РЯДЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Ортогональные системы в пространстве $\mathscr{L}^2_\mu(X)$

В этом параграфе рассматривается только норма в $\mathscr{L}^2_\mu(X)$. Для краткости она обозначается символом $\|\cdot\|$ без индекса (точнее было бы говорить о полунорме, так как $\|f\| = 0$ для любой функции f, равной нулю почти везде). Напомним важное свойство пространства $\mathscr{L}^2_\mu(X)$ — оно полное: если последовательность $\{x_n\}$ его элементов сходится в себе, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ для всех $n, m > N$, то эта последовательность имеет предел в $\mathscr{L}^2_\mu(X)$.

1.1. Норма в пространстве $\mathscr{L}^2_\mu(X)$ обладает важной особенностью — как и норма в конечномерном евклидовом пространстве она порождается скалярным произведением. Скалярное произведение функций f и g, принадлежащих (вообще говоря, комплексному) пространству $\mathscr{L}^2_\mu(X)$, определяется равенством

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu$$

(произведение $f\,\overline{g}$ суммируемо, так как $2|f\,\overline{g}| \leqslant |f|^2 + |g|^2$).

Очевидно, $\langle g, f\rangle = \overline{\langle f, g\rangle}$ и $\langle f, f\rangle = \|f\|^2$. Кроме того, по неравенству Коши–Буняковского $|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|\,\|g\|$. Отсюда вытекает непрерывность скалярного произведения относительно сходимости по норме. Действительно, если $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$, $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$, то

$$\big|\langle f_n, g_n\rangle - \langle f, g\rangle\big| \leqslant \big|\langle f_n - f, g_n\rangle\big| + \big|\langle f, g_n - g\rangle\big| \leqslant \|f_n - f\|\cdot\|g_n\| + \|f\|\cdot\|g_n - g\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Из непрерывности скалярного произведения следует, что сходящиеся по норме ряды можно скалярно умножать почленно: $\left\langle \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n, g\right\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle f_n, g\rangle$. Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу в равенстве $\left\langle \sum\limits_{n=1}^{k} f_n, g\right\rangle = \sum\limits_{n=1}^{k}\langle f_n, g\rangle$ (предел левой части существует ввиду сходимости ряда и непрерывности скалярного произведения).

1.2. Наличие скалярного произведения позволяет, как и в конечномерном евклидовом пространстве, ввести понятие угла между векторами. Не делая этого в общей ситуации, мы выделим важнейший частный случай, когда угол можно считать равным $\frac{\pi}{2}$. Введём следующее

Определение. Функции $f, g \in \mathscr{L}^2_\mu(X)$ называются *ортогональными*, если $\langle f, g\rangle = 0$.

Заметим, что если $\langle f, g\rangle = 0$, то и $\langle g, f\rangle = \overline{\langle g, f\rangle} = 0$, так что отношение ортогональности симметрично. Оно обозначается символом $f \perp g$. Функция, равная нулю почти везде, ортогональна любой функции из $\mathscr{L}^2_\mu(X)$ и, очевидно, верно также и обратное. Для ортогональных функций верна *теорема Пифагора**): если $f \perp g$, то $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$. Этот результат остаётся справедливым для любого числа попарно ортогональных слагаемых: если $f_j \perp f_k$ при $j \neq k$ $(j,\ k = 1, \ldots, n)$, то

$$\|f_1 + \ldots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \ldots + \|f_n\|^2. \tag{1}$$

Действительно, так как $\langle f_j, f_k\rangle = 0$ при $j \neq k$, то

$$\|f_1 + \ldots + f_n\|^2 = \langle f_1 + \ldots + f_n,\ f_1 + \ldots + f_n\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \langle f_j, f_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2.$$

Теорема Пифагора верна и для “бесконечного числа слагаемых”. Если функции $f_1, f_2, \ldots$ попарно ортогональны и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится, то

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2. \tag{1$'$}$$

Для доказательства следует лишь перейти к пределу в равенстве (1).

Благодаря скалярному произведению мы можем говорить об ортогональном проектировании функции f на подпространство. В частности, проекция f на одномерное подпространство, порождаемое ортом e, есть $\langle f, e\rangle e$.

В $\mathscr{L}^2_\mu(X)$ роль, аналогичную роли ортогональных базисов в конечномерных евклидовых пространствах, играют семейства попарно ортогональных функций.

Определение. Семейство функций $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется *ортогональной системой* (сокращенно: ОС) , если $e_\alpha \perp e_{\alpha'}$ при $\alpha \neq \alpha'$ и $\|e_\alpha\| \neq 0$ при любом $\alpha \in A$. Ортогональная система называется *ортонормированной*, если $\|e_\alpha\| = 1$ при любом $\alpha \in A$.

Из теоремы Пифагора (1) сразу следует линейная независимость функций, входящих в ОС. Очевидно, из любой ортогональной системы можно получить ортонормированную, разделив входящие в неё функции на их нормы.

Пусть функции $e_1, \ldots, e_n$ образуют ОС и L — порождённое ими подпространство (т. е. множество всевозможных линейных комбинаций этих функций). Важно выяснить, как наилучшим образом приблизить данную функцию f элементами множества L. Решение этой экстремальной задачи даёт следующая

Теорема. *Минимум нормы* $\Big\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k\Big\|$ *достигается в том и только том случае, когда* $a_k = c_k(f)$, *где*

$$c_k(f) = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\|e_k\|^2} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

При этом функция $f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f) e_k$ *ортогональна любому элементу множества* L.

*) **Пифагор** (Πυϑαγόρας), около 570–500 до н. э., — древнегреческий философ и математик.

Таким образом, наилучшим приближением к f в множестве L является сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k$. Сформулированную теорему можно считать обобщением хорошо известного из школьной геометрии факта: *перпендикуляр, опущенный из точки f на L*, т. е. разность $f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k$, *короче любой наклонной* — разности $f - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$.

Доказательство начнём со второго утверждения теоремы: положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k$ и проверим, что $(f - S_n) \perp \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$. Для этого достаточно убедиться, что $(f - S_n) \perp e_m$ при всех $m = 1, \ldots, n$. Это в самом деле так, поскольку

$$\langle f - S_n, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle - \langle S_n, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\langle e_k, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle - c_m(f)\|e_m\|^2 = 0.$$

Последнее равенство справедливо в силу определения $c_m(f)$.

Теперь экстремальное свойство суммы S_n вытекает из теоремы Пифагора. Действительно, если $g = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ — произвольная функция из L, то $S_n - g \in L$ и, следовательно, $(f - S_n) \perp (S_n - g)$. Поэтому по теореме Пифагора

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 = \big\|(f - S_n) + (S_n - g)\big\|^2 &= \|f - S_n\|^2 + \|S_n - g\|^2 = \\ &= \|f - S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k(f)|^2 \|e_k\|^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\Big\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k\Big\|^2 \geqslant \|f - S_n\|^2 = \Big\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)e_k\Big\|^2,$$

и равенство возможно в единственном случае — когда $a_k = c_k(f)$ для всех k. ►

При $a_1 = \ldots = a_n = 0$, очевидно, $g = 0$ и тождество (3) принимает вид

$$\|f\|^2 = \Big\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)e_k\Big\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \|e_k\|^2.$$

Поэтому справедливо *неравенство Бесселя* *):

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{4}$$

1.3. Рассмотрим ОС $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в пространстве $\mathscr{L}^2_\mu(X)$. Очевидно, в $\mathscr{L}^2_\mu(X)$ имеются функции, не представимые в виде конечной линейной комбинации функций e_n. Поэтому естественно задать вопрос, при каких условиях функция $f \in \mathscr{L}^2_\mu(X)$ является суммой ряда вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Из доказанной нами теоремы следует, что единственным рядом

*) Фридрих Вильгельм **Бессель** (Bessel), 1784–1846, — немецкий астроном и математик.

такого вида, который может сходиться к f, является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n$, коэффициенты которого вычисляются по формулам (2). Действительно, тождество (3) показывает, что если $a_m \neq c_m(f)$, то для любого $n \geqslant m$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\| \geqslant |a_m - c_m(f)|\, \|e_m\| > 0,$$

и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k e_k$ не может сходиться к f.

Особая роль, которую играют ряды с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (2), даёт основание выделить их с помощью специального определения.

Определение. Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортогональная система, $f \in \mathscr{L}^2_\mu(X)$. Числа $c_n(f)$, получаемые по формуле (2), называются ***коэффициентами Фурье****), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n$ называется ***рядом Фурье*** функции f относительно рассматриваемой ОС.

Как мы вскоре установим, ряд Фурье любой функции f из $\mathscr{L}^2_\mu(X)$ сходится по норме $\|\cdot\|$ (хотя и не обязательно к f).

В случае ортонормированной системы формулы (2) упрощаются и принимают вид $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$. Если ортогональная система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не нормированная, то можно перейти к системе векторов $\widetilde{e}_n = e_n/\|e_n\|$ (как говорят, "нормировать" данную систему). При этом коэффициенты Фурье, очевидно, могут измениться, но члены ряда Фурье не изменяются, как показывает равенство

$$c_n(f)e_n = \frac{\langle f, e_n\rangle}{\|e_n\|^2}\, e_n = \left\langle f, \frac{e_n}{\|e_n\|} \right\rangle \frac{e_n}{\|e_n\|} = \langle f, \widetilde{e}_n\rangle \widetilde{e}_n.$$

Таким образом, слагаемые ряда Фурье функции f суть не что иное, как проекции f на прямые, порождаемые элементами ортогональной системы.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве Бесселя (4), мы получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2, \tag{4'}$$

также называемую *неравенством Бесселя.* Как следует из (1′), оно обращается в равенство, если $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n$.

1.4. Пока нам не известно, всегда ли ряд Фурье сходится и какова его сумма в случае сходимости. Следующая важная теорема устанавливает, что сумма ряда Фурье всегда существует. Предварительно докажем лемму.

Лемма. *Пусть* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — *ортогональная система. Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \tag{5}$$

*) Жан Батист Жозеф **Фурье** (Fourier), 1768–1830, — французский математик.

сходится по норме тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|e_n\|^2 < +\infty. \tag{5'}$$

В случае сходимости ряд (5) *является рядом Фурье своей суммы.*

Доказательство. Пусть S_n, T_n — частичные суммы рядов (5) и (5$'$) соответственно. Тогда при любых $n, p \in \mathbb{N}$

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \|e_k\|^2 = T_{n+p} - T_n.$$

Отсюда следует, что частичные суммы рядов (5) и (5$'$) сходятся в себе одновременно. Поскольку пространство $\mathscr{L}^2_\mu(X)$ полно, это равносильно первому утверждению леммы. Заключительное утверждение следует из возможности скалярно умножать сходящийся ряд почленно: если S — сумма ряда (5), то для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\langle S, e_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle e_n, e_m \rangle = a_m \|e_m\|^2.$$

Таким образом, $a_m = c_m(S)$ при всех m, т. е. ряд (5) — ряд Фурье своей суммы. ►

Теорема (Рисс*), Фишер**)). *Для любой ортогональной системы* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ряд Фурье функции* $f \in \mathscr{L}^2_\mu(X)$ *сходится по норме. При этом*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n + h, \quad \text{где } h \perp e_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Доказательство. По неравенству Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|f\|^2 < +\infty$, так что по лемме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n$ сходится. Пусть S — его сумма. Согласно второму утверждению леммы $c_n(f) \equiv c_n(S)$. Поэтому все коэффициенты Фурье разности $h = f - S$ равны нулю, т. е. $h \perp e_n$ при любом n. ►

1.5. Очевидно, сумма ряда Фурье может не совпадать с функцией, порождающей этот ряд. Например, если ОС $e_1, e_2, \ldots$ заменить системой $e_2, e_3, \ldots$, отбросив первый вектор, то все коэффициенты Фурье функции e_1 относительно новой системы будут нулями, и e_1 не будет равна сумме своего ряда Фурье (относительно новой системы).

---

*) Фридьеш **Рисс** (Riesz), 1880–1956, — венгерский математик.

) Эрнст Сигизмунд **Фишер (Fischer), 1875–1954, — немецкий математик.

Определение. Ортогональную систему $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ будем называть *базисом,* если любая функция из $\mathscr{L}^2_\mu(X)$ почти везде совпадает с суммой своего ряда Фурье.

Если $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — базис, то из равенства $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n$ вытекает, согласно (1′), что $\|f\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2\|e_n\|^2$. Таким образом, для базиса неравенство Бесселя превращается в равенство. Это свойство, как мы покажем, является характеристическим для базиса.

Заметим, что если $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — базис, то скалярное произведение двух функций можно вычислить с помощью коэффициентов Фурье, так как

$$\langle f,g\rangle=\Big\langle\sum_{n=1}^{\infty}c_n(f)e_n,g\Big\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(f)\langle e_n,g\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(f)\overline{c_n(g)}\|e_n\|^2.$$

Это равенство (как и его частный случай при $g=f$) называют *равенством Парсеваля**).

Введём ещё одно важное свойство, которое, как и равенство Парсеваля, оказывается характеристическим для базиса.

Определение. Семейство функций $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из $\mathscr{L}^2_\mu(X)$ называется *полным*, если из условия

$$f\in\mathscr{L}^2_\mu(X)\quad\text{и}\quad f\perp f_\alpha\ \ \text{при любом}\ \ \alpha\in A$$

следует, что $f=0$ почти везде, т. е. $\|f\|=0$.

Лемма. *Семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ полно, если множество линейных комбинаций входящих в неё функций всюду плотно, т. е. для любой функции $f\in\mathscr{L}^2_\mu(X)$ и любого $\varepsilon>0$ существует такая линейная комбинация $g=\sum\limits_{k=1}^{n}c_kf_{\alpha_k}$, что $\|f-g\|<\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $f\perp f_\alpha$ при любом α. Если бы оказалось, что $\|f\|\neq 0$, то нашлась бы такая функция $g=\sum\limits_{k=1}^{n}c_kf_{\alpha_k}$, что $\|f-g\|<\|f\|$. Но так как $f\perp g$, то это ведёт к противоречию:

$$\|f\|^2>\|f-g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2\geqslant\|f\|^2. \ \blacktriangleright$$

Теорема (о характеристике базиса). *Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортогональная система в пространстве $\mathscr{L}^2_\mu(X)$. Следующие утверждения равносильны:*

1) система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть базис;

2) для любой функции $f\in\mathscr{L}^2_\mu(X)$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2\|e_n\|^2=\|f\|^2;$$

3) система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна.

Доказательство проведём по схеме 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2) Эта импликация уже доказана после определения базиса.

2) $\Rightarrow$ 3) Допустим, что $f\perp e_n$, т. е. $c_n(f)=0$ при всех $n=1,\,2,\,\ldots$ По условию $\|f\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2\|e_n\|^2=0$, что и означает полноту системы $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

---

*) Марк Антуан **Парсеваль** (Parseval), 1755–1836, — французский математик.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть $f\in\mathscr{L}^2_\mu(X)$. По теореме Рисса–Фишера $f = g+h$, где $g=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n$, а $h \perp e_n$ при любом n. Из полноты системы следует, что $h = 0$ почти везде. Ввиду произвольности функции f, это и означает, что рассматриваемая ОС есть базис. ►

Сопоставляя теорему и предшествующую ей лемму, мы видим, что справедливо

Следствие. *Ортогональная система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна в том и только том случае, когда множество линейных комбинаций входящих в неё функций всюду плотно.*

§ 2. Примеры ортогональных систем

Здесь мы ограничимся примерами в простейшей ситуации, когда X — промежуток вещественной оси и $\mu = \lambda_1$. Вместо $\mathscr{L}^2_{\lambda_1}(X)$, будем писать кратко $\mathscr{L}^2(X)$, опуская указание на меру.

2.1. Тригонометрические системы. Важнейшие примеры ортогональных систем доставляют нам вещественная и комплексная *тригонометрические системы* в пространстве $\mathscr{L}^2\big((a, a+2\pi)\big)$:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \qquad \text{и} \qquad \{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{T}$$

Лемма (ортогональность тригонометрической системы). *Пусть $k, n\in\mathbb{Z}$. Тогда*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\cos kx\,dx = 0;\ \int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\cos kx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\sin kx\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при}\ \ n\neq k,\\ \pi & \text{при}\ \ n=k.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-ikx}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при}\ \ n\neq k,\\ 2\pi & \text{при}\ \ n=k.\end{cases}$$

Доказательства этих равенств очевидны.

Ряды Фурье по системам (T) имеют вид

$$A(f)+\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\,\cos nx + b_n(f)\,\sin nx\big) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\,e^{inx},$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$A(f) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx, \qquad a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\cos nx\,dx,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,\sin nx\,dx, \qquad c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

При изучении рядов Фурье можно предполагать, что функции определены на промежутке $(0, 2\pi)$, поскольку общий случай с помощью сдвига сводится к случаю $a = 0$. Часто также бывает удобно использовать симметричный промежуток $(-\pi, \pi)$.

Коэффициент Фурье $c_n(f)$ мы будем обозначать также символом $\widehat{f}(n)$:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Благодаря формулам Эйлера системы (T) тесно связаны друг с другом — их линейные оболочки совпадают (входящие в них функции называют *тригонометрическими многочленами*), а коэффициенты Фурье по одной системе выражаются через коэффициенты Фурье по другой системе:

$$\widehat{f}(\pm n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos nx \mp i\sin nx)\, dx = \frac{a_n(f) \mp i b_n(f)}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

и

$$a_n(f) = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) \quad \text{и} \quad b_n(f) = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Отсюда следует, что ряды Фурье по системам (T) по существу совпадают. Точнее, для любого номера n справедливо равенство

$$A(f) + \sum_{k=1}^{n}\bigl(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\bigr) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikx},$$

показывающее, что частичные суммы ряда Фурье по вещественной системе (T) совпадают с симметричными частичными суммами ряда Фурье по комплексной системе.

В следующей теореме говорится о важнейшем свойстве систем (T).

Теорема. *Вещественная и комплексная тригонометрические системы образуют базисы в* $\mathscr{L}^2\bigl((0,2\pi)\bigr)$.

Доказательство будет дано позже (см. следствие из теоремы Фейера в п. 4.2).

Поскольку каждая из систем (T) — базис, для неё справедливо равенство Парсеваля: если $f,\, g \in \mathscr{L}^2\bigl((0,2\pi)\bigr)$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\, dx = A(f)\,\overline{A(g)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(a_n(f)\,\overline{a_n(g)} + b_n(f)\,\overline{b_n(g)}\,\bigr) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}.$$

В частности ($g = f$), всякая функция f из $\mathscr{L}^2\bigl((0,2\pi)\bigr)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = |A(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\bigr) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2,$$

которое часто называют уравнением замкнутости.

Как мы уже отмечали, и в этих формулах, и в теореме промежуток $(0, 2\pi)$ можно заменить на любой промежуток длины 2π, в частности, на $(-\pi, \pi)$.

Пример. Пусть $f(x) = x$ для $x \in (-\pi, \pi)$. Коэффициенты Фурье этой функции легко вычисляются. Её ряд Фурье имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2}{n}\sin nx$. Согласно равенству Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Тем самым мы пришли к результату, полученному впервые Эйлером: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Те же рассуждения, применённые к функции $f(x) = x^2$ $(|x| \leqslant \pi)$, дают другой его результат: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

2.2. Приведём ещё два примера ортогональных систем.

Пусть $P_n(x) = \big((x^2-1)^n\big)^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Многочлены P_n называются *многочленами Лежандра**). Очевидно, $\deg P_n = n$, так что всякий многочлен есть линейная комбинация многочленов Лежандра. В пространстве $\mathscr{L}^2\big((-1,1)\big)$ они образуют ортогональную систему. В самом деле, при $m < n$

$$\langle P_m, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x)\big((x^2-1)^n\big)^{(n)}\,dx = P_m(x)\big((x^2-1)^n\big)^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1} - \\ - \int_{-1}^{1} P_m'(x)\big((x^2-1)^n\big)^{(n-1)}\,dx = -\int_{-1}^{1} P_m'(x)\big((x^2-1)^n\big)^{(n-1)}\,dx.$$

Проинтегрировав по частям n раз, мы придём к равенству

$$\langle P_m, P_n\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_m^{(n)}(x)\,(x^2-1)^n\,dx,$$

где $P_m^{(n)}(x) \equiv 0$, так как $\deg P_m < n$. Таким образом, $\langle P_m, P_n\rangle = 0$ при $m \neq n$.

Отметим ещё одну полезную ортогональную систему. В пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ рассмотрим *функции Эрмита***)

$$h_n(x) = e^{x^2/2}(e^{-x^2})^{(n)},\ n = 0, 1, \ldots .$$

Как легко убедиться, $h_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$, где H_n — многочлен степени n, называемый *многочленом Эрмита.* Ортогональность функций Эрмита можно установить с помощью интегрирования по частям, исходя из равенства

$$\langle h_m, h_n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)(e^{-x^2})^{(n)}\,dx,$$

совершенно аналогично тому, как мы это делали при доказательстве ортогональности многочленов Лежандра. Очевидно, ортогональность функций Эрмита в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ означает ортогональность многочленов Эрмита в $\mathscr{L}^2_\mu(\mathbb{R})$ с мерой $\mu(E) = \int_E e^{-x^2}dx$.

Известно, что многочлены Лежандра образуют базис в пространстве $\mathscr{L}^2\big((-1,1)\big)$, а функции h_n — в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ (это равносильно тому, что многочлены Эрмита H_n образуют базис в $\mathscr{L}^2_\mu(\mathbb{R})$). Доказательства см. в книге Макарова и Подкорытова.

*) Адриен Мари **Лежандр** (Legendre), 1752–1833, — французский математик.

) Шарль **Эрмит (Hermite), 1822–1901, — французский математик.

§ 3. Тригонометрические ряды Фурье

В § 1 были установлены важные свойства рядов Фурье по произвольным ортогональным системам. Теперь мы детальнее изучим свойства рядов Фурье по тригонометрической системе.

3.1. Напомним, что согласно общему определению 2.1 ряды Фурье функции $f \in \mathscr{L}^2\big((0,2\pi)\big)$ по системам

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \qquad \text{и} \qquad \{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

имеют соответственно вид

$$A(f) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\,\cos nx + b_n(f)\,\sin nx\big) \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\,e^{inx}, \tag{1$'$}$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} A(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos nx\,dx, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin nx\,dx \quad (n\in\mathbb{N}); \end{gathered} \tag{2}$$

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}dx \qquad (n\in\mathbb{Z}). \tag{2$'$}$$

В отличие от предыдущего параграфа, где рассматривались только функции класса $\mathscr{L}^2$, здесь мы будем иметь дело с произвольными функциями, суммируемыми на $(0,2\pi)$. Очевидно, что при этом подынтегральные функции в формулах (2) и (2$'$) по-прежнему будут суммируемыми. Поэтому для функций из $\mathscr{L}^1\big((0,2\pi)\big)$ мы сохраним все введённые термины (коэффициент Фурье, ряд Фурье и др.). Теперь нас будет интересовать не сходимость ряда по $\mathscr{L}^2$-норме, а другие виды сходимости, прежде всего поточечная. При этом *сумма ряда* (1$'$) *всегда понимается как предел симметричных частичных сумм*:

$$S_n(f,x) = \sum_{|k|\leqslant n}\widehat{f}(k)\,e^{ikx}, \tag{3}$$

которые называют также *суммами Фурье* функции f. Как отмечалось в п. 2.1, частичные суммы рядов (1) и (1$'$) одинаковы. Таким образом, все результаты, полученные для одного ряда, справедливы и для другого. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном ряды (1$'$), поскольку это приводит к некоторым техническим упрощениям.

3.2. Вместо функций, определённых лишь на промежутке $(0,2\pi)$, нам будет удобнее иметь дело с 2π-периодическими функциями. Поскольку всякую функцию, определённую на $(0,2\pi)$, можно продолжить до периодической, мы в дальнейшем будем считать все рассматриваемые функции периодическими (всюду далее периодичность означает 2π-периодичность). В случае суммируемости на промежутке длины 2π, такая функция суммируема на любом конечном промежутке. Мы неоднократно будем пользоваться независимостью интеграла $\int_a^{a+2\pi} f(x)\,dx$ от параметра a, которую читатель легко установит самостоятельно. Часто, особенно имея дело с чётными или нечётными функциями, в формулах (2) и (2′) удобнее интегрировать по промежутку $(-\pi, \pi)$.

Символами $\widetilde{C}$ и $\widetilde{C}^r$ $(1 \leqslant r \leqslant +\infty)$ обозначим классы периодических функций непрерывных и, соответственно, r раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$; $\widetilde{\mathscr{L}}$ — класс периодических функций, суммируемых на $(0, 2\pi)$ (и, следовательно, суммируемых на любом конечном промежутке).

В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться таким частным случаем теоремы Римана – Лебега: если функция f суммируема на промежутке (p, q), то

$$\int_p^q f(x)\,e^{-iyx}dx,\ \int_p^q f(x)\cos yx\,dx,\ \int_p^q f(x)\sin yx\,dx \underset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{R–L}$$

Отметим простейшие свойства коэффициентов Фурье.

а) $|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|\,dx$ (см. формулу (2′)).

б) $\widehat{f}(n) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (см. теорему Римана–Лебега).

Важную роль играет свойство коэффициентов Фурье, связанное с дифференцированием.

в) Если периодическая функция f непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, то

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(для доказательства достаточно проинтегрировать по частям). В частности, $\widehat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$.

г) Повторное применение свойства в) к функции класса $\widetilde{C}^r$ даёт нам равенство $\widehat{f^{(r)}}(n) = (in)^r\widehat{f}(n)$. Поэтому $\widehat{f}(n) = o\big(|n|^{-r}\big)$, так что чем глаже функция, тем быстрее её коэффициенты Фурье стремятся к нулю.

3.3. Исследование сходимости ряда Фурье начнём с вывода важной формулы для его частичных сумм, найденной Дирихле*). Опираясь на формулу (2′), преобразуем равенство (3):

$$S_n(f,x) = \sum_{|k|\leqslant n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,dt\right)e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sum_{|k|\leqslant n} e^{ik(x-t)}\,dt.$$

Функция

$$D_n(u) = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\leqslant n} e^{iku} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos ku \tag{4}$$

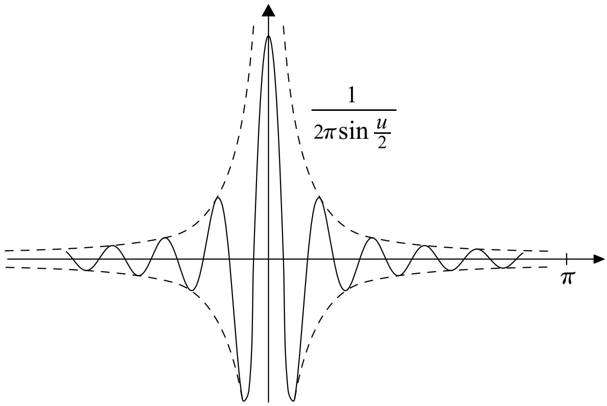
---

*) Петер Густав Лежён **Дирихле** (Dirichlet), 1805–1859, — немецкий математик.

называется n-м *ядром Дирихле*. Очевидно, оно чётно и периодично. Просуммировав геометрическую прогрессию $\sum\limits_{|k|\leqslant n} e^{iku}$, получим:

$$D_n(u) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\pi\sin\frac{u}{2}} \quad \text{при} \quad u \neq 0 \mod 2\pi. \tag{4'}$$

Отсюда видно, что при больших n функция D_n сильно колеблется и в окрестности нуля поочерёдно принимает экстремальные значения противоположных знаков, по абсолютной величине сравнимые с $\max D_n = D_n(0) = \frac{1}{\pi}\left(n+\frac{1}{2}\right)$ (см. рисунок).



Непосредственно из определения ядра Дирихле вытекает равенство

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt.$$

Пользуясь периодичностью подынтегральных функций, его можно записать и так:

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\,du. \tag{5}$$

Из равенства (4) сразу следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = 2\int_{0}^{\pi} D_n(u)\,du = 1. \tag{5'}$$

Частичные суммы ряда Фурье вычисляются с помощью формулы (5) и, таким образом, зависят от значений функции, принимаемых на промежутке длины 2π. Тем удивительнее, что, как мы сейчас убедимся, сходимость ряда Фурье в точке x и величина его суммы суть локальные свойства функции — они сохраняются при произвольном изменении функции вне сколь угодно малой окрестности этой точки. Более формально говоря, справедлива следующая

Теорема (принцип локализации Римана). *Если в некоторой окрестности точки x функции $f, g \in \widetilde{\mathscr{L}}$ совпадают, то их ряды Фурье в этой точке ведут себя одинаково:* $S_n(f,x) - S_n(g,x) \to 0$ *при* $n \to \infty$.

В частности, сходимость одного ряда влечёт сходимость другого (к той же сумме).

Доказательство. Из условия немедленно следует, что функция $\varphi_x(u) = \frac{f(x-u)-g(x-u)}{2\pi\sin\frac{u}{2}}$ (равная нулю в окрестности точки $u = 0$) суммируема на $(-\pi, \pi)$. Так как в силу равенства (5)

$$S_n(f,x) - S_n(g,x) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(u)\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)u\,du,$$

то нам остаётся сослаться на теорему Римана–Лебега (см. (R–L)). ▶

3.4. Из большого числа различных признаков сходимости рядов Фурье мы приведём лишь один — признак Дини*).

Теорема (признак Дини). *Если при некотором $C \in \mathbb{C}$ функция $f \in \widetilde{\mathscr{L}}$ удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условию Дини, то есть*

$$\int_0^{\pi} \left| \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - C \right| \frac{du}{u} < +\infty,$$

то её ряд Фурье в этой точке сходится к числу C.

В частности, если функция дифференцируема в этой точке, то условие Дини выполнено с $C = f(x)$, и следовательно, сумма ряда Фурье равна $f(x)$. Если же существуют лишь односторонние пределы $f(x \pm 0)$ и для некоторого $\alpha > 0$

$$|f(x \pm u) - f(x \pm 0)| = O(u^{\alpha}) \quad \text{при} \;\; u \to +0,$$

то ряд Фурье этой функции в точке x сходится к полусумме $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Доказательство. Пользуясь чётностью ядра Дирихле, из равенства (5) получаем

$$\begin{aligned} S_n(f,x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_n(u)\,du = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} D_n(u)\,du = 2\int_0^{\pi} \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} D_n(u)\,du. \end{aligned}$$

Вычитая отсюда равенство (5′), умноженное на C, мы видим, что

$$\begin{aligned} S_n(f,x) - C &= 2\int_0^{\pi} \left(\frac{f(x-u)+f(x+u)}{2} - C \right) D_n(u)\,du = \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{f(x-u)+f(x+u)}{2} - C \right) \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)u}{\pi \sin\frac{u}{2}} du = \int_0^{\pi} g_x(u)\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)u du, \end{aligned}$$

где $g_x(u) = \big(\frac{f(x-u)+f(x+u)}{2} - C\big)\frac{1}{\pi\sin\frac{u}{2}}$. Так как $\sin\frac{u}{2} > \frac{u}{\pi}$ при $0 < u < \pi$, то

$$|g_x(u)| \leqslant \frac{1}{u} \left| \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - C \right|.$$

---

*) Улисс **Дини** (Dini), 1845–1918, — итальянский математик.

По условию теоремы это гарантирует суммируемость функции g_x на $(0,\pi)$. Поэтому интеграл в правой части равенства стремится к нулю — см. (R–L). ▶

3.5. Приведём примеры разложений в ряд Фурье. В томе III "Курса..." Г.М.Фихтенгольца есть разнообразные примеры, некоторые из них сопровождаются поучительными иллюстрациями.

Пример 1. Дополним пример 1 п. 2.1: так как периодическая функция, равная x на $(-\pi,\pi)$, дифференцируема во всех точках не равных $(2k+1)\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, то по признаку Дини её ряд Фурье сходится не только по $\mathscr{L}^2$-норме, но и поточечно:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx \qquad \text{для} \quad x\in(-\pi,\pi).$$

В точках $(2k+1)\pi$ сумма ряда равна нулю, т. е. полусумме односторонних пределов функции. При $x=\frac{\pi}{2}$ разложение в ряд Фурье приводит к равенству

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{2m+1}.$$

Рассматривая в точке π ряд Фурье функции, равной x^2 на $[-\pi,\pi]$, можно ещё раз (см. пример 1 в п. 2.1) получить равенство Эйлера $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Пример 2. Пусть 2π-периодическая функция f равна $\operatorname{sign} x$ при $|x|<\pi$ и $f(\pm\pi)=0$. Так как f нечётна, то $A(f)=a_n(f)=0$ для всех n. Простой подсчёт показывает, что $b_{2n}=0$ и $b_{2n-1}(f)=\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2n-1}$. Очевидно, что в каждой точке f удовлетворяет условию Дини и, следовательно, эта функция равна сумме своего ряда Фурье:

$$1 \equiv \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \qquad (0<x<\pi).$$

В п. 690 тома III "Курса..." Г.М.Фихтенгольца приведены графики нескольких первых частичных сумм этого ряда.

Пример 3. Пусть $w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$. Рассмотрим периодическую функцию, равную $\cos wx$ на промежутке $[-\pi,\pi]$. Она всюду на $\mathbb{R}$ имеет конечные односторонние производные и поэтому раскладывается в ряд Фурье. После элементарных вычислений коэффициентов Фурье мы получаем, что для $|x|\leqslant\pi$ справедливо равенство

$$\cos wx = \frac{\sin\pi w}{\pi w} + \frac{2}{\pi}\,w\,\sin\pi w\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{w^2-n^2}\cos nx.$$

При $x=\pi$ и $x=0$ из него вытекают разложения котангенса и косеканса в суммы простейших дробей:

$$\operatorname{ctg}\pi w = \frac{1}{\pi w} + \frac{2w}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{w^2-n^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{w-n};$$

$$\frac{1}{\sin\pi w} = \frac{1}{\pi w} + \frac{2w}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{w^2-n^2} = \frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{w-n}.$$

3.6. Известно, что ряд Фурье суммируемой и даже непрерывной функции может расходиться. Однако он обладает замечательным свойством — не заботясь о сходимости, его можно почленно интегрировать по любому конечному промежутку.

Теорема. *Пусть $f \in \widetilde{\mathscr{L}}$. Тогда для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \int_a^b e^{inx}\,dx$$

(сумма ряда понимается как предел симметричных частичных сумм).

Следствие. *Для любой функции $f \in \widetilde{\mathscr{L}}$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n}$ сходится.*

Напомним, что $b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx = i\big(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)\big)$ — синус-коэффициент Фурье функции f.

Доказательства этой теоремы и следствия из неё см. в книге Макарова и Подкорытова.

Это следствие даёт условие, необходимое для того, чтобы тригонометрический ряд $\sum_{n\geqslant 1}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ мог быть рядом Фурье. Всюду сходящийся тригонометрический ряд $\sum_{n>1} \frac{\sin nx}{\ln n}$ этому условию не удовлетворяет и, следовательно, не является рядом Фурье никакой суммируемой функции. Интересно отметить, что в отличие от синус-коэффициентов косинус-коэффициенты могут стремиться к нулю сколь угодно медленно. Например, ряд $\sum_{n>1} \frac{\cos nx}{\ln n}$ есть ряд Фурье некоторой суммируемой функции.

§ 4. Теорема Фейера

4.1. Поскольку ряд Фурье может расходиться даже в точках непрерывности (см. пример на стр. 513–514 книги Макарова и Подкорытова), возникает мысль получить какую-то информацию о его поведении, рассматривая не классическое, а иное, более слабое определение сходимости. Один из вариантов такого подхода — исследовать сходимость не частичных сумм ряда, а их средних арифметических. Пределом последовательности $\{a_n\}$ в смысле средних арифметических или по Чезаро*) называется предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_0 + \ldots + a_{n-1})$. Он может существовать и в том случае, когда сама последовательность расходится, например, если $a_n = (-1)^n$. Вместе с тем, если $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, то и $\frac{1}{n}(a_0 + \ldots + a_{n-1}) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ (перманентность метода средних арифметических). Для числовых рядов такой подход приводит к понятию обобщённой суммы ряда: говорят, что ряд сходится по Чезаро к некоторому числу, если оно равно пределу по Чезаро последовательности частичных сумм этого ряда. Исходя из этих соображений, положим

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\big(S_0(f,x) + \ldots + S_{n-1}(f,x)\big),$$

где $S_0(f,x), \ldots, S_{n-1}(f,x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f \in \widetilde{\mathscr{L}}$. Суммы σ_n называются её *суммами Фейера* **). Из равенства (5) п. 3.3 вытекает, что

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-u)}{\sin\frac{u}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} \sin\Big(j + \frac{1}{2}\Big)u\,du. \tag{1}$$

*) Эрнесто **Чезаро** (Cesaro), 1859–1906, — итальянский математик.

) Липот **Фейер (Fejér), 1880–1959, — венгерский математик.

Тригонометрическое тождество

$$\sin\frac{u}{2}+\sin\frac{3}{2}u+\ldots+\sin\Bigl(n-\frac{1}{2}\Bigr)u=\frac{1-\cos nu}{2\sin\frac{u}{2}}=\frac{\sin^2\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\qquad(u\neq 0\mod 2\pi),$$

которое несложно проверить, позволяет преобразовать правую часть равенства (1):

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\left(\frac{\sin\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2du=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\Phi_n(u)\,du,\tag{2}$$

где

$$\Phi_n(u)=\frac{D_0(u)+\ldots+D_{n-1}(u)}{n}=\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2.\tag{3}$$

Этот неотрицательный тригонометрический многочлен называется n-м *ядром Фейера*. Полезно построить эскиз графика Φ_n и сравнить его с графиком ядра Дирихле.

Так как $\int_{-\pi}^{\pi}D_j(u)\,du=1$ для всех j, то из (3) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\bigl|\Phi_n(u)\bigr|\,du=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)\,du=\frac{1}{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}D_0(u)\,du+\ldots+\int_{-\pi}^{\pi}D_{n-1}(u)\,du\right)=1.\tag{4}$$

Таким образом, $\mathscr{L}$-нормы всех ядер Фейера равны единице (в этом их принципиальное отличие от ядер Дирихле, $\mathscr{L}$-нормы которых стремятся к бесконечности).

Заметим ещё, что из равенства (3) вытекает, что при $\delta<|u|<\pi$

$$\Phi_n(u)=\frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2\leqslant\frac{1}{2\pi n\,\sin^2\frac{\delta}{2}}=\frac{C_\delta}{n}.\tag{5}$$

4.2. Теперь мы можем перейти к основному результату этого параграфа, играющему важную роль в гармоническом анализе. Его доказательство опирается на свойства (4) и (5) ядер Фейера.

Теорема (Фейер). *Пусть $f\in\widetilde{\mathscr{L}}$ и $x\in\mathbb{R}$. Тогда*

I. *если существует конечный предел $L=\lim\limits_{t\to x}f(t)$, то $\sigma_n(f,x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}L$; в частности, $\sigma_n(f,x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$, если функция f непрерывна в точке x;*

II. *если $f\in\widetilde{C}$, то $\sigma_n(f)\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}f$ на $\mathbb{R}$;*

III. $\|\sigma_n(f)-f\|_1=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\sigma_n(x)|\,dx\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$

Доказательство. I. По условию для любого $\varepsilon>0$ существует такое положительное число $\delta=\delta_\varepsilon(x)$, что $|f(x+u)-L|<\varepsilon$, если $|u|<\delta$. Не умаляя общности, будем считать, что $\delta<\pi$. Тогда

$$\sigma_n(f,x)-L=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\Phi_n(u)du-L\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)du=\int_{-\pi}^{\pi}\bigl(f(x-u)-L\bigr)\Phi_n(u)du\tag{6}$$

(в начале мы воспользовались равенством (4)). Следовательно,

$$\bigl|\sigma_n(f,x)-L\bigr|\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\bigl|f(x-u)-L\bigr|\Phi_n(u)\,du=\int_{|u|<\delta}\ldots+\int_{\delta<|u|<\pi}\ldots=A+B.$$

Ясно, что

$$A \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} \varepsilon \Phi_n(u)\,du < \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\,du = \varepsilon$$

(мы вновь использовали равенство (4)).

Для оценки интеграла B применим неравенство (5):

$$B \leqslant \frac{C_\delta}{n} \int_{\delta<|u|<\pi} \bigl(|f(x-u)| + |L|\bigr) du \leqslant \frac{C_\delta}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(|f(x-u)| + |L|\bigr) du = \frac{C_\delta(x)}{n},$$

где $C_\delta(x) = \bigl(\|f\|_1 + 2\pi|L|\bigr)C_\delta$. Поэтому $|B| < \varepsilon$, если $n > C_\delta(x)/\varepsilon$. Таким образом,

$$\bigl|\sigma_n(f,x) - L\bigr| \leqslant A + B < 2\varepsilon \quad \text{для всех} \quad n > C_\delta/\varepsilon,$$

что и требовалось для доказательства первого утверждения.

Для доказательства второго утверждения достаточно лишь уточнить проведённое рассуждение, учитывая, что теперь $L = f(x)$. По теореме Кантора функция f равномерно непрерывна. Поэтому параметр $\delta = \delta_\varepsilon$ можно взять не зависящим от x. Так как функция f ограничена, то и коэффициент $C_{\delta_\varepsilon}(x)$ зависит лишь от ε, но не от точки x. Поэтому неравенство $\bigl|\sigma_n(f,x) - f(x)\bigr| < 2\varepsilon$ выполняется, как только $n > N_\varepsilon = C_{\delta_\varepsilon}/\varepsilon$. Это доказывает утверждение II.

Докажем последнее утверждение теоремы. Для этого воспользуемся неравенством

$$\rho_n \overset{def}{=} \|\sigma_n(f) - f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)|\,dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \biggl(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u) - f(x)| \Phi_n(u)\,du \biggr) dx$$

(в конце было применено равенство (6) с $L = f(x)$). Поменяв порядок интегрирования, мы получим

$$\rho_n \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \biggl(\int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u) - f(x)|\,dx \biggr) \Phi_n(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta_f(u)\Phi_n(u)\,du = \sigma_n\bigl(\Delta_f, 0\bigr),$$

где $\Delta_f(u) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-u) - f(x)|\,dx$. Согласно теореме о непрерывности суммируемой функции в среднем $\Delta_f(u) \to 0$ при $u \to 0$. Остаётся применить уже доказанное первое утверждение к функции Δ_f: $\sigma_n(\Delta_f, 0) \to 0$ и поэтому $\rho_n = \|\sigma_n(f) - f\|_1 \to 0$. ▶

Благодаря первому утверждению теоремы и перманентности метода средних арифметических, мы можем сделать такой вывод: если в точке непрерывности суммируемой функции ряд Фурье сходится, то его сумма обязательно равна значению функции в этой точке, т.е. в точке непрерывности ряд Фурье не может сходиться к числу отличному от значения функции в этой точке.

Увеждение III теоремы позволяет легко доказать усиленную полноту тригонометрической системы (не только в $\widetilde{\mathscr{L}}^2$, но и в более широком пространстве $\widetilde{\mathscr{L}}$).

Следствие (полнота тригонометрической системы). *Если функция f из $\widetilde{\mathscr{L}}$ такова, что $\widehat{f}(n) = 0$ при $n \in \mathbb{Z}$, то $f(x) = 0$ для почти всех x.*

Доказательство. У функции с нулевыми коэффициентами Фурье все суммы Фурье, очевидно, тождественно равны нулю. Поэтому таковы и суммы Фейера: $\sigma_n(f) \equiv 0$ для всех n. Но тогда в силу утверждения III мы имеем

$$\|f\|_1 \leqslant \|f - \sigma_n(f)\|_1 + \|\sigma_n(f)\|_1 = \|f - \sigma_n(f)\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, $\|f\|_1 = 0$, т.е. функция f почти всюду равна нулю. ►

Как мы убедились, суммы Фейера $\sigma_n(f)$ имеют очевидное преимущество по сравнению с частичными суммами $S_n(f)$ ряда Фурье — они аппроксимируют любую суммируемую функцию в интегральной метрике, а к непрерывной функции сходятся равномерно. Но следует иметь в виду, что за эту универсальность сумм Фейера приходится платить — они не могут быстро сходиться к функции. В этом можно убедиться, решив следующее

УПРАЖНЕНИЕ. Суммы Фейера не могут быстро сходиться: либо при некотором $\delta > 0$ $\|f - \sigma_n(f)\|_1 \geqslant \frac{\delta}{n} > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, либо $f \equiv \mathrm{const}$ почти везде. Указание. Вычислите коэффициенты Фурье разности $f - \sigma_n(f)$ и примените неравенство а) п. 3.2.

Поэтому, если ряд Фурье сходится быстро, то суммы Фейера хуже аппроксимируют функцию, чем суммы Фурье.

§ 5. Преобразование Фурье

В этом параграфе мы обсудим “непрерывный аналог” рядов Фурье, в котором рассматриваются непериодические функции, а вместо ряда используется интеграл. Как мы убедимся, многие важные свойства рядов Фурье сохраняются и в новой ситуации.

5.1. Определение. *Преобразование Фурье* $\widehat{f}$ функции f из $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ определяется равенством

$$\widehat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, e^{-i\langle y,x\rangle}\, dx \qquad (y \in \mathbb{R}^m)$$

(здесь $\langle y, x\rangle$ — скалярное произведение векторов y и x).

Замечание. Нередко нормирующий коэффициент перед интегралом берут равным 1 или $\frac{1}{(2\pi)^m}$. Во втором случае (при $m = 1$) ясна аналогия с формулой для вычисления коэффициента Фурье периодической функции. Другой вариант определения — с коэффициентом 2π в показателе экспоненты (перед интегралом единичный коэффициент). Очевидно, все эти варианты просто сводятся друг к другу.

Отметим простейшие свойства преобразования Фурье. Функция $\widehat{f}$ ограничена:

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \|f\|_1 \quad \text{для всех} \ \ y \in \mathbb{R}^m.$$

Как следует из теоремы Римана – Лебега, $\widehat{f}(y) \to 0$ при $\|y\| \to +\infty$. Кроме того, $\widehat{f} \in C\big(\mathbb{R}^m\big)$. Действительно,

$$|\widehat{f}(y) - \widehat{f}(y_0)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \Big| e^{-i\langle y,x\rangle} - e^{-i\langle y_0,x\rangle} \Big|\, dx.$$

В каждой точке x подынтегральная функция стремится к нулю при $y \to y_0$ и не превосходит $2|f(x)|$. Поскольку эта мажоранта суммируема, можно воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, что и доказывает сходимость $\widehat{f}(y) \to \widehat{f}(y_0)$ при $y \to y_0$ для каждого $y_0 \in \mathbb{R}^m$.

Напомним, что сдвиг f_h функции f на фиксированный вектор $h \in \mathbb{R}^m$ определяется равенством $f_h(x) = f(x-h)$. Несложные вычисления показывают, как связаны $\widehat{f}$ и $\widehat{f_h}$:

$$\widehat{f_h}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(x-h)\, e^{-i\langle y,x\rangle} dx = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(t)\, e^{-i\langle y,t+h\rangle} dt = e^{-i\langle y,h\rangle}\, \widehat{f}(y).$$

Другая операция с аргументом функции — сжатие — также просто связана с преобразованием Фурье: если $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $g(x) = f(ax)$, то

$$\widehat{g}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(ax)\, e^{-i\langle y,x\rangle} dx = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \frac{1}{|a|^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(t)\, e^{-i\frac{1}{a}\langle y,t\rangle} dt = \frac{1}{|a|^m} \widehat{f}\big(\tfrac{y}{a}\big).$$

Приведём некоторые примеры.

Пример 1. Преобразование Фурье характеристической функции χ промежутка $(-1,1)$ вычисляется совсем просто:

$$\widehat{\chi}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\, e^{-iyx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-iyx}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \cos yx\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin y}{y}.$$

Отметим, что $\widehat{\chi} \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

Пример 2. Найдём преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/2}$ $(x \in \mathbb{R})$. Для этого рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos yx\, dx \qquad \text{при} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Согласно правилу Лейбница дифференцирования интеграла по параметру

$$J'(y) = -\int_0^{\infty} x\, e^{-x^2} \sin yx\, dx.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$J'(y) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin yx \Big|_0^{\infty} - \frac{y}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos yx\, dx = -\frac{y}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos yx\, dx = -\frac{y}{2}\, J(y).$$

Поэтому $J'(y) + \frac{y}{2}\, J(y) = 0$. Следовательно, $\Big(e^{y^2/4} J(y)\Big)' = 0$. Таким образом, $J(y) = C\, e^{-y^2/4}$. Поскольку $C = J(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (это интеграл Эйлера – Пуассона), мы приходим к такому результату:

$$J(y) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos yx\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-y^2/4}.$$

Для вычисления преобразования Фурье осталось заметить, что

$$\widehat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\,e^{-iyx}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-x^2/2}\cos yx\,dx=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t^2}\cos(\sqrt{2}yt)dt.$$

Правая часть этого равенства равна $\frac{2}{\sqrt{\pi}}J(\sqrt{2}\,y)$. Поэтому

$$\widehat{f}(y)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}J(\sqrt{2}\,y)=e^{-y^2/2}=f(y),\quad \text{то есть}\quad f\equiv\widehat{f}.$$

Из установленного равенства непосредственно вытекает и его многомерный вариант:

$$\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int_{\mathbb{R}^m}e^{-\|x\|^2/2}\,e^{-i\langle y,x\rangle}\,dx=\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_j^2/2}\,e^{-iy_jx_j}\,dx_j=\prod_{j=1}^{m}e^{-y_j^2/2}=e^{-\|y\|^2/2}.$$

Пример 3. Пусть $f(x)=e^{-|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$. Тогда

$$\widehat{f}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x|}\,e^{-iyx}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{R}e\left(\int_0^{\infty}e^{-(1+iy)x}\,dx\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathcal{R}e\frac{1}{1+iy}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2}.$$

Пример 4. Получить многомерное обобщение примера 3, т. е. вычислить преобразование Фурье функции $f(x)=e^{-\|x\|}$ $(x\in\mathbb{R}^m)$, значительно труднее, поскольку в этом случае нельзя использовать разделение переменных. Возникшее затруднение удаётся преодолеть с помощью искусственного приёма, основанного на интегральном представлении функции $e^{-\|x\|}$. Нам потребуется равенство:

$$e^{-t}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2-\frac{t^2}{4u^2}}\,du\quad \text{для любого}\ \ t>0.$$

Чтобы получить его, надо записать интеграл, стоящий в правой части, в виде $e^{-t}\int_0^{\infty}e^{-(u-\frac{t}{2u})^2}du$. После замены переменной $v=u-\frac{t}{2u}$ он сводится к интегралу Эйлера–Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2}dv=\sqrt{\pi}$.

Воспользуемся теперь установленным равенством для вычисления $\widehat{f}$:

$$\widehat{f}(y)=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int_{\mathbb{R}^m}e^{-\|x\|}e^{-i\langle y,x\rangle}dx=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_0^{\infty}e^{-u^2-\frac{\|x\|^2}{4u^2}}\,du\right)e^{-i\langle y,x\rangle}\,dx.$$

Изменим порядок интегрирования и сделаем замену переменной $x\mapsto\sqrt{2}\,ux$. Тогда

$$\widehat{f}(y)=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}\left(\int_{\mathbb{R}^m}e^{-\frac{\|x\|^2}{4u^2}}e^{-i\langle y,x\rangle}\,dx\right)du=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-u^2}(\sqrt{2}u)^m\left(\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int_{\mathbb{R}^m}e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}e^{-i\langle\sqrt{2}uy,x\rangle}dx\right)du.$$

Используя последнюю формулу примера 2 (с заменой y на $\sqrt{2}\,uy$), получим

$$\widehat{f}(y) = \frac{2^{1+\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2} u^m e^{-u^2\|y\|^2}\, du = \frac{2^{1+\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^m e^{-(1+\|y\|^2)u^2} du.$$

Теперь замена переменной $v = \big(1 + \|y\|^2\big)u^2$ позволяет выразить последний интеграл с помощью функции Γ и прийти к искомому результату:

$$\widehat{f}(y) = \frac{2^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}(1+\|y\|^2)^{\frac{m+1}{2}}} \int_0^\infty v^{(m-1)/2} e^{-v} dv = \frac{2^{\frac{m}{2}}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\big(\frac{m+1}{2}\big)}{(1+\|y\|^2)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

5.2. Установим простейшие свойства преобразования Фурье, связанные с дифференцированием.

Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$. Тогда*

1) если $f \in C^1\big(\mathbb{R}^m\big)$, $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$ и при некотором $k = 1,\ldots,m$ частная производная $g = \frac{\partial f}{\partial x_k}$ суммируема, то

$$\widehat{g}(y) = iy_k \widehat{f}(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^m);$$

2) если произведение $\|x\|f(x)$ суммируемо, то $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}^m)$ и для всех $y \in \mathbb{R}^m$ и $k = 1,\ldots,m$ справедливо равенство

$$\frac{\partial \widehat{f}(y)}{\partial y_k} = -i\widehat{f_k}(y), \qquad \text{где} \quad f_k(x) = x_k f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Доказательство. 1) Не умаляя общности будем считать $k = m$. Точку $x = (x_1,\ldots,x_{m-1},t)$ отождествим с парой (u,t), где $u = (x_1,\ldots,x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $t \in \mathbb{R}$. По теореме Фубини функция $t \mapsto f(u,t)$ суммируема при почти всех u. Интегрирование по частям для таких u даёт нам

$$\int_{-\infty}^\infty g(u,t)\, e^{-iy_m t}\, dt = f(u,t)\, e^{-iy_m t}\Big|_{-\infty}^\infty - (-iy_m) \int_{-\infty}^\infty f(u,t)\, e^{-iy_m t}\, dt =$$
$$= iy_m \int_{-\infty}^\infty f(u,t)\, e^{-iy_m t}\, dt.$$

Чтобы получить требуемый результат, остаётся домножить это равенство на $e^{-i(y_1x_1+\ldots+y_{m-1}x_{m-1})}$ и проинтегрировать по $u = (x_1,\ldots,x_{m-1})$.

Для получения равенства 2) надо применить правило Лейбница. По условию функции $f_1,\ldots,f_m$ суммируемы. Поэтому их преобразования Фурье, а вместе с ними и частные производные первого порядка функции $\widehat{f}$, всюду непрерывны. Следовательно, $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}^m)$. ►

Напомним, что функция называется финитной, если она равна нулю вне некоторого достаточно большого шара. Класс финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^m$ функций обозначается символом $C_0^\infty\big(\mathbb{R}^m\big)$.

Следствие. *Если $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ — финитная функция, то $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$; если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то для любого $p > 0$ произведение $\|y\|^p\widehat{f}(y)$ суммируемо в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость $\widehat{f}$ непосредственно следует из второго утверждения теоремы, поскольку произведение $\|x\|^n f(x)$ суммируемо при любом $n \in \mathbb{N}$.

Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то производные функции f любого порядка суммируемы и при всех $k = 1, \dots, m$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\Big(\frac{\partial^n f}{\partial y_k^n}\Big)^{\widehat{}}(y) = (iy_k)^n \widehat{f}(y).$$

Ввиду ограниченности $\big(\frac{\partial^n f}{\partial y_k^n}\big)^{\widehat{}}(y)$ отсюда вытекает оценка

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant \mathrm{const} \cdot \big(1 + |y_1|^n + \ldots + |y_m|^n\big)^{-1},$$

обеспечивающая (если взять n достаточно большим) суммируемость $\|y\|^p \widehat{f}(y)$. ▶

5.3. В одномерном случае для дифференцируемой в точке x функции f справедлива важная формула, позволяющая найти $f(x)$ с помощью $\widehat{f}$. Эта формула, называемая *формулой обращения*, имеет следующий вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy.$$

Интеграл в правой части этого равенства называется *интегралом Фурье* функции f (он равен, конечно, $\widehat{f}(-y)$). Вообще говоря, это несобственный интеграл, поскольку преобразование Фурье может быть несуммируемым на $\mathbb{R}$ (см. пример 1 п. 5.1). Мы будем говорить, что он сходится, если существует конечный предел частичных интегралов

$$I_A(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy$$

при $A \to +\infty$.

Очевидна аналогия между разложением периодической функции в ряд Фурье и представлением непериодической функции её интегралом Фурье. Следующая теорема показывает, что у этих двух задач есть не только внешнее сходство, но и тесная связь по существу. Чтобы показать это, нам потребуется несложная

Лемма. *Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $A > 0$ справедливо равенство*

$$I_A(f,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{A} \widehat{f}(y)\, e^{ixy} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, \frac{\sin At}{t}\, dt.$$

Доказательство. Ясно, что

$$I_A(f,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i(x-u)y} du\Big) dy.$$

Поскольку функция $(y,u) \mapsto f(u)\, e^{i(x-u)y}$ суммируема в полосе $(-A, A) \times \mathbb{R}$, мы можем воспользоваться теоремой Фубини и поменять порядок интегрирования:

$$I_A(f,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_{-A}^{A} f(u)\, e^{i(x-u)y} dy\Big) du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \frac{\sin A(x-u)}{x-u}\, du.$$

Осталось сделать замену переменной интегрирования $t = x - u$. ▶

По теореме Римана–Лебега для любого $\delta > 0$ интеграл $\int_{|t|\geqslant\delta} f(x-t)\,\frac{\sin At}{t}\,dt$ бесконечно мал при $A \to +\infty$. Поэтому из леммы вытекает асимптотическое соотношение

$$I_A(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,\frac{\sin At}{t}\,dt + o(1) \quad \text{при} \quad A \to +\infty. \tag{1}$$

Таким образом, поведение интегралов $I_A(f,x)$ при $A \to +\infty$ определяется лишь значениями функции f, которые она принимает вблизи точки x. Говоря иными словами, для интегралов Фурье справедлив тот же принцип локализации, что и для рядов Фурье. Более того, несложно доказывается равносходимость разложений в ряд и интеграл Фурье. Точнее, справедлива следующая

Теорема. *Если функции $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ и $f_0 \in \widetilde{\mathscr{L}}$ совпадают в некоторой окрестности точки x, то в этой точке сходимость интеграла Фурье функции f равносильна сходимости ряда Фурье функции f_0, и в случае сходимости справедливо равенство*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\,e^{ixy}dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_0}(n)\,e^{inx}.$$

Из теоремы, очевидно, следует, что на интегралы Фурье переносится признак Дини сходимости рядов Фурье. Поэтому, если функция $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ всюду непрерывна и в каждой точке удовлетворяет условию Дини (например, у неё есть конечные односторонние производные), то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\,e^{ixy}dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_0}(n)\,e^{inx} = f_0(x) = f(x).$$

Таким образом, при указанных условиях справедлива формула обращения преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\,e^{-iyx}dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Римана – Лебега $\widehat{f}(y) \to 0$ при $y \to \pm\infty$. Поэтому разность между частичными интегралами $I_A(f,x)$ и $I_{[A]}(f,x)$ бесконечно мала при $A \to +\infty$ (здесь, как обычно, $[A]$ — целая часть числа A). Отсюда следует, что при нахождении предела этих интегралов можно ограничиться рассмотрением последовательности $I_n(f,x)$ $(n \in \mathbb{N})$. Таким образом, нам нужно проверить соотношение

$$I_n(f,x) - S_n(f_0,x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Пусть $f(x-t) = f_0(x-t)$ при $|t| < \delta$, где $0 < \delta < \pi$. Тогда согласно равенству (1)

$$I_n(f,x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,\frac{\sin nt}{\pi t}\,dt + o(1) = \int_{-\delta}^{\delta} f_0(x-t)\,\frac{\sin nt}{\pi t}\,dt + o(1). \tag{2}$$

В то же время, так как $\sin\bigl(n+\frac{1}{2}\bigr)t = \sin nt\cos\frac{t}{2} + \cos nt\sin\frac{t}{2}$, то

$$S_n(f_0,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x-t)\,\frac{\sin\bigl(n+\frac{1}{2}\bigr)t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x-t)\Bigl(\frac{\sin nt}{2\pi\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + \frac{1}{2\pi}\cos nt\Bigr)dt.$$

По теореме Римана – Лебега второе слагаемое даёт бесконечно малый вклад в интеграл:

$$S_n(f_0,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x-t)\frac{\sin nt}{2\pi\operatorname{tg}\frac{t}{2}}dt + o(1).$$

Легко видеть, что $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{t}{2}} = \frac{2}{t} + \varphi(t)$, где φ — непрерывная ($\varphi(0)=0$) и поэтому суммируемая функция. По теореме Римана – Лебега её вклад в интеграл также бесконечно мал:

$$S_n(f_0,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x-t)\frac{\sin nt}{\pi t}\,dt + o(1).$$

Наконец, заменив промежуток интегрирования меньшим промежутком $(-\delta,\delta)$, мы изменим интеграл на бесконечно малую величину (по той же теореме Римана – Лебега) и получим, что

$$S_n(f_0,x) = \int_{-\delta}^{\delta} f_0(x-t)\frac{\sin nt}{\pi t}\,dt + o(1).$$

Учитывая (2), мы приходим к требуемому соотношению $I_n(f,x) - S_n(f_0,x) = o(1)$. ▶

Обратимся ещё раз к примеру 3, рассмотренному в п. 5.1.

Пример. Функция $f(x) = e^{-|x|}$ ($x \in \mathbb{R}$) в каждой точке (в том числе и в нуле) удовлетворяет условию Дини. Её преобразование Фурье вычислено в примере 3 п. 5.1. Согласно формуле обращения

$$e^{-|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(y)\,e^{iyx}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{iyx}}{1+y^2}\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos xy}{1+y^2}\,dy.$$

Таким образом, мы получаем значение интеграла Лапласа

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos xy}{1+y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}\,e^{-|x|}.$$

В заключение сформулируем многомерный вариант формулы обращения.

Теорема. *Если непрерывная и суммируемая на $\mathbb{R}^m$ функция f такова, что её преобразование Фурье также суммируемо, то в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{f}(y)\,e^{i\langle y,x\rangle}dy.$$

От непрерывности функции можно отказаться, но тогда формула обращения будет верна лишь почти везде. Доказательство этой теоремы можно прочитать в книге Макарова и Подкорытова (см. теорему на стр. 543).