ГАММА – ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ЛАПЛАСА

В этом параграфе мы изучим интегралы специального вида, зависящие от параметра. Сначала мы рассмотрим конкретный несобственный интеграл (эйлеров интеграл второго рода), определяющий новую трансцендентную функцию — *гамма-функцию Эйлера.* Она играет огромную роль во многих задачах анализа, теории вероятностей, математической физики и пр. Вторая часть параграфа посвящена целому классу однотипных интегралов — *интегралам Лапласа.* Они часто возникают при описании хотя бы в грубых, основных чертах поведения некоторой величины, когда параметр, характеризующий эту величину, неограниченно возрастает. Вот типичный вопрос такого типа: "Как быстро растёт произведение $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)\cdot n$?"

Определение. *Для любого* $x>0$ *значение гамма-функции Эйлера* Γ *в точке* x *равно*

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\frac{dt}{e^t}.$$

Лемма. *Интеграл* $\Gamma(x)$ *сходится для любого положительного* x.

Доказательство. Так как $t^{x-1}/e^{t/2}\to 0$ при $t\to+\infty$, то существует такое положительное число $C=C_x$, что $t^{x-1}/e^{t/2}\leqslant C$ для всех $t\geqslant 1$. Поэтому

$$\int_1^{+\infty} t^{x-1}\,\frac{dt}{e^t}\leqslant C\int_1^{+\infty}\frac{dt}{e^{t/2}}=\frac{2C}{\sqrt{e}}<+\infty.$$

Это даёт сходимость интеграла $\Gamma(x)$ для всех x, $x\geqslant 1$. Если же $x\in(0,1)$, то подынтегральная функция кроме бесконечности имеет ещё одну особую точку $t=0$, в которой сходимость интеграла очевидна:

$$\int_0^1 t^{x-1}\,\frac{dt}{e^t}\leqslant\int_0^1 t^{x-1}\,dt=\frac{1}{x}<+\infty.$$

Замечание. Нетрудно видеть, что при целых значениях x интеграл $\Gamma(x)$ "берётся" — последовательным интегрированием по частям он сводится к интегралу от экспоненты. Для нецелых x первообразная функции $t\mapsto t^{x-1}e^{-x}$ — не элементарная функция.

ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ГАММА-ФУНКЦИИ

1°. $\Gamma(x)>0$ для любого x, $x>0$; $\Gamma(1)=1$.

2°. *Функциональное уравнение для гамма-функции*:

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)\quad\text{для любого}\quad x>0.$$

Действительно, с помощью интегрирования по частям мы получаем

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x\,\frac{dt}{e^t}=-\int_0^{+\infty} t^x\,de^{-t}=-\frac{t^x}{e^t}\Big|_{t=0}^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{e^t}\,dt^x=x\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\frac{dt}{e^t}=x\Gamma(x).$$

3°. *Связь с факториалом*:

$$\Gamma(n)=(n-1)!\quad\text{для любого натурального}\quad n.$$

Доказательство получается последовательным применением функционального уравнения:

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \ldots = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot\Gamma(1) = (n-1)!.$$

4°. *Гамма-функция выпукла на* $(0,+\infty)$. Пусть $x_0, x_1 > 0$ и $\lambda \in [0,1]$. Надо проверить, что $\Gamma\big((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1\big) \leqslant (1-\lambda)\Gamma(x_0) + \lambda\Gamma(x_1)$, то есть

$$\int_0^\infty t^{(1-\lambda)x_0+\lambda x_1}\,\frac{dt}{te^t} \leqslant \int_0^\infty \Big((1-\lambda)t^{x_0} + \lambda t^{x_1}\Big)\frac{dt}{te^t}.$$

Осталось проверить, что $t^{(1-\lambda)x_0+\lambda x_1} \leqslant (1-\lambda)t^{x_0} + \lambda t^{x_1}$, а это не что иное как выпуклость показательной функции $\varphi(x) = t^x$ (ясно, что $\varphi''(x) = t^x \ln^2 t \geqslant 0$).

5°. *Непрерывность гамма – функции*: $\Gamma \in C((0,\infty))$. Более того, в каждой точке гамма – функция имеет конечные односторонние производные. Это общее свойство всех выпуклых функций.

В действительности справедливо значительно более сильное утверждение: гамма – функция бесконечно дифференцируема на полуоси $(0,\infty)$.

6°. *Поведение гамма – функции вблизи нуля*: $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$ при $x \to +0$. Это утверждение равносильно соотношению $x\Gamma(x) \to 1$ или (см. 2°) $\Gamma(1+x) \to 1$ при $x \to 0$. Последнее соотношение очевидно, так как гамма – функция непрерывна всюду на $(0,\infty)$ и, в частности, непрерывна в единице. Поэтому (см. 1°) $x\Gamma(x) = \Gamma(1+x) \to \Gamma(1) = 1$ при $x \to 0$.

7°. *Гамма – функция быстро растёт при* $x \to +\infty$: $\Gamma(x+1) > \left(\frac{x}{e}\right)^x$. Так как подынтегральная функция положительна, то

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x\,\frac{dt}{e^t} > \int_x^{+\infty} t^x\,\frac{dt}{e^t} > x^x \int_x^{+\infty} \frac{dt}{e^t} = \left(\frac{x}{e}\right)^x.$$

Более точный результат, описывающий поведение $\Gamma(x)$ (а, следовательно, и факториала) на бесконечности, будет установлен в конце этого параграфа.

Полученных сведений вполне достаточно для построения эскиза графика гамма – функции на $(0,\infty)$. Кроме того, используя функциональное уравнение, можно естественно продолжить её на отрицательную полуось (за исключением точек $0, -1, -2, -3, \ldots$). График гамма – функции на $\mathbb{R}$ см. в трёхтомнике Г.М.Фихтенгольца (т.II, гл. XIV, п. 531).

Во многих задачах, связанных с применением гамма – функции, возникает необходимость знать её значение при $x = \frac{1}{2}$. Заменой переменной $\sqrt{t} \mapsto t$ вычисление $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)$ легко сводится к вычислению знаменитого интеграла Эйлера – Пуассона:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\frac{dt}{e^t} = 2\int_0^{+\infty} \frac{d\sqrt{t}}{e^t} = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt.$$

Теорема (Эйлер – Пуассон).

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Таким образом, $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$. С помощью свойства 2° получаем отсюда, что

$$\Gamma\Big(n+\frac{1}{2}\Big) = \Big(n-\frac{1}{2}\Big)\cdots\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\pi} \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}; \quad \text{в частности, } \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Сходимость интеграла Эйлера – Пуассона на бесконечности очевидна, так как $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ при $x \geqslant 1$, и поэтому $\int_1^\infty e^{-x^2}dx \leqslant \int_1^\infty e^{-x}dx = \frac{1}{e}$. Для вычисления нам потребуются интегралы Валлиса. Напомним их определение и основные свойства.

Лемма. *Пусть* $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \varphi \, d\varphi$ *для* $n = 0, 1, 2 \ldots.$ *Тогда*

$$\text{а) } W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2} \qquad \text{и} \qquad \text{б) } W_n = \frac{(n-1)!!}{n!!} v_n, \quad \text{где} \quad v_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ нечётное,} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } n \text{ чётное.} \end{cases}$$

Напомним, что $(2m)!! = 2 \cdot 4 \cdots (2m-2) \cdot (2m)$ и $(2m+1)!! = 1 \cdot 3 \cdots (2m-1) \cdot (2m+1)$.

Равенство а) доказывается интегрированием по частям, а его последовательное применение (с учётом очевидных равенств $W_0 = \frac{\pi}{2}$ и $W_1 = 1$) приводит к равенству б).

Следствие. $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ при $n \to +\infty$.

Действительно, из равенства а) сразу следует, что $W_n \sim W_{n-2}$, а так как $W_n < W_{n-1} < W_{n-2}$, то $W_n \sim W_{n-1}$. Кроме того, очевидно $v_n v_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ для всех n, и поэтому

$$W_n^2 \sim W_n \cdot W_{n-1} = v_n \cdot v_{n-1} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Переходя к непосредственному вычислению интеграла $I = \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt$, сделаем в нём замену переменной $t \mapsto \sqrt{m} t$:

$$I = \sqrt{m} \int_0^{+\infty} e^{-mt^2} \, dt = \sqrt{m} I_m.$$

Подынтегральная функция очень быстро убывает при удалении аргумента от нуля. Основной вклад в интеграл дают лишь точки близкие к нулю, а вклад остальных точек пренебрежимо мал. Поэтому можно надеяться, что интеграл будет вычислен с нужной точностью, если подынтегральную функцию достаточно хорошо аппроксимировать около нуля другой, более простой функцией, которую можно легко проинтегрировать. В намеченном нами плане решающую роль играет то обстоятельство, что "упрощать" подынтегральную функцию нужно лишь около нуля, хотя интегрирование ведётся по бесконечному промежутку. Ради этого и была сделана замена переменной $t \mapsto \sqrt{m} t$.

Для формальной реализации изложенной идеи нам потребуется несложное неравенство. Из выпуклости экспоненты следует, что $e^\theta \geqslant 1 + \theta$ (график экспоненты лежит не ниже касательной в точке $\theta = 0$). Взяв сначала $\theta = -t^2$, а затем $\theta = t^2$, получим нужное нам двойное неравенство $1 - t^2 \leqslant e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}$. Таким образом,

$$(1-t^2)^m \leqslant e^{-mt^2} \quad \text{для} \quad t \in [0,1] \qquad \text{и} \qquad e^{-mt^2} \leqslant (1+t^2)^{-m} \quad \text{для всех} \quad t.$$

Это позволяет оценить интеграл I_m сверху и снизу:

$$\int_0^1 (1-t^2)^m \, dt \leqslant I_m \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^m}.$$

После тригонометрической замены переменной ($t = \sin \varphi$ в левом интеграле и $t = \operatorname{tg} \varphi$ — в правом), мы получим двустороннюю оценку интеграла I_m валлисовскими интегралами:

$$W_{2m+1} \leqslant I_m \leqslant W_{2m-2}, \quad \text{то есть} \quad \sqrt{m}\, W_{2m+1} \leqslant I = \sqrt{m} I_m \leqslant \sqrt{m}\, W_{2m-2}.$$

Остаётся заметить, $\sqrt{m} W_{2m+1}$, $\sqrt{m} W_{2m-2} \to \sqrt{\frac{\pi}{4}}$, поскольку $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$. Итак,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \big(1 + o(1)\big) \leqslant I \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2} \big(1 + o(1)\big), \quad \text{то есть} \quad I = \int_0^\infty e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Теорема (формула Стирлинга). $\Gamma(1+x) \sim \sqrt{2\pi x} \big(\frac{x}{e}\big)^x$ при $x \to +\infty$.

В частности, $n! = \Gamma(1+n) \sim \sqrt{2\pi n} \big(\frac{n}{e}\big)^n$.

Отложив формальное доказательство к концу параграфа, рассмотрим возникшую задачу. Нам надо выяснить, как меняется несобственный интеграл $\Gamma(x+1) = \int\limits_0^\infty t^x e^{-t} \, dt$. Мы уже знаем (см. свойство 7°), что он очень быстро стремится к бесконечности при $x \to +\infty$. Чтобы уточнить скорость роста, рассмотрим повнимательнее подынтегральную функцию $f(t) = t^x e^{-t}$ при большом фиксированном значении параметра x. Поскольку $f'(t) = (x-t)t^{x-1}e^{-x}$, функция f возрастает до точки x и убывает после неё. Таким образом, её наибольшее значение достигается в точке x и равно $\left(\frac{x}{e}\right)^x$. Характерная особенность поведения функции f — её значение $f(t)$ очень быстро уменьшается при удалении точки t от x. Чтобы убедиться в этом, сравним максимальное значение $f(x)$ со значениями $f(x \pm \frac{x}{10})$. Для этого нам потребуется уточнение неравенства $1+\theta \leqslant e^\theta$:

$$\frac{1+\theta}{e^\theta} \leqslant 1 - \frac{\theta^2}{6} \quad \text{при} \quad |\theta| \leqslant 1.$$

Его доказательство почти очевидно. Производная функции $\varphi(\theta) = \frac{\theta^2}{6} + \frac{1+\theta}{e^\theta}$ равна $\theta\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{e^\theta}\right)$. Разность, стоящая в круглых скобках отрицательна, так как $\frac{1}{e^\theta} \geqslant \frac{1}{e} > \frac{1}{3}$ при $|\theta| \leqslant 1$. Поэтому φ' меняет знак в точке $\theta = 0$ с плюса на минус. Следовательно, $\varphi(\theta) \leqslant \varphi(0) = 1$ при $|\theta| \leqslant 1$.

Взяв $t = x + \theta\, x$ с коэффициентом $\theta = \pm\frac{1}{10}$, мы получим

$$f(t) = \frac{(x+\theta\, x)^x}{e^{x+\theta\, x}} = \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(\frac{1+\theta}{e^\theta}\right)^x \leqslant \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right)^x = \left(\frac{x}{e}\right)^x \left(1 - \frac{1}{600}\right)^x.$$

Хотя число $1 - \frac{1}{600}$ близко к единице, его степень $\left(1 - \frac{1}{600}\right)^x$ очень быстро стремится к нулю при $x \to +\infty$. Поэтому значения $f\left(x \pm \frac{x}{10}\right)$ существенно меньше максимального значения $f(x)$. Итак, при больших x график подынтегральной функции $f(t) = \frac{t^x}{e^t}$ имеет в точке $t = x$ очень высокий и острый пик. Для более детального изучения удобно сдвинуть его основание в начало координат, т.е. сделать замену переменной $t \mapsto t + x$. Мы получим

$$\Gamma(1+x) = \int_{-x}^{\infty} \frac{(x+t)^x}{e^{x+t}}\, dt = \left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-x}^{\infty} \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x \frac{dt}{e^t}.$$

В возникшем интеграле целесообразно сделать ещё одну замену переменной $t = x\theta$ (тогда промежуток интегрирования перестанет зависеть от параметра x, а подынтегральная функция немного упростится):

$$\Gamma(x+1) = x\left(\frac{x}{e}\right)^x \int_{-1}^{\infty} \left(\frac{1+\theta}{e^\theta}\right)^x d\theta = x\left(\frac{x}{e}\right)^x L(x), \quad \text{где} \quad L(x) = \int_{-1}^{\infty} \left(\frac{1+\theta}{e^\theta}\right)^x d\theta. \qquad (*)$$

Как мы уже знаем, $\frac{1+\theta}{e^\theta} < 1$ при $\theta \neq 0$, т.е. функция $\varphi(\theta) = \frac{1+\theta}{e^\theta}$ имеет в точке $\theta = 1$ строгий максимум, равный 1, а в остальных точках её значения меньше 1. Поэтому при больших x подынтегральная функция $\varphi^x(t)$ очень мала вне сколь угодно малой (фиксированной) окрестности нуля. Поскольку вблизи нуля

$$\varphi(\theta) = e^{-\theta + \ln(1+\theta)} = e^{-\frac{1}{2}\theta^2 + O(\theta^3)} = e^{-\frac{1}{2}\theta^2}\left(1 + O(\theta^3)\right) \approx e^{-\frac{1}{2}\theta^2} =: \psi(\theta),$$

можно надеяться, что замена в интеграле $L(x)$ функции φ на функцию ψ незначительно скажется на значении интеграла, то есть при $x \to +\infty$

$$L(x) = \int_{-1}^{\infty} \varphi^x(t)\, dt \sim \widetilde{L}(x) = \int_{-1}^{\infty} \psi^x(t)\, dt = \int_{-1}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}t^2}\, dt.$$

Поведение интеграла, возникшего в правой части, исследуется совсем легко с помощью замены переменной $u = \sqrt{\frac{x}{2}}\, t$:

$$\widetilde{L}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\sqrt{\frac{x}{2}}}^{\infty} e^{-u^2}\, du \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = 2\sqrt{\frac{2}{x}} \int_{0}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\frac{2\pi}{x}}.$$

Итак,

$$\Gamma(1+x)=x\Big(\frac{x}{e}\Big)^xL(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x\Big(\frac{x}{e}\Big)^x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}=\sqrt{2\pi x}\Big(\frac{x}{e}\Big)^x.$$

Для строгого обоснования этих эвристических рассуждений остаётся оправдать исследование интеграла $L(x)$ (замена функции φ функцией ψ). Мы сделаем это в более общей ситуации, впервые рассмотренной Лапласом при изучении интегралов, возникающих в теории вероятностей. Для этого перейдём ко второй теме параграфа — изучению интегралов Лапласа

$$\mathcal{L}(x)=\int_a^b\varphi^x(t)\,dt.$$

Здесь φ — неотрицательная кусочно монотонная функция, x — большой параметр. Наша цель — охарактеризовать поведение интеграла $\mathcal{L}(x)$ при $x\to+\infty$. Такого рода задачи часто возникают в теории вероятностей, комбинаторике, при оценке эффективности алгоритмов и т.д. Мы уже решили одну такую задачу (с целочисленным параметром m вместо x), когда вычисляли интеграл Эйлера – Пуассона.

При больших значениях параметра x график функции φ^x имеет резко выраженные пики вблизи тех точек, в которых у функции φ строгий локальный максимум. Значения φ^x вдали от этих точек пренебрежимо малы. Интуитивно ясно, что можно с большой точностью получить значение $\mathcal{L}(x)$, проинтегрировав φ^x лишь по маленьким окрестностям этих точек. Поскольку окрестности малы, можно упростить подынтегральную функцию, заменив её более удобным выражением, например, с помощью формулы Тейлора. Основную трудность в реализации этой схемы представляет выбор окрестностей. С одной стороны, они не должны быть слишком большими, так как в противном случае скажется погрешность, вызванная применением формулы Тейлора. С другой стороны, если они слишком малые, то велика погрешность, которая возникает при замене всего промежутка интегрирования на маленькие окрестности. К правильному выбору окрестностей, который позволил бы хорошо оценить обе погрешности, и сводится главная часть исследования интегралов Лапласа. Как сказано в книге Р.Грэхема, Д.Кнута и О.Паташника *Конкретная математика*, «*Асимптотический анализ — это искусство; искусство в том, чтобы знать, когда можно быть небрежным, а когда требуется точность*». К счастью, в приложениях чаще всего возникают однотипные интегралы, исследование которых можно провести в общем виде при достаточно естественных предположениях, а затем уже применять полученные формулы в конкретных задачах.

Разбивая при необходимости промежуток интегрирования на несколько промежутков, можно считать, что функция φ монотонна. Так как интегралы с убывающей и возрастающей функциями исследуются совершенно аналогично, то достаточно рассмотреть лишь один из этих случаев. В дальнейшем мы будем считать, что φ убывает. Тогда величина интеграла $\mathcal{L}(x)$ определяется высотой $\varphi^x(a)$ пика и его «остротой», то есть скоростью, с которой $\varphi(t)$ теряет максимальное значение при удалении аргумента t от точки a. Что касается величины $\varphi^x(a)$, то её учесть совсем легко. Более того, достаточно ограничиться случаем, когда $\varphi(a)=1$ (этого можно добиться, заменив функцию φ на нормированную функцию $\widetilde{\varphi}(t)=\varphi(t)/\varphi(a)$). Тогда $\varphi(t)\leqslant 1$, и поэтому интеграл $\mathcal{L}(x)$ убывает с ростом x. Описывая остроту пика, мы, следуя Лапласу, будем предполагать, что разность $\big(\varphi(a)-\varphi(t)\big)$ — бесконечно малая степенно́го типа при $t\to a$, то есть при некотором $p>0$ существует конечный положительный предел дроби $\big(\varphi(a)-\varphi(t)\big)/(t-a)^p$. Получающийся при таких предположениях результат называют асимптотической формулой Лапласа. Её вполне достаточно для нахождения асимптотики большинства интегралов Лапласа, возникающих в приложениях. Доказательству этого основного результата параграфа предпошлём лемму. В ней даётся качественная и вполне очевидная характеристика поведения интегралов Лапласа.

Лемма (локализация интегралов Лапласа). *Пусть $-\infty<a<b\leqslant+\infty$, а вещественная на $[a,b)$ функция φ такова, что*

(1) $0\leqslant\varphi<1$ *на* (a,b) *и* $\lim\limits_{t\to a}\varphi(t)=1$;

(2) φ *не возрастает на* $[a,b)$;

(3) *интеграл* $\int_a^b \varphi(t)\,dt$ *сходится.*

Тогда для любого числа β *из интервала* (a,b) *справедливо соотношение*

$$\mathcal{L}(x)=\int_a^b \varphi^x(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathcal{L}_\beta(x)=\int_a^\beta \varphi^x(t)\,dt.$$

Доказательство. Заметим сначала, что интеграл $\mathcal{L}(x)$ убывает медленнее любой показательной функции: для любого $q\in(0,1)$ выполняется соотношение

$$q^x=o(\mathcal{L}(x)) \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Действительно, так как $\sqrt{q}<1$, то по условию (1) $\sqrt{q}<\lim\limits_{t\to a}\varphi(t)$. Поэтому существует такое число $c_q\in(a,b)$, что $\varphi(t)\geqslant\sqrt{q}$ для всех t из $[a,c_q]$. Это позволяет оценить интеграл $\mathcal{L}(x)$ снизу:

$$\mathcal{L}(x)=\int_a^b \varphi^x(t)\,dt \geqslant \int_a^{c_q} \varphi^x(t)\,dt \geqslant (c_q-a)\,(\sqrt{q})^x=(c_q-a)\,q^{x/2}.$$

Следовательно,

$$\frac{q^x}{\mathcal{L}(x)}\leqslant\frac{q^{x/2}}{c_q-a}\to 0 \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Теперь легко получить утверждение леммы. Взяв $q=\varphi(\beta)<1$, мы получим

$$0\leqslant\mathcal{L}(x)-\mathcal{L}_\beta(x)=\int_\beta^b \varphi^x(t)\,dt\leqslant\varphi^{x-1}(\beta)\int_\beta^b\varphi(t)\,dt\leqslant q^{x-1}\int_a^b\varphi(t)\,dt=O(q^x)=o\left(\mathcal{L}(x)\right),$$

то есть $\mathcal{L}(x)\sim\mathcal{L}_\beta(x)$ при $x\to+\infty$. Лемма доказана.

Теорема (асимптотическая формула Лапласа). *Пусть выполнены условия леммы и, кроме того, существуют какие положительные числа* C *и* p, *что*

$$1-\varphi(t)\sim C(t-a)^p \quad \textit{при} \quad t\to a.$$

Тогда

$$\mathcal{L}(x)=\int_a^b \varphi^x(t)\,dt\sim\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}{(Cx)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

I частный случай. Если φ дифференцируема в точке a и $\varphi'(a)<0$, то

$$\mathcal{L}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x|\varphi'(a)|} \qquad (\text{см. теорему при } p=1 \text{ и } C=-\varphi'(a)).$$

II частный случай. Если φ дважды дифференцируема в точке a, $\varphi'(a)=0$ и $\varphi''(a)<0$, то

$$\mathcal{L}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2x|\varphi''(a)|}} \qquad (\text{см. теорему при } p=2 \text{ и } C=-\frac{1}{2}\varphi''(a)).$$

Замечание 1. Такую же асимптотику имеет интеграл $\mathcal{L}(x)$, если функция φ неотрицательна и не убывает на промежутке $(a,b]$ (здесь $-\infty\leqslant a<b<+\infty$) и $1-\varphi(t)\sim C(b-t)^p$ при $t\to b$.

Замечание 2. Если функция φ достигает максимума во внутренней точке t_0 промежутка $\langle a,b\rangle$ (на котором φ неотрицательна и интегрируема), возрастает слева от t_0, убывает справа от t_0 и $1-\varphi(t)\sim C|t-t_0|^p$ при $t\to t_0$, то, применив формулу к каждому из промежутков $(a,t_0]$, $[t_0,b)$ в отдельности, мы видим, что результат надо удвоить:

$$\mathcal{L}(x)=\int_a^b \varphi^x(t)\,dt\sim 2\frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}{(Cx)^{\frac{1}{p}}} \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Доказательство теоремы. Мы будем считать, что $a = 0$ (в противном случае сделаем замену переменной $t \mapsto t - a$). Из условия следует, что
$$\ln\varphi(t) = \ln(1 + (\varphi(t) - 1)) \sim \varphi(t) - 1 \sim -Ct^p \quad \text{при} \;\; t \to 0,$$
то есть $\ln\varphi(t) = -Ct^p\,(1 + o(1))$. Следовательно, функцию φ можно представить в виде

$$\varphi(t) = e^{-Ct^p(1+\varepsilon(t))}, \quad \text{где} \quad \varepsilon(t) \to 0 \quad \text{при} \;\; t \to 0.$$

Величина интеграла $\mathcal{L}(x)$ определяется интегралом от φ^x по сколь угодно малой окрестности нуля (см. лемму). В этой окрестности функция $\varphi(t) = e^{-Ct^p(1+\varepsilon(t))}$ ввиду малости $\varepsilon(t)$ почти совпадает с функцией $\psi(t) = e^{-Ct^p}$. Поэтому $\mathcal{L}(x)$ естественно сравнить с интегралом

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \int_0^{+\infty} \psi^x(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-Cxt^p}\,dt$$

(точка b не играет существенной роли; для удобства вычислений она заменена на $+\infty$). Ясно, что

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-Cxt^p}dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} d\left(\frac{t}{Cx}\right)^{\frac{1}{p}} = e^{-t}\left(\frac{t}{Cx}\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg|_{t=0}^{+\infty} + \frac{1}{(Cx)^{\frac{1}{p}}}\int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{p}}\,\frac{dt}{e^t} = \frac{\Gamma(1+\frac{1}{p})}{(Cx)^{\frac{1}{p}}}.$$

Достаточно (см. лемму) доказать, что для некоторого $\beta \in (0, b)$

$$\mathcal{L}_\beta(x) = \int_0^\beta \varphi^x(t)\,dt \sim \widetilde{\mathcal{L}}_\beta(x) = \int_0^\beta e^{-Cxt^p}dt \quad \text{при} \;\; x \to +\infty.$$

Поскольку $\widetilde{\mathcal{L}}_\beta(x) \sim \widetilde{\mathcal{L}}(x) \asymp x^{-\frac{1}{p}}$, нам нужно проверить, что $\mathcal{L}_\beta(x) - \widetilde{\mathcal{L}}_\beta(x) = o\big(x^{-\frac{1}{p}}\big)$. Возьмём число β столь малым, что $\varepsilon(t) \geqslant -\frac{1}{2}$ и, следовательно, $\varphi(t) \leqslant e^{-\frac{C}{2}t^p}$ для всех t из интервала $(0, \beta)$. Пусть еще $\alpha = \alpha(x) = x^{-\frac{1}{2p}}$. Тогда

$$|\mathcal{L}_\beta(x) - \widetilde{\mathcal{L}}_\beta(x)| \leqslant \int_0^\beta |\varphi^x(t) - \psi^x(t)|\,dt = \int_0^\alpha \ldots + \int_\alpha^\beta \ldots = J_1(x) + J_2(x).$$

Сначала, пользуясь неравенством $|\varphi^x(t) - \psi^x(t)| \leqslant \max\{\varphi^x(t), \psi^x(t)\} \leqslant e^{-\frac{C}{2}xt^p}$, оценим интеграл $J_2(x)$:
$$J_2(x) \leqslant \int_\alpha^\beta e^{-\frac{C}{2}xt^p}dt \leqslant \int_\alpha^{+\infty} e^{-\frac{C}{2}xt^p}dt = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}\int_{\alpha x^{\frac{1}{p}}}^{+\infty} e^{-\frac{C}{2}u^p}du.$$

Так как $\alpha x^{\frac{1}{p}} = x^{\frac{1}{2p}} \to +\infty$, то отсюда следует, что $J_2(x) = o\big(x^{-\frac{1}{p}}\big)$. Чтобы о получить подобную оценку для интеграла $J_1(x)$, воспользуемся неравенством $|e^u - e^v| \leqslant |u - v|\max\{e^u, e^v\}$, из которого следует, что

$$|\varphi^x(t) - \psi^x(t)| = \left|e^{-Cxt^p(1+\varepsilon(t))} - e^{-Cxt^p}\right| \leqslant Cxt^p|\varepsilon(t)|\max\{\varphi^x(t), \psi^x(t)\} \leqslant Cx\,t^p|\varepsilon(t)|\,e^{-\frac{C}{2}xt^p}.$$

Поэтому

$$J_1(x) \leqslant Cx\int_0^\alpha \frac{t^p|\varepsilon(t)|\,dt}{e^{\frac{C}{2}xt^p}} \leqslant Cx\sup_{0<t<\alpha}|\varepsilon(t)|\int_0^\alpha \frac{t^p\,dt}{e^{\frac{C}{2}xt^p}} <$$
$$< Cx\sup_{0<t<\alpha}|\varepsilon(t)|\int_0^{+\infty}\frac{t^p\,dt}{e^{\frac{C}{2}xt^p}} = 2\Big(\frac{2}{Cx}\Big)^{\frac{1}{p}}\sup_{0<t<\alpha}|\varepsilon(t)|\int_0^{+\infty}\frac{t^p dt}{e^{t^p}} = \frac{\text{const}}{x^{\frac{1}{p}}}\sup_{0<t<\alpha}|\varepsilon(t)|.$$

Осталось заметить, что $\sup\limits_{0<t<\alpha}|\varepsilon(t)| \to 0$ при $x \to +\infty$, поскольку $\alpha = x^{-\frac{1}{2p}} \to 0$. Таким образом, $J_1 = o\big(x^{-\frac{1}{p}}\big)$.

Теорема доказана.

Замечание 3. Очевидно, в доказательстве в качестве бесконечно малой $\alpha(x)$ не обязательно брать $x^{-\frac{1}{2p}}$. Важно лишь, что $\alpha(x) \to 0$ и $x^{\frac{1}{p}}\alpha(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Это позволяет уточнить явление локализации в условиях теоремы:

$$\mathcal{L}(x) \sim \int_a^{a+\alpha(x)} \varphi^x(t)\,dt \quad \text{при } x \to +\infty, \quad \text{если} \quad \alpha(x) \to 0 \quad \text{и} \quad x^{\frac{1}{p}}\alpha(x) \to +\infty.$$

Упражнение 1. Дополните утверждение теоремы, рассмотрев случаи $C = 0$ и $C = +\infty$:
а) если $\bigl(1-\varphi(t)\bigr)/(t-a)^p \to 0$ при $t \to a$, то $x^{\frac{1}{p}}\mathcal{L}(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$;
б) если $\bigl(1-\varphi(t)\bigr)/(t-a)^p \to +\infty$ при $t \to a$, то $x^{\frac{1}{p}}\mathcal{L}(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Доказательство формулы Стирлинга. Как уже отмечалось (см. равенство $(*)$ на стр. 4),

$$\Gamma(1+x) = x\Bigl(\frac{x}{e}\Bigr)^x L(x), \quad \text{где} \quad L(x) = \int_{-1}^{+\infty} \varphi^x(\theta)\,d\theta \quad \text{и} \quad \varphi(\theta) = \frac{1+\theta}{e^\theta}.$$

Поскольку $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) = -1$, применим II частный случай формулы Лапласа. Он даёт нам (с учётом второго замечания к формулировке теоремы), что $L(x) \sim \sqrt{2\pi/x}$. Таким образом, $\Gamma(1+x) = x\bigl(\frac{x}{e}\bigr)^x L(x) \sim \sqrt{2\pi x}\bigl(\frac{x}{e}\bigr)^x$ при $x \to +\infty$.

Теорема доказана.

Упражнение 2. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Докажите, что $\Gamma(x+a) \sim x^a\Gamma(x)$ при $x \to +\infty$.

Примеры.

1°. Найдём асимптотику наибольшего биномиального коэффициента C_{2n}^n. Сначала посмотрим, что можно получить совсем простыми оценками. С одной стороны,

$$C_{2n}^n < \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = (1+1)^{2n} = 4^n.$$

С другой стороны, коэффициент C_{2n}^n — наибольший в этой сумме. Поэтому $(2n+1)C_{2n}^n > 4^n$. Таким образом, $C_{2n}^n = 4^n\, n^{-\theta}$, где $\theta = \theta_n \in [0,1]$. Применение формулы Стирлинга показывает, что истина лежит посередине:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\,\bigl(\frac{2n}{e}\bigr)^{2n}}{\bigl(\sqrt{2\pi n}\,\bigl(\frac{n}{e}\bigr)^n\bigr)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

2°. Пусть $a > 0$ и $a_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)(a+n)$. Выясним, с какой скоростью растут эти числа. Так как

$$\begin{aligned}
\Gamma(a)a_n &= \Gamma(a)a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)(a+n) = \\
&= \Gamma(a+1)(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)(a+n) = \\
&= \Gamma(a+2)(a+2)\cdots(a+n-1)(a+n) = \ldots \\
&= \Gamma(a+1+n),
\end{aligned}$$

то используя результат упражнения 2, мы получаем

$$a_n = \frac{\Gamma(1+n+a)}{\Gamma(a)} \sim \frac{(1+n)^a\Gamma(1+n)}{\Gamma(a)} = \frac{(1+n)^a n!}{\Gamma(a)} \sim \frac{n^a n!}{\Gamma(a)} \quad \text{при} \;\; n \to +\infty.$$

Легко видеть, что предположение $a > 0$ можно ослабить — этот параметр может любым вещественным числом, отличным от $0, -1, -2, -3, \ldots$.

3°. Найдём асимптотику интеграла $\mathcal{L}(x) = \int_0^1 t^{xt} dt$ при $x \to +\infty$. Функция $f(t) = t^t$ строго убывает на $(0, \frac{1}{e}]$ и строго возрастает на $[\frac{1}{e}, 1]$. Поскольку $\lim_{t\to 0} t^t = 1$, можно считать, что $f(0) = 1$. Таким образом, функция f имеет два строгих максимума — в точках 0 и 1, причём $f(0) = f(1) = 1$. Её график имеет в этих точках пики одинаковой высоты. Но пик в точке 0 значительно острее, чем пик в точке 1, так как $f'(0) = -\infty$ и $f'(1) = 1$. Поэтому вклад окрестности нуля в интеграл $\mathcal{L}(x)$ должен быть существенно меньше вклада, даваемого окрестностью точки 1.

Разобьём интеграл $\mathcal{L}(x)$ на сумму двух интегралов

$$\mathcal{L}(x) = \int_0^1 t^{xt} dt = \int_0^{\frac{1}{e}} t^{xt} dt + \int_{\frac{1}{e}}^1 t^{xt} dt = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_1(x).$$

Интеграл $\mathcal{L}_1(x)$ исследуется с помощью формулы Лапласа ($p = 1$): $\mathcal{L}_1(x) \sim \frac{1}{x}$. Используя результат упражнения 1 б) при $p = 1$, получаем, что $x\mathcal{L}_0(x) \to 0$. Таким образом, $\mathcal{L}(x) \sim \frac{1}{x}$.

Упражнение 3. Какова асимптотика интеграла $\mathcal{L}_0(x) = \int_0^{\frac{1}{e}} t^{xt} dt$?

4°. Найдём асимптотику сумм

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Ясно, что это значение n-го многочлена Тейлора функции e^x, вычисленное в точке n: $S_n = T_{0,n}^{\exp}(n)$. Воспользуемся интегральным представлением остатка в формуле Тейлора:

$$f(x) - T_{x_0,n}^{f}(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}\big(x_0 + t(x - x_0)\big)\, dt.$$

Взяв $x = n,\ x_0 = 0$ и $f(x) = e^x$, мы получим

$$e^n - S_n = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{nt} dt = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 \varphi^n(t)\, dt,$$

где $\varphi(t) = (1-t)e^t$. Так как $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi''(0) = -1$, то применим II частный случай формулы Лапласа:

$$e^n - S_n \sim \frac{n^{n+1}}{n!}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \sim \frac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2n}} = \frac{1}{2}\, e^n$$

(в конце мы воспользовались формулой Стирлинга для факториала). Таким образом, $S_n \sim \frac{1}{2}\, e^n$.

В следующем примере требуется найти асимптотику суммы большого числа слагаемых. Формально он не связан с асимптотической формулой Лапласа — не удаётся (по крайней мере сразу) свести изучение суммы к изучению интеграла. Однако идея метода Лапласа эффективна и в этом случае. Дело в том, что в каждой сумме слагаемые сначала очень быстро растут, а затем столь же быстро убывают, образуя высокий и острый пик. Поэтому для этих сумм справедлив дискретный аналог леммы о локализации. Для нахождение асимптотики мы выделим сравнительно небольшую группу слагаемых, дающих основной вклад в сумму. Используя формулу Тейлора, получим для них удобное аналитическое представление, благодаря которому найдём асимптотику их суммы. Остальные слагаемые (вклад которых в сумму пренебрежимо мал по сравнению с вкладом выделенных слагаемых) грубо оценим сверху. Основная трудность в реализации этого метода состоит в неопределенности — как много слагаемых включить в первую, определяющую группу слагаемых. Если эта группа слишком велика, то могут возникнуть трудности с использованием формулы Тейлора (погрешность, вызванная её применением, окажется слишком большой). Если же эту группу сильно уменьшить, то вне её останутся довольно большие слагаемые, а это затруднит или сделает невозможной удовлетворительную оценку вклада пренебрегаемых слагаемых*). Умение преодолевать это непростое препятствие появляется лишь после решения немалого числа примеров.

---

*). ” ”, 5- .

5°. Найдём асимптотику сумм (далее $p>0$ — *фиксированный* параметр) при $n\to+\infty$

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(C_n^k\right)^p.$$

Так как числа C_n^k быстро возрастают при $1\leqslant k\leqslant n/2$, то основной вклад в S_n вносят слагаемые с номерами, близкими к $n/2$. Мы убедимся, что достаточно учесть примерно $n^{2/3}$ центральных членов.

Предполагая, что $n=2m$, получим

$$S_{2m}=(C_{2m}^m)^p\left(1+2\sum_{1\leqslant k<m}\left(\frac{C_{2m}^{m-k}}{C_{2m}^m}\right)^p\right).$$

Чтобы найти главную часть суммы, заметим, что при $k>1$

$$\frac{C_{2m}^{m-k}}{C_{2m}^m}=\frac{m}{m+k}\prod_{1\leqslant j<k}\frac{1-\frac{j}{m}}{1+\frac{j}{m}}=\frac{m}{m+k}\exp\Bigl(\sum_{1\leqslant j<k}\ln\frac{1-\frac{j}{m}}{1+\frac{j}{m}}\Bigr).$$

Из соотношения $0<-2t-\ln\frac{1-t}{1+t}=O(t^3)$ $(0<t<1/2)$ следует, что

$$\frac{C_{2m}^{m-k}}{C_{2m}^m}=\begin{cases}\bigl(1+O\bigl(m^{-1/3}\bigr)\bigr)e^{-k^2/m} & \text{при } k\leqslant m^{2/3},\\ O\bigl(e^{-m^{1/3}}\bigr) & \text{при } k>m^{2/3}.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\sum_{1\leqslant k<m}\left(\frac{C_{2m}^{m-k}}{C_{2m}^m}\right)^p=\Bigl(1+O\Bigl(\frac{1}{\sqrt[3]{m}}\Bigr)\Bigr)\sum_{1\leqslant k\leqslant m^{2/3}}e^{-\frac{p}{m}k^2}+o(1)\underset{m\to\infty}{\sim}\sum_{1\leqslant k\leqslant m^{2/3}}e^{-\frac{p}{m}k^2}.$$

Так как

$$e^{-\frac{p}{m}(k+1)^2}\leqslant\int_k^{k+1}e^{-\frac{p}{m}u^2}du\leqslant e^{-\frac{p}{m}k^2},$$

то

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant m^{2/3}}e^{-\frac{p}{m}k^2}=\int_0^{m^{2/3}}e^{-\frac{p}{m}u^2}du+O(1)=\sqrt{\frac{m}{p}}\int_0^{\sqrt{p}\,\sqrt[6]{m}}e^{-t^2}dt+O(1).$$

Следовательно,

$$\sum_{1\leqslant k<m}\left(\frac{C_{2m}^{m-k}}{C_{2m}^m}\right)^p\sim\sqrt{\frac{m}{p}}\int_0^{\sqrt{p}\,\sqrt[6]{m}}e^{-t^2}dt\sim\sqrt{\frac{m}{p}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi m}{p}}.$$

Итак,

$$S_{2m}\sim\sqrt{\frac{\pi m}{p}}\left(C_{2m}^m\right)^p.$$

Для получения окончательного результата остаётся вспомнить, что $C_{2m}^m\sim\frac{4^m}{\sqrt{\pi m}}$. Поэтому

$$S_{2m}\sim\frac{1}{\sqrt{p}}(\pi m)^{\frac{1-p}{2}}2^{2pm}\quad\text{или}\quad S_n\sim\frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{\pi}{2}n\right)^{\frac{1-p}{2}}2^{pn}=2^{(n+\frac{1}{2})p}\sqrt{\frac{(\pi n)^{1-p}}{2p}}.$$