Продолжение меры (существование и свойства)

Б.М.Макаров, А.Н.Подкорытов

Это пособие представляет собой непосрендственное продолжение параграфов 1-3 главы I книги Б.М.Макаров, А.Н.Подкорытов "Лекции по вещественному анализу". Ссылки в тексте даются на пункты этих параграфов (ссылка на пункт $a.b$ означает ссылку на пункт b параграфа a).

§ 1. Предварительные замечания

Рассмотрев свойства, характеризующие меру, мы, однако, не можем сейчас предъявить ни одного нетривиального примера меры (кроме считающей), заданной на σ-алгебре.

Причина этого в том, что пока мы умеем определять меры лишь на "бедных" системах множеств, каковыми являются многие полукольца. На таких системах множеств нам удаётся, благодаря их обозримости, сравнительно просто определять объёмы (см. примеры 1–3 в п. 2.2). Задавать меру на более обширных системах множеств, например, на σ-алгебрах, мы, за исключением нескольких достаточно тривиальных случаев, пока не умеем. Такое положение вещей безусловно не может считаться удовлетворительным.

В самом деле, даже зная, что определённый на полукольце ячеек классический объём в m-мерном пространстве счётно аддитивен (это будет доказано позже), мы, конечно, не можем считать задачу построения меры в $\mathbb{R}^m$ сколько-нибудь полно решённой. Ведь весьма сомнительна ценность меры в евклидовом пространстве, с помощью которой нельзя было бы "измерять" пирамиды, шары и тому подобные важнейшие тела, а мы пока находимся именно в таком положении. То обстоятельство, которое позволяло в рассмотренных случаях сравнительно просто определять на полукольцах объёмы — обозримость полуколец, малое разнообразие входящих в них множеств — оборачивается теперь своей отрицательной стороной, и нам необходимо научиться строить меры на более богатых системах множеств. Задача эта трудна, даже если мы ограничим себя σ-алгеброй борелевских подмножеств прямой и попытаемся приписать им длину (более формально говоря — попытаемся продолжить на эту σ-алгебру одномерный классический объём). Собственно, с решения Лебегом*)

*) Анри Леон **Лебег** (Lebesgue), 1875–1941, — французский математик.

в 1902 году этой проблемы и началась теория меры. Вызванный потребностями различных разделов математики, этот результат стал важнейшим прорывом в теории интегрирования.

Продолжение длины (одномерного классического объёма) до меры, определённой на σ-алгебре подмножеств вещественной прямой, было осуществлено Лебегом на основе наглядных геометрических соображений. Оно распадается на несколько шагов. Сначала он приписывает меру $m(G)$ открытым подмножествам G вещественной прямой, полагая её равной сумме длин составляющих интервалов. Затем Лебег вводит величину, названную им внешней мерой, определяя её для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}$ с помощью равенства

$$m_e(E) = \inf\{\, m(G) \,|\, G \supset E,\ G - \text{ открытое множество}\}.$$

Внутренней мерой $m_i(E)$ ограниченного множества E называется величина

$$m_i(E) = m(\Delta) - m_e(\Delta \setminus E),$$

где Δ — произвольный интервал, содержащий E. Ограниченное множество называется измеримым, если его внешняя и внутренняя меры совпадают. Общее значение внешней и внутренней мер объявляется мерой измеримого множества. После этого проводится проверка того, что система измеримых множеств, содержащихся в фиксированном промежутке, есть σ-алгебра, а функция множества, названная мерой, обладает свойством счётной аддитивности.

Таким образом, путь, по которому мы идём при построении продолжения меры, не совсем прямой. Он содержит важнейший промежуточный этап — построение внешней меры. Мы, так сказать, "перепрыгиваем пропасть в два прыжка". Детальное осуществление этой программы (проведённое в несколько модифицированном виде, например, в книге "Теория функций вещественной переменной" И.П.Натансона) достаточно непросто.

При определённых преимуществах (в первую очередь это наглядность построения) такой подход к продолжению меры имеет и теневые стороны. Разумеется, так как каждое открытое подмножество евклидова пространства есть объединение последовательности ячеек, то ясна аналогия, которой следует руководствоваться, чтобы продолжить меру с полукольца ячеек. Однако остаётся неясным, как нужно действовать, чтобы продолжить меру, определённую на каком-то полукольце подмножеств основного множества произвольной природы, если в нём нет топологии и, следовательно, невозможно говорить об открытых множествах. Этот вопрос тем более актуален, что при аксиоматизации теории вероятностей в рамках теории меры в роли основного множества выступает множество "элементарных событий", которое по существу дела вовсе не обязано быть топологическим пространством.

В дальнейшем, главным образом благодаря результатам Каратеодори*), было выяснено, что в конструкции Лебега решающую роль играют два обстоятельства. Во-первых, это счётная полуаддитивность внешней меры, а во-вторых — возможность строить внешнюю меру, не используя открытые множества, т. е. не опираясь на топологию. Для этого надо только (учитывая, что открытое множество есть объединение последовательности ячеек) истолковать использованное в одномерной ситуации включение $E \subset G$ как возможность покрыть множество E последовательностью множеств из полукольца. Это соображение позволяет строить внешнюю меру по любой мере, независимо от того, топологизировано основное множество или нет.

§ 2. Внешние меры

Метод, предложенный Каратеодори, показывает, что при построении продолжения меры полезно, особенно в техническом отношении, не ограничиваться лишь аддитивными функциями, а рассматривать как самостоятельный объект счётно-полуаддитивные функции, определённые на всех подмножествах основного множества. Именно такие функции и называются теперь внешними мерами. Приведем точное определение.

Определение. Пусть $\mathfrak{A}(X)$ — σ-алгебра всех подмножеств основного множества X. *Внешней мерой в* X называется такая функция $\nu : \mathfrak{A}(X) \to [0, +\infty]$, что

I. $\nu(\varnothing) = 0$ и

II. $\nu(A) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$, если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Свойство II называется *счётной полуаддитивностью.*

Отметим два простых свойства внешней меры.

1) Внешняя мера *конечно полуаддитивна,* т. е.

из включения $A \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$ *следует, что* $\nu(A) \leqslant \nu(A_1) + \ldots + \nu(A_N)$.

---

*) Константин **Каратеодори** (Carathéodory), 1873–1950, — немецкий математик.

Это свойство немедленно получается из счётной полуаддитивности, если считать, что при $n > N$ все множества A_n пусты. ▶

2) Внешняя мера *монотонна,* т. е.

из включения $A \subset B$ *следует неравенство* $\nu(A) \leqslant \nu(B)$.

Это частный случай свойства 1 при $N = 1$.

Мы не будем рассматривать внешние меры в полной общности и ограничимся лишь теми из них, которые используются при продолжения меры. Такие внешние меры строятся следующим образом.

Определение. Пусть μ_0 — мера, определенная на полукольце $\mathcal{P}$ подмножеств множества X. На σ-алгебре всех подмножеств множества X определим функцию μ^*, положив для произвольного множества $E \subset X$

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k \geqslant 1} \mu_0(P_k) \,|\, E \subset \bigcup_{k \geqslant 1} P_k,\ P_k \in \mathcal{P} \ \text{ для всех } k \geqslant 1 \right\} \quad (*)$$

(если в полукольце $\mathcal{P}$ не существует последовательности множеств P_k, объединение которых содержало бы E, то мы считаем, что $\mu^*(E) = +\infty$).

Заметим, что при определении μ^* вместо последовательности $\{P_k\}_{k \geqslant 1}$ можно рассматривать любое счетное семейство $\{P_\omega\}_{\omega \in \Omega}$, поскольку счетное семейство можно занумеровать, а сумма $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_{\omega_j})$ одна и та же при любой нумерации множества Ω (перестановочное свойство положительных рядов).

Теорема. *Функция* μ^* — *внешняя мера, продолжающая меру* μ_0. *Последнее означает, что на полукольце* $\mathcal{P}$ *функции* μ *и* μ^* *совпадают: если* $P \in \mathcal{P}$, *то* $\mu^*(P) = \mu_0(P)$.

Мы будем называть μ^* внешней мерой, *порожденной* мерой μ_0.

Доказательство. Пусть $E \in \mathcal{P}$. Тогда в качестве покрытия этого множества элементами полукольца $\mathcal{P}$ можно взять последовательность $E, \varnothing, \varnothing, \ldots$ Поэтому $\mu^*(E) \leqslant \mu_0(E)$. Вместе с тем, если $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$, где $P_j \in \mathcal{P}$ при всех $j \in \mathbb{N}$, то $\mu_0(E) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j)$ в силу счётной полуаддитивности меры (теорема 3.2). Ввиду произвольности последовательности $\{P_j\}_{j\geqslant 1}$ отсюда следует, что $\mu_0(E) \leqslant \mu^*(E)$. Таким образом, $\mu^*(E) = \mu_0(E)$; в частности, $\mu^*(\varnothing) = 0$.

Осталось проверить счётную полуаддитивность μ^*, т. е. справедливость неравенства

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

в случае, когда $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. При этом можно считать, что правая часть неравенства конечна, так как иначе оно тривиально. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и при каждом n найдём такие множества $P_j^{(n)}$ из $\mathcal{P}$ $(j \in \mathbb{N})$, что

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\big(P_j^{(n)}\big) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

В этом случае

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)}.$$

Поэтому по определению $\mu^*(E)$

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\big(P_j^{(n)}\big) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует счётная полуаддитивность μ^*. ▶

§ 3. Существование продолжения

Следующее определение связано с желанием указать σ-алгебру множеств, на которую продолжалась бы всякая мера, заданная на полукольце.

Определение. Пусть μ_0 — мера, определенная на полукольце $\mathcal{P}$ подмножеств множества X. Множество $e \subset X$ называется *нуль-множеством*, если $\mu^*(e) = 0$, т.е. если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую последовательность множеств $P_1, P_2, \ldots$, принадлежащих полукольцу $\mathcal{P}$, что

$$e \subset \bigcup_n P_n \quad \text{и} \quad \sum_n \mu_0(P_n) < \varepsilon.$$

Систему всех нуль-множеств будем обозначать символом $\mathcal{N}$, а борелевскую оболочку системы $\mathcal{P} \cup \mathcal{N}$, т.е. минимальную σ-алгебру, содержащую как $\mathcal{P}$, так и $\mathcal{N}$, будем называть *стандартной оболочкой* полукольца $\mathcal{P}$ и обозначать символом $\mathfrak{A}(\mathcal{P}, \mu_0)$. Подчеркнем, что в отличие от борелевской оболочки стандартная оболочка зависит не только от полукольца $\mathcal{P}$, но и от меры μ_0, поскольку от нее зависит система нуль-множеств.

Следующее утверждение содержит главный результат, относящийся к продолжению меры. Оказывается, что порожденная мерой μ_0 внешняя мера μ^*, не будучи, как правило, аддитивной на σ-алгебре всех подмножеств основного множества, тем не менее аддитивна (а следовательно и счетно аддитивна) на весьма значительной части этой σ-алгебры.

Теорема. *Сужение внешней меры μ^* на стандартную оболочку полукольца $\mathcal{P}$ есть мера, продолжающая меру μ_0.*

Эту меру мы будем называть *стандартным продолжением* меры μ_0.

Приведенную терему мы оставим без доказательства. Основная его часть состоит в весьма сложной проверке того, что сужение μ^* на стандартную оболочку есть аддитивная функция, т.е. объем. Если это доказано, то очевидно, что этот объем есть мера, так как он счетно полуаддитивен, будучи сужением внешней меры. Наконец, эта мера является продолжением μ_0, поскольку, как мы доказали в теореме § 2, этим свойство обладает внешняя мера μ^*.

Так как борелевская оболочка полукольца содержится в его стандартной оболочке, то из приведенной теоремы вытекает

Следствие. *Всякая мера, определенная на полукольце, может быть продолжена на борелевскую оболочку этого полукольца.*

§ 4. Единственность стандартного продолжения

Напомним введенные обозначения, которых будем придерживаться в дальнейшем. Буква μ обозначает стандартное продолжение меры

μ_0, определённой на полукольце $\mathcal{P}$; μ^* — внешняя мера, порождённая μ_0. Стандартная оболочка полукольца $\mathcal{P}$ — область определения меры μ — обозначается буквой $\mathfrak{A}$. Входящие в нее множества будем называть измеримыми.

Напомним, что, как вытекает из определения внешней меры μ^* (см. равенство $(*)$), мера μ измеримого множества A вычисляется по формуле

$$\mu(A) = \inf \left\{ \sum_{k \geqslant 1} \mu_0(P_k) \,|\, A \subset \bigcup_{k \geqslant 1} P_k, \quad P_k \in \mathcal{P} \;\text{ для всех }\; k \geqslant 1 \right\}.$$

Главный вопрос, интересующий нас в этом параграфе — существуют ли продолжения меры μ_0, отличные от стандартного. Более точно говоря, мы должны выяснить, существуют ли, кроме стандартного, иные продолжения μ_0 на всю алгебру $\mathfrak{A}$ или на какие-то её части, например, на борелевскую оболочку полукольца $\mathcal{P}$.

Вопрос о том, возможно ли продолжение меры на σ-алгебру, более широкую, чем стандартная оболочка, мы оставим в стороне. Можно доказать, что дальнейшее продолжение меры μ, как правило, возможно. Однако оно не мотивировано не только потребностями приложений, но и запросами "чистой" математики. Обычно σ-алгебра $\mathfrak{A}$ столь обширна, что потребность в её расширении не возникает.

Совсем другой характер имеет вопрос, который был поставлен вначале, и значение ответа на него трудно переоценить. Принципиально важно знать, единственно ли продолжение исходной меры хотя бы на минимальную σ-алгебру, порождённую полукольцом $\mathcal{P}$. Как мы покажем, в широком классе случаев, в частности, для всех конечных мер, ответ на этот вопрос утвердительный. Существование "нестандартных" продолжений следует рассматривать как некоторую патологию, возникающую как правило в искусственных ситуациях, которые мы будем встречать только в отдельных контрпримерах.

Единственность продолжения может быть получена, если ограничиться σ-конечными мерами. Напомним (см. п. 2.2.), что объём (и, в частности, мера) называется *σ-конечным*, если основное множество X представимо в виде объединения последовательности множеств, объёмы которых конечны.

Очевидно, мера и её стандартное продолжение σ-конечны или нет одновременно.

Теорема (О ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ МЕРЫ). *Пусть μ — стандартное продолжение σ-конечной меры μ_0, определённой на полукольце $\mathcal{P}$, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра измеримых множеств (стандартная оболочка полукольца $\mathcal{P}$), и пусть ν — мера, продолжающая μ_0 на некоторую алгебру $\mathfrak{A}'$, содержащую $\mathcal{P}$. Тогда меры μ и ν совпадают на пересечении $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$.*

В частности, σ-конечная мера единственным образом продолжается с полукольца $\mathcal{P}$ на его борелевскую и стандартную оболочки.

Доказательство. Ввиду σ-конечности меры μ_0 множество A имеет счётное покрытие $\{P_j\}_{j\geqslant 1}$ элементами полукольца $\mathcal{P}$. Тогда

$$\nu(A) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \nu(P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j).$$

Так как это неравенство справедливо для любого покрытия, то $\nu(A) \leqslant \mu(A)$.

Отсюда следует, что $\nu(P \cap A) = \mu(P \cap A)$, если $P \in \mathcal{P}$ и $\mu(P) < +\infty$. Действительно, в противном случае $\nu(P \cap A) < \mu(P \cap A)$, что ведёт к противоречию:

$$\mu(P) = \nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) < \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu(P).$$

По условию теоремы множество A можно покрыть элементами P_j полукольца $\mathcal{P}$, имеющими конечную меру. По теореме 1.4 мы можем считать их попарно не пересекающимися. Тогда

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap P_j) = \mu(A),$$

что доказывает теорему. ▶

Несложные примеры показывают, что предположение о σ-конечности меры существенно. В самом деле, пусть множество X состоит из двух точек a и b, полукольцо $\mathcal{P}$ — из пустого множества и одноточечного множества $\{a\}$, мера μ_0 тождественно равна нулю, а μ — стандартное продолжение μ_0. Тогда по определению стандартного продолжения мы получим, что $\mu(X) = \mu\big(\{b\}\big) = +\infty$. Вместе с тем очевидно, что мера μ_0 допускает и другое — тождественно равное нулю — продолжение. В рассматриваемой ситуации теорема 5.1 не применима, поскольку мера μ_0 не σ-конечна (множество X не представимо в виде счётного объединения множеств, входящих в полукольцо).

Другой пример, показывающий, что продолжение не σ-конечной меры не всегда единственно, можно получить с помощью дискретной меры, порождённой суммируемым семейством нагрузок (см. упр. 4).

§ 5. Полные меры

Отметим одно существенное свойство, которым обладает стандартное продолжение любой меры. Для этого введем еще одно определение.

Определение. Мера μ, заданная на полукольце $\mathcal{P}$, называется *полной*, если из условий $E \in \mathcal{P}$, $\mu(E) = 0$ вытекает, что любое содержащееся в E подмножество $\widetilde{E}$ также принадлежит $\mathcal{P}$ (и, следовательно, $\mu(\widetilde{E}) = 0$).

Используя это определение, мы можем дополнить теорему о существовании продолжения, сказав, что

стандартное продолжение есть полная мера.

В самом деле, если μ — стандартное продолжение меры μ_0 и $\mu(E) = 0$, а $\widetilde{E} \subset E$, то в силу монотонности внешней меры мы имеем, что $\mu^*(\widetilde{E}) \leqslant \mu^*(E) = \mu(E) = 0$. Таким образом, $\widetilde{E}$ — нуль-множество, и следовательно, оно входит в стандартную оболочку полукольца, т.е. в область определения меры μ.

Приведём удобный критерий измеримости множества, справедливый не только для стандартного продолжения, но и для любой полной меры.

Лемма. *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — произвольное пространство с полной мерой, $E \subset X$. Если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие измеримые множества A_ε и B_ε, что $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, то множество E измеримо.*

В частности, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое измеримое множество E_ε, что $E \subset E_\varepsilon$ и $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, то множество E измеримо (и $\mu(E) = 0$).

Доказательство. Придавая ε значения $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \dots)$, рассмотрим множества $A_{1/n}$ и $B_{1/n}$. Тогда множества $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$,

$B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$ измеримы и $A \subset E \subset B$. Кроме того, $\mu(B \setminus A) = 0$, так как $\mu(B \setminus A) \leqslant \mu(B_{1/n} \setminus A_{1/n}) < \frac{1}{n}$ при любом n. Таким образом, множество $E \setminus A$ содержится в множестве $B \setminus A$ нулевой меры и, следовательно, измеримо в силу полноты меры. Вместе с ним измеримо и множество $E = A \cup (E \setminus A)$. ▶

§ **6.** Минимальность стандартного продолжения

Стандартная оболочка полукольца представляет собой, как правило, очень обильную σ-алгебру, и естественно возникает вопрос о том, не целесообразно ли при продолжением исходной меры ограничиться лишь некоторой ее частью. Оказывается, однако, что если стремиться при продолжении получить удобную в ряде отношений полную меру, то стандартное продолжение σ-конечной меры наиболее "экономно", и стандартная оболочка полукольца — минимальная σ-алгебра, на которой может быть задана полная мера, продолжающая данную. Докажем, что это в самом деле так.

Теорема. *Пусть μ — стандартное продолжение σ-конечной меры μ_0, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра измеримых множеств. Если μ' — некоторая полная мера, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{A}'$ и продолжающая μ_0, то $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.*

Доказательство. Проверим, что если $\mu(e) = 0$, то $e \in \mathfrak{A}'$. Действительно, поскольку e — нуль-множество, то согласно определению внешней меры (см. равенство (*)) для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества P_k $(k = 1, 2, \dots)$ из $\mathcal{P}$, что

$$e \subset \bigcup_k P_k, \quad \sum_k \mu(P_k) < \varepsilon.$$

Положим $E_\varepsilon = \bigcup_k P_k$. Так как $\mathcal{P} \subset \mathfrak{A}'$, то $E_\varepsilon \in \mathfrak{A}'$. Кроме того, $e \subset E_\varepsilon$ и

$$\mu'(E_\varepsilon) \leqslant \sum_k \mu'(P_k) = \sum_k \mu(P_k) < \varepsilon.$$

Так как мера μ' — полная, то ввиду произвольности ε это означает согласно доказанной выше лемме, что $e \in \mathfrak{A}'$. Таким образом, σ-алгебра $\mathfrak{A}'$ содержит как полукольцо $\mathcal{P}$, так и систему $\mathcal{N}$ всех нуль-множеств. Поэтому $\mathfrak{A}'$ содержит и борелевскую оболочку их объединения, т.е. σ-алгебру $\mathfrak{A}$. ▶

§ **7.** Аппроксимация измеримых множеств

Остановимся в заключение на вопросе об аппроксимации измеримых множеств, возникающих при стандартном продолжении. Для этого удобно ввести некоторые новые термины.

Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — произвольная система подмножеств основного множества. Множество H мы будем называть множеством *типа* $\mathcal{E}_\sigma$ (*типа* $\mathcal{E}_\delta$), если $H = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$ (соответственно $H = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n$), где $A_n \in \mathcal{E}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Множества типа $(\mathcal{E}_\sigma)_\delta$, т. е. множества, представимые в виде $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} H_n$, где H_n — множества типа $\mathcal{E}_\sigma$ при всех $n \in \mathbb{N}$, мы будем называть множествами *типа* $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$. Аналогично могут быть определены множества типа $\mathcal{E}_{\delta\sigma}$, $\mathcal{E}_{\sigma\delta\sigma}$ и.т.д.

Очевидно, как множества типа $\mathcal{E}_\sigma$ и $\mathcal{E}_\delta$, так и множества типа $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$, принадлежат σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$ — борелевской оболочке системы $\mathcal{E}$.

Теорема. *Пусть μ — стандартное продолжение меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$. Если $\mu^*(E) < +\infty$, то существует такое множество C типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$, что*
$$E \subset C \quad \text{\textit{и}} \quad \mu^*(E) = \mu(C).$$

Доказательство. По определению μ^* для каждого натурального n найдутся такие множества $P_j^{(n)} \in \mathcal{P}$ $(j \in \mathbb{N})$, что

$$\bigcup_{j\geqslant 1} P_j^{(n)} \supset E, \quad \sum_{j\geqslant 1} \mu\big(P_j^{(n)}\big) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Положим $C_n = \bigcup\limits_{j\geqslant 1} P_j^{(n)}$. Ясно, что
$$E \subset C_n \in \mathcal{P}_\sigma, \qquad \mu^*(E) \leqslant \mu(C_n) \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \mu\big(P_j^{(n)}\big) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}$$

при любом $n \in \mathbb{N}$. Поэтому множество $C = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} C_n$ будет, очевидно, искомым. ▶

Теперь мы можем доказать, что всякое измеримое множество конечной меры с точностью до множеств меры нуль аппроксимируется изнутри и снаружи множествами из $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$.

Следствие. *Пусть A — измеримое множество конечной меры. Тогда найдутся такие множества B и C из $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$, что*

$$B \subset A \subset C \quad \text{\textit{и}} \quad \mu(C \setminus B) = 0.$$

В частности, $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$.

Доказательство. Пусть C — множество, построенное в теореме. Положим $e = C \setminus A$. По доказанному найдётся такое содержащее e множество $\widetilde{e}$ из $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$, что $\mu(\widetilde{e}) = 0$. Как читатель легко проверит самостоятельно, множество $B = C \setminus \widetilde{e}$ обладает всеми требуемыми свойствами. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

1) Определим на подмножествах множества $X = \{1, 2, 3\}$ функцию ν следующим образом:

$$\nu(\varnothing) = 0,\ \nu(X) = 2,\ \nu(E) = 1 \ \text{ в остальных случаях.}$$

Убедитесь, что ν — внешняя мера, и выясните, в каких случаях справедливо равенство $\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B)$.

2) Пусть $\mathcal{E}$ — произвольная система множеств, содержащая $\varnothing$, и пусть $\alpha\colon \mathcal{E} \to [0, +\infty]$ — произвольная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию $\alpha(\varnothing) = 0$. Положим

$$\nu(E) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(E_j) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j,\ E_j \in \mathcal{E} \ \text{ при всех } \ j \in \mathbb{N} \right\}$$

(в случае, когда E не может быть покрыто последовательностью множеств из $\mathcal{E}$, мы считаем, что $\nu(E) = +\infty$). Докажите, что ν — внешняя мера и что она продолжает α тогда и только тогда, когда функция α счётно полуаддитивна.

3) Для произвольного подмножества E вещественной прямой положим $\alpha(E) = \big(\mathrm{diam}(E)\big)^2$ (мы считаем, что $\mathrm{diam}(\varnothing) = 0$). Является ли эта функция внешней мерой? Какова внешняя мера, порождаемая функцией α по схеме из упр. 2?

4) Пусть X и $\mathcal{P}$ те же, что в примере § 6, т. е. $X = \{a,\ b\}$ — двухточечное множество, $\mathcal{P} = \{\varnothing,\ \{a\}\}$, и пусть μ_0 — произвольная конечная мера на $\mathcal{P}$. Убедитесь, что при любом α, $(0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty)$ равенства

$$\nu_\alpha(\varnothing) = 0, \quad \nu_\alpha\big(\{a\}\big) = \mu_0\big(\{a\}\big), \quad \nu_\alpha\big(\{b\}\big) = \alpha, \quad \nu_\alpha(X) = \alpha + \mu_0\big(\{a\}\big)$$

определяют меру ν_α, продолжающую μ_0 на алгебру всех подмножеств X. Какая из мер ν_α будет стандартным продолжением μ_0?

Как объяснить, что (конечные!) меры ν_1 и ν_2, совпадая на $\mathcal{P}$, не совпадают на $\mathfrak{B}(\mathcal{P})$?

В следующих упражнениях μ — стандартное продолжение меры μ_0 с полукольца $\mathcal{P}$ на σ-алгебру измеримых множеств $\mathfrak{A}$.

5) Докажите, что если μ_0 — σ-конечная мера, то условие $\mu(A) < +\infty$ в следствии § 7 может быть опущено. При этом множество C по-прежнему можно считать множеством типа $\mathcal{P}_{\sigma\delta}$.

6) Рассмотрим дискретную меру ν, порождённую суммируемым семейством нагрузок на несчётном множестве X. Пусть μ_0 — её сужение на полукольцо не более чем счётных подмножеств. Докажите, что стандартное продолжение меры μ_0 задано, как и ν, на σ-алгебре всех подмножеств множества X, но в отличие от ν бесконечно на всех несчётных множествах.

7) Пусть мера μ_0 принимает лишь конечные значения. Для $A \in \mathfrak{A}$ положим

$$\widetilde{\mu}(A) = \sup\{\mu(B) \,|\, B \subset A,\ B \in \mathfrak{A},\ \mu(B) < +\infty\}.$$

Докажите, что $\widetilde{\mu}$ есть мера, продолжающая μ_0, и что это продолжение минимально в том смысле, что $\widetilde{\mu} \leqslant \nu$ для всякого продолжения ν меры μ_0 на $\mathfrak{A}$.

Используя упр. 4, приведите пример меры, продолжающей μ_0, но не совпадающей с μ и $\widetilde{\mu}$.

8) Докажите, что стандартное продолжение σ-конечной полной меры, заданной на σ-алгебре, есть она сама.