интегральные суммы некоторой функции имеют предел в указанном смысле, то она называется интегрируемой в смысле Римана. На таком пути технические трудности возрастают, поскольку для интегралов от разрывных функций, вообще говоря, нет теоремы о среднем. Поэтому не только аддитивность, но и линейность интеграла нужно устанавливать специальным рассуждением. В курсе Г.М.Фихтенгольца этот подход Римана полностью реализован.

Пример 1. Вычислим интеграл $\int_0^a e^x dx$, не используя формулу Ньютона – Лейбница. Для этого рассмотрим последовательность *равномерных* дроблений промежутка $[0, a]$:

$$\tau_n = \Big\{0, \frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}j, \dots, \frac{a}{n}(n-1), a\Big\}.$$

Ясно, что $|\tau_n| = \frac{a}{n} \to 0$. Пусть оснащение θ_n образовано левыми концами промежутков разбиения, т.е. $\theta_n = \{0, \frac{a}{n}, \dots, \frac{a}{n}(j-1), \dots, \frac{a}{n}(n-1)\}$. Тогда

$$S_{\tau_n\theta_n}(exp) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a}{n} e^{\frac{a}{n}(j-1)} = \frac{a}{n}\,\frac{e^{\frac{a}{n}n} - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1} = \frac{a}{n}\,\frac{e^a - 1}{\frac{a}{n} + O(1/n^2)} = \frac{e^a - 1}{1 + O(1/n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^a - 1.$$

В результате мы приходим к равенству $\int_0^a e^x dx = e^a - 1$.

Пример 2. Рассмотрим суммы $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$ (n слагаемых). Их легко оценить сверху и снизу: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2n}\,n < s_n < \frac{n}{n+1} < 1$. Убедимся, что существует предел $\lim s_n$ и вычислим его. Для этого запишем j-ое слагаемое в таком виде

$$\frac{1}{n+j} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{j}{n}} = \frac{1}{n}\,f\Big(\frac{j}{n}\Big), \quad \text{где} \quad f(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad x \in [0, 1].$$

Теперь ясно, что $s_n = S_{\tau_n\theta_n}(f)$ — интегральная сумма функции f, соответствующая равномерному дроблению $\tau_n = \big\{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\big\}$ промежутка $[0, 1]$ и оснащению $\theta_n = \big\{\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1\big\}$, образованному правыми концами промежутков дробления. Следовательно,

$$s_n = S_{\tau_n\theta_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Пример 3. Выясним, с какой скоростью возрастают суммы

$$s_n(p) = 1^p + 2^p + \ldots + j^p + \ldots + n^p.$$

Здесь p — неотрицательный фиксированный параметр. При $p = 0, 1, 2, 3$ эти суммы вычисляются непосредственно.

Оценка сверху очевидна: $s_n(p) < n \cdot n^p = n^{p+1}$. Оценивая снизу s_n так же грубо, получим слабое неравенство $s_n(p) > n$. Но если действовать аккуратнее, то оценку снизу можно значительно улучшить. Для этого отбросим первую половину слагаемых:

$$s_n(p) \geqslant \sum_{\frac{n}{2} \leqslant j \leqslant n} j^p \geqslant \Big(\frac{n}{2}\Big)^p \frac{n}{2} = \Big(\frac{n}{2}\Big)^{p+1}.$$

Таким образом, $\frac{1}{2^{p+1}} \leqslant \frac{s_n(p)}{n^{p+1}} < 1$. Этот результат можно уточнить, найдя предел дроби $s_n(p)/n^{p+1}$. Для этого запишем её в виде

$$\frac{s_n(p)}{n^{p+1}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\Big(\frac{j}{n}\Big)^p.$$

Справа стоит интегральная сумма функции x^p, соответствующая равномерному дроблению промежутка $[0,1]$ (оснащение образуют правые концы промежутков дробления). Следовательно,

$$\frac{s_n(p)}{n^{p+1}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{p+1}, \quad \text{то есть} \quad s_n(p) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Наша следующая цель — количественно оценить разность $\Delta = \int_a^b f - S_{\tau\theta}(f)$. Конечно, что-то о ней мы уже знаем — как уже было отмечено, $|\Delta| \leqslant (b-a)\,\omega_f(|\tau|)$. Если у функции f всюду имеется производная, причём $|f'| \leqslant C$ на всём промежутке $[a,b]$, то $\omega_f(t) \leqslant Ct$, и мы получаем, что $|\Delta| \leqslant C(b-a)|\tau|$. Если разбиение τ содержит точки $a = x_0, \dots, x_n = b$, т.е. исходный промежуток $[a,b]$ делится на n частей, то длина хотя бы одной из них не меньше $\frac{b-a}{n}$. Поэтому $|\tau| \geqslant \frac{b-a}{n}$ — ранг дробления не может очень быстро стремиться к нулю при неограниченном увеличении числа точек дробления. Это означает, что известная нам оценка $|\Delta| \leqslant C(b-a)|\tau|$ (для функций с ограниченной производной) не может гарантировать быстрой сходимости интегральных сумм к интегралу. Уже на примере функции $f(x) = x$ можно убедиться, что беря в качестве оснащения только правые (или только левые) концы промежутков равномерного дробления, мы получим отклонение интегральных сумм от интеграла равное $\frac{b-a}{2}\,|\tau|$. Таким образом, даже для “хороших” функций имеющуюся оценку отклонения существенно улучшить нельзя, если рассматривать всевозможные оснащения. Однако, если подходящим образом увязать оснащение с функцией и дроблением, то можно получить значительно более точное приближение интеграла суммами.

Мы рассмотрим здесь лишь один такой способ, называемый *формулой трапеций*. Он состоит в следующем. На промежутке $[x_{j-1}, x_j]$ точка t_j выбирается так, что $f(t_j) = \frac{1}{2}\big(f(x_{j-1}) + f(x_j)\big)$ (поскольку эта полусумма лежит между $f(x_{j-1})$ и $f(x_j)$, такой выбор возможен по теореме Больцано – Коши о промежуточном значении непрерывной функции). В этом случае произведение $(x_j - x_{j-1})f(t_j) = \frac{1}{2}(x_j - x_{j-1})\big(f(x_{j-1}) + f(x_j)\big)$ равно (для неотрицательной функции f) площади трапеции с вершинами $\big(x_{j-1}, 0\big)$, $\big(x_{j-1}, f(x_{j-1})\big)$, $\big(x_j, 0\big)$, $\big(x_j, f(x_j)\big)$. Поэтому приближённое равенство

$$\int_a^b f \approx \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})\frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}$$

называют формулой трапеций. Для равномерного дробления, образованного точками $x_j = a + \frac{b-a}{n}\,j$, её можно записать проще:

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n}{}^{\blacktriangledown} f(x_j),$$

где штрих у знака суммы означает, что первое (при $j = 0$) и последнее (при $j = n$) слагаемые берутся с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Теорема (о погрешности формулы трапеций.) *Пусть* $f \in C^2([a,b])$. *Тогда для любого дробления* $\tau = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ *выполняется неравенство*

$$\Big|\int_a^b f - \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})\frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}\Big| \leqslant \frac{1}{8}|\tau|^2 \int_a^b |f''|.$$

В частности, для равномерного дробления

$$\Big|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{j=0}^{n}{}' f\Big(a + \frac{b-a}{n}j\Big)\Big| \leqslant \frac{(b-a)^2}{8n^2}\int_a^b |f''|.$$

Доказательство. Преобразуем интеграл по промежутку $[x_{j-1}, x_j]$ с помощью интегрирования по частям $\big($далее $\overline{x}_j = \frac{x_{j-1}+x_j}{2}\big)$:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,d(x - \overline{x}_j) = (x_j - x_{j-1})\frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - \overline{x}_j) f'(x)\,dx.$$

В возникшем интеграле также проинтегрируем по частям:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - \overline{x}_j) f'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x)\,d(x - x_{j-1})(x - x_j) = \frac{1}{2}\int_{x_{j-1}}^{x_j} (x - x_{j-1})(x_j - x) f''(x)\,dx.$$

Поэтому, определив на $[a,b]$ функцию φ равенством $\varphi(x) = (x - x_{j-1})(x_j - x)$ для $x \in [x_{j-1}, x_j]$, мы получим

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx = (x_j - x_{j-1})\frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2} - \frac{1}{2}\int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi(x) f''(x)\,dx.$$

Теперь сложим все эти равенства при $j = 1, \ldots, n$:

$$\int_a^b f = \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})\frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2} - \frac{1}{2}\int_a^b \varphi f''. \qquad (*)$$

Таким образом,

$$\Big|\int_a^b f - \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})\frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}\Big| = \frac{1}{2}\Big|\int_a^b \varphi f''\Big| \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |\varphi|\,|f''|.$$

На каждом промежутке $[x_{j-1}, x_j]$ наибольшее значение функции φ равно $(x_j - x_{j-1})^2/4$ (оно достигается в середине промежутка). Поскольку $x_j - x_{j-1} \leqslant |\tau|$, мы получаем требуемую оценку:

$$\Big|\int_a^b f - \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1})\frac{f(x_{j-1}) + f(x_j)}{2}\Big| \leqslant \frac{1}{2}\int_a^b |\varphi|\,|f''| \leqslant \frac{1}{8}\,|\tau|^2 \int_a^b |f''|. \quad \blacksquare$$

Замечание. По ходу доказательства мы не только оценили разность между интегралом и интегральной суммой, но и получили для неё интегральное представление $(*)$. Из него можно получать более детальную информацию о погрешности. Например, если функция f выпуклая (а тогда $f'' \geqslant 0$), то интеграл не больше интегральной суммы (впрочем, это несложно понять, сделав рисунок).

Кроме того, интегральное представление остатка подсказывает, как распорядиться свободой в выборе точек $x_1, \ldots, x_{n-1}$ для уменьшения погрешности. Поскольку она равна $\frac{1}{2}\int_a^b \varphi f''$, а функция φ особенно мала на коротких промежутках $[x_{j-1}, x_j]$, точки x_j целесообразно выбирать так, чтобы их было много там, где велика производная f''. Там же, где она мала, точки x_j можно расставлять значительно реже.

Упражнение. Получите аналог равенства $(*)$ для *формулы центральных прямоугольников*, в которой в качестве точек оснащения берутся середины промежутков дробления: $t_j = \frac{1}{2}(x_{j-1} + x_j)$. Убедитесь, что полученные в теореме оценки погрешности сохраняются и в этом случае.

Существуют более эффективные (но и более сложные) способы приближения интегралов с помощью сумм. Некоторые из них обсуждаются во втором томе курса Г.М.Фихтенгольца.

В завершение нашего обсуждения связи между интегралами и суммами установим полезную формулу, которая является частным (но наиболее важным) случаем *формулы Эйлера – Маклорена.* В ней в прежнем смысле используется символ $\sum^{\blacktriangledown}$ и, кроме того, дробная часть вещественного числа x, т.е. разность $x-[x]$, обозначается символом $\{x\}$.

Следствие. *Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$, $m < n$ и $f \in C^2([m,n])$. Тогда*

$$\boxed{\sum_{j=m}^{n}{}^{\blacktriangledown} f(j) = \int_m^n f + \frac{1}{2}\int_m^n f''(x)\,\{x\}(1-\{x\})\,dx.}$$

Доказательство. Воспользуемся равенством $(*)$ в случае, когда $a=m$, $b=n$, а дробление τ образуют целые числа: $\tau = \{m, m+1, \ldots, n-1, n\}$. На произвольном промежутке дробления $[j-1, j]$ функция φ задаётся равенством $\varphi(x) = (x-j+1)(j-x)$. Так как $[x]=j-1$ для x из $[j-1, j)$, то $\varphi(x) = (x-[x])(1+[x]-x) = \{x\}(1-\{x\})$. На правом конце промежутка, т.е. при $x = j$, это равенство очевидно, поскольку нулю равна и функция φ, и дробная часть $\{x\}$. Таким образом, $\varphi(x) = \{x\}(1-\{x\})$ на $[j-1, j]$ для всех j, следовательно, это равенство справедливо на всём промежутке $[m,n]$. Из сказанного следует, что доказываемое равенство есть частный случай формулы $(*)$. ■

Следующие примеры показывают, как с помощью формулы Эйлера – Маклорена можно находить асимптотику разных последовательностей. Начнём с уточнения и небольшого обобщения ранее полученного результата.

Пример 1. Пусть $p > -1$. Рассмотрим суммы $s_n(p) = 1^p + 2^p + \ldots + n^p$. Согласно формуле Эйлера – Маклорена мы имеем

$$s_n(p) = \sum_{j=1}^{n}{}^{\blacktriangledown} j^p + \frac{n^p+1}{2} = \int_1^n x^p dx + \frac{1}{2}\int_1^n \left(x^p\right)''\{x\}(1-\{x\})\,dx + \frac{n^p+1}{2}.$$

Таким образом,

$$1^p + 2^p + \ldots + n^p = \frac{n^{p+1} - 1}{p+1} + \frac{n^p + 1}{2} + \frac{p(p-1)}{2} \int_1^n x^{p-2} \{x\}(1 - \{x\})\, dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, не больше $\int_1^n x^{p-2} dx$. Это меньше $\frac{1}{1-p}$ для $p \in (-1, 1)$, равно $\ln n$ для $p = 1$ и меньше $\frac{1}{p-1} n^{p-1}$, если $p > 1$. В частности,

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} + O(1) \quad \text{и} \quad 1 + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} = \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{n} + O(1).$$

Пример 2. Рассмотрим суммы с показателем $p = -1$: $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. Эти суммы называют гармоническими. Формула Эйлера – Маклорена даёт нам:

$$H_n = \sum_{j=1}^{n}{}^{\blacktriangledown} \frac{1}{j} + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = \int_1^n \frac{1}{x}\, dx + \int_1^n \{x\}\big(1 - \{x\}\big) \frac{dx}{x^3}\, dx + \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big).$$

Первый интеграл равен $\ln n$, а второй возрастает с ростом n и ограничен сверху: так как $\{x\}(1 - \{x\}) \leqslant \frac{1}{4}$, то он не больше $\int_1^n \frac{dx}{4x^3} < \frac{1}{8}$. По теореме о пределе монотонной последовательности второй интеграл имеет конечный предел при $n \to \infty$ (лежащий между нулём и $\frac{1}{8}$) и, следовательно,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1),$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} + \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{\{x\}(1 - \{x\})}{x^3}\, dx, \quad \frac{1}{2} < \gamma < \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

Это число, играющее важную роль во многих разделах математики, называется *константой Эйлера*. Несмотря на многие усилия, до сих пор не известно, рациональна она или нет, хотя и вычислена с большой точностью: $\gamma = 0{,}5772156649015328606065 12\ldots$.

Пример 3. Здесь мы получим знаменитую *формулу Стирлинга*, описывающее поведение $n!$ при больших n. С этой целью применим формулу Эйлера – Маклорена к функции $f(x) = \ln x$:

$$\ln(n!) = \sum_{j=1}^{n} \ln j = \sum_{j=1}^{n}{}^{\blacktriangledown} \ln j + \frac{1}{2}\ln n = \int_1^n \ln x\, dx - \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{x\}(1 - \{x\})}{x^2}\, dx + \frac{1}{2}\ln n.$$

Так как $\int_1^n \ln x\, dx = n\ln n - n$ (интегрирование по частям), то

$$\ln(n!) = n\ln n - n + 1 - \frac{1}{2}\int_1^n \frac{\{x\}(1 - \{x\})}{x^2} dx + \frac{1}{2}\ln n.$$

Как и в предыдущем примере, оставшийся интеграл имеет конечный предел. Поэтому

$$\ln(n!) = n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + C + o(1), \quad \text{то есть} \quad n! = e^{C + o(1)}\sqrt{n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n.$$

Пусть $A = e^C$. Тогда $n! \sim A\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Неизвестный пока коэффициент A можно найти, воспользовавшись формулой Валлиса. Действительно, согласно этой формуле

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2\cdot 4\cdots 2n}{3\cdot 5\cdots(2n-1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2\cdot 4\cdots 2n)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}.$$

Как мы уже знаем, $n! \sim A\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ и, следовательно, $(2n)! \sim A\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}$. Используя эти соотношения в установленной формуле для $\sqrt{\pi}$, после простых подсчётов получим:

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2^{2n}A^2 n\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{A\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} = \frac{A}{\sqrt{2}},$$

т.е. $A = \sqrt{2\pi}$. Таким образом, мы приходим к формуле Стирлинга:

$$\boxed{n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.}$$

Говоря иными словами, относительная погрешность ε_n приближённого равенства $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ бесконечно мала:

$$\varepsilon_n = \frac{n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \to 0.$$

Можно доказать (см. п. 469 в т. II курса Г.М.Фихтенгольца), что $\varepsilon_n \sim \frac{1}{12n}$, т.е.

$$n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \varepsilon_n \cdot n! \sim \frac{n!}{12n} = \frac{(n-1)!}{12}.$$

Поэтому абсолютная погрешность, т.е. разность $n! - \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ — очень быстро растущая последовательность (но всё-таки она существенно меньше, чем $n!$).