Функция гамма

Б.М.Макаров.

0. В справедливости следующей леммы читатель убедится самостоятельно.

Лемма. *Интеграл* $\int_0^\infty t^{x-1}|\ln t|^a e^{-t}\,dt$ *конечен при любых* $a>0,\ x>0$.

1. Напомним, что при $x>0$ функция Γ определяется равенством

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt. \tag{1}$$

Читателю следует самостоятельно проверить, что в окрестности любой точки $x_0>0$ производная f'_x подынтегральной функции $f(t,x)=t^{x-1}e^{-t}$ удовлетворяет условию (L_{loc}) (используйте лемму при $a=1$). Поэтому согласно теореме о дифференцировании по параметру функция Γ дифференцируема на полуоси $(0,+\infty)$, и по правилу Лейбница

$$\Gamma'(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln t\,dt \qquad (x>0).$$

Аналогично устанавливается существование у функции Γ производных любого порядка, а также формула для их вычисления. Поэтому Γ функция класса $C^\infty\big((0,+\infty)\big)$. В частности, $\Gamma''(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln^2 t\,dt>0$, откуда следует, что производная функции Γ строго возрастает.

Интегрируя по частям, легко убедиться, что функция Γ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x) \qquad \text{при} \ \ x>0. \tag{2}$$

Вычислим Γ при натуральных значениях аргумента. Очевидно, $\Gamma(1)=1$. С помощью равенства (2) и индукции получаем, что $\Gamma(n+1)=n!$ при любом $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, функция Γ есть продолжение на положительную полуось функции $n!$, связанной, как кажется на первый взгляд, исключительно с натуральными числами.

Заменой переменной $t=u^2$ интеграл $\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt=\Gamma(\frac12)$ сводится к интегралу Эйлера–Пуассона $I=\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\,du$, который, как неоднократно был установлено в лекциях, равен $\sqrt{\pi}$. Таким образом, $\Gamma(\frac12)=I=\sqrt{\pi}$. Опираясь на этот результат и функциональное уравнение (2), можно найти значения Γ в полуцелых точках:

$$\Gamma\Big(n+\frac12\Big)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Равенство (2) позволяет выяснить поведение функции Γ около нуля:

$$\Gamma(x)=\frac1x\Gamma(x+1)\sim\frac1x \quad \text{при} \ \ x\to+0.$$

При больших x значения $\Gamma(x)$ очень велики, так как

$$\Gamma(1+x)=\int_0^\infty t^x\,e^{-t}dt\geqslant\int_x^\infty t^x e^{-t}dt\geqslant x^x\int_x^\infty e^{-t}\,dt=\Big(\frac{x}{e}\Big)^x.$$

Эта простая оценка довольно хорошо описывает рост Γ на бесконечности (сравните с формулой Стирлинга об асимптотике $n!$). Простейшее обобщение этой формулы для Γ состоит в том, что $\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}$ при $x \to +\infty$, но мы не будем заниматься доказательством этого результата.

Функциональное уравнение (2) подсказывает, как естественным образом продолжить функцию Γ на отрицательную полуось. Действительно, правая часть равенства $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ имеет смысл при всех x из $(-1,0)$, и мы примем его за определение функции Γ на этом интервале. Тогда её значения на нём отрицательны, причём односторонние пределы в точках 0 и -1 бесконечны. Определив Γ на $(-1,0)$, можно, снова исходя из равенства (2), определить её на интервале $(-2,-1)$. Продолжая действовать подобным образом, мы определим $\Gamma(x)$ для всех $x < 0$, кроме точек $-1,\ -2,\ \ldots$. При этом $(-1)^n\Gamma(x) > 0$, если $x \in (-n, -n+1)$, и $|\Gamma(x)| \underset{x\to -n}{\longrightarrow} +\infty$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots\ )$. Ясно, что теперь равенство (2) можно обобщить:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}. \tag{2'}$$

Заметим, что так как $\Gamma(2) = 1 = \Gamma(1)$, то по теореме Ролля в интервале $(1,2)$ находится критическая точка c функции Γ $(c = 1{,}46...)$ (единственная на $(0,+\infty)$ в силу возрастания производной при $x > 0$). Производная функции Γ отрицательна в интервале $(0,c)$ и положительна в (c,∞). Поэтому в этих интервалах функция Γ строго убывает и строго возрастает, в силу чего она достигает в точке c наименьшего значения на $(0,+\infty)$.

Кроме того, как можно доказать, по одной критической точке функции Γ содержится в каждом из интервалов $(-n,-n+1)$ при $n \in \mathbb{N}$. Установленные свойства функции Γ позволяют нарисовать эскиз её графика (см. рис. 12 в книге "Лекции по вещественному анализу", стр. 285).

Заменяя в равенстве (1) x комплексным числом z (и понимая t^{z-1} как $e^{(z-1)\ln t}$), мы видим, что оно позволяет определить Γ не только при вещественных $x > 0$, но и для комплексных чисел z при условии, что $\mathcal{R}e(z) > 0$, т. е. в правой половине комплексной плоскости. При этом тождество $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ сохранится. Его можно использовать для определения Γ на всей комплексной плоскости за исключением точек $0, -1, -2, \ldots$ совершенно аналогично тому, как мы определили Γ на полуоси $(-\infty, 0)$. Мы, однако, ограничимся изучением функции Γ лишь на вещественной оси.

2. Установим связь между функцией гамма и (введенной также Эйлером) функцией бета (обозначение: B), которая, как и гамма, определяется как интеграл, зависящий от параметра следующим образом:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,$$

где $x > 0,\ y > 0$ (убедитесь что при других значениях x, y интеграл бесконечен). Функции B и Γ называются еще эйлеровыми интегралами первого и второго рода соответственно.

На связи между этими интегралами основаны разнообразные применения функции гамма. При выводе принадлежащей Эйлеру формулы, связывающей эти функции, мы будем опираться на теорему Тонелли. Формула Эйлера такова:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad \text{для любых} \quad x,\ y > 0. \tag{3}$$

Для доказательства запишем произведение $\Gamma(x)\Gamma(y)$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по t и сделаем во внутреннем интеграле замену переменной $s = u - t$:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\left(\int_0^\infty s^{y-1}e^{-s}ds\right)dt = \int_0^\infty t^{x-1}\left(\int_t^\infty (u-t)^{y-1}e^{-u}du\right)dt.$$

Получившийся повторный интеграл равен двойному интегралу по углу

$$C = \{(t,u)\,|\,0 < t < u\}.$$

Как легко убедиться, сечения множества C таковы:

$$C_t \equiv \{u\,:\,(t,u)\in C\} = (t,+\infty), \quad C^u \equiv \{t\,:\,(t,u)\in C\} = (0,u).$$

Поэтому, изменив порядок интегрирования, мы получим

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty\left(\int_0^u t^{x-1}(u-t)^{y-1}e^{-u}\,dt\right)du,$$

что после замены $t = uv$ приводит к равенству

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u}\left(\int_0^1 v^{x-1}(1-v)^{y-1}dv\right)du.$$

Осталось заметить, что внутренний интеграл равен $B(x,y)$.

3. Покажем, как с помощью функции Γ можно выразить площадь многомерной сферы.

Прежде всего отметим, что с помощью Γ можно выразить объем многомерного шара. Напомним, что объем m-мерного шара $B^m(R)$ радиуса R равен $\alpha_m R^m$, где символом α_m обозначается объем единичного шара. Как мы установили в III семестре, эти объемы таковы:

$$\alpha_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \qquad \alpha_{2k+1} = 2\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \quad \text{при всех} \;\; k = 1,2,\ldots$$

Зная значения Γ в целых и полуцелых точках, легко убедиться, что этот результат можно охватить единой формулой

$$\alpha_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} \qquad (m = 1,2,\ldots). \tag{4}$$

Используя это равенство, вычислим теперь площадь сферы $S_{m-1}(R)$ радиуса R в пространстве $\mathbb{R}^m$. Напомним, что площадь $(m-1)$-мерной поверхности обозначается символом σ_{m-1}. Для краткости величину $\sigma_{m-1}(S^{m-1}(1))$ (площадь единичной $(m-1)$-мерной сферы) будем обозначать символом s_{m-1}.

Теорема. $\sigma_{m-1}\big(S^{m-1}(R)\big) = m\,\alpha_m R^{m-1}$, т.е. $s_{m-1} = m\alpha_m = 2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}$.

Доказательство. Отождествим $\mathbb{R}^m$ с декартовым произведением $\mathbb{R}^{m-1}\times\mathbb{R}^1$ и будем рассматривать верхнюю половину сферы $S^{m-1}(R)$ как график Γ_f функции $x\mapsto f(x)=\sqrt{R^2-\|x\|^2}$, определенной в (открытом) $(m-1)$-мерном шаре $B^{m-1}(R)$ (здесь $x=(x_1,\dots,x_{m-1})\in B^{m-1}(R)$, $\|x\|^2=x_1^2+\dots+x_{m-1}^2$).

Поскольку верхняя и нижняя половины сферы имеют равные площади, а площадь сечения сферы плоскостью $x_m=0$ (площадь "экватора") равна нулю, справедливо равенство $\sigma_{m-1}(\Gamma_f)=\frac{1}{2}\sigma_{m-1}(S^{m-1}(R))$. Вектор $\widetilde{x}=(x_1,\dots,x_{m-1},x_m)\in S^{m-1}$ ортогонален плоскости, касающейся сферы в точке $\widetilde{x}$, так что $\frac{1}{R}\widetilde{x}$ — единичная нормаль, а ее последняя координата, равная $\frac{x_m}{R}$ — косинус угла θ_x, образуемого этой нормалью с осью x_m. Таким образом,

$$\cos\theta_x=\frac{x_m}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{R^2-\|x\|^2}.$$

Пользуясь формулой для вычисления площади графика, мы получаем:

$$\sigma_{m-1}\big(S^{m-1}(R)\big)=2\sigma_{m-1}(\Gamma_f)=2\int_{B^{m-1}(R)}\frac{dx}{\cos\theta_x}=2\int_{B^{m-1}(R)}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-\|x\|^2}}. \tag{5}$$

В последнем интеграле подынтегральная функция зависит лишь от нормы вектора, и согласно формуле о вычислении интеграла с помощью функции распределения (см. параграф 1 главы "Замена переменной") он может быть преобразован следующим образом:

$$\int_{B^{m-1}(R)}\frac{R\,dx}{\sqrt{R^2-\|x\|^2}}=(m-1)\alpha_{m-1}R\int_0^R\frac{t^{m-2}\,dt}{\sqrt{R^2-t^2}}.$$

Подставляя этот результат в (5) и преобразуя последний интеграл с помощью подстановок $t=Ru$ и $u=\sqrt{z}$, мы видим, что

$$\begin{aligned}\sigma_{m-1}\big(S^{m-1}(R)\big)&=2(m-1)\alpha_{m-1}R\int_0^R\frac{t^{m-2}\,dt}{\sqrt{R^2-t^2}}\\&=2(m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1}\int_0^1\frac{u^{m-2}\,du}{\sqrt{1-u^2}}=(m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1}\int_0^1\frac{z^{\frac{m-1}{2}-1}\,dz}{\sqrt{1-z}}\\&=(m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1}B\big(\frac{m-1}{2},\frac{1}{2}\big).\end{aligned}$$

Итак,

$$\sigma_{m-1}\big(S^{m-1}(R)\big)=(m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1}B\left(\frac{m-1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

и, следовательно, $s_{m-1}=(m-1)\alpha_{m-1}B\left(\frac{m-1}{2},\frac{1}{2}\right)$. Остается преобразовать правую часть этого равенства, используя последовательно формулы (3), (4) и (2):

$$\begin{aligned}s_{m-1}&=(m-1)\alpha_{m-1}B\left(\frac{m-1}{2},\frac{1}{2}\right)=(m-1)\frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma\big(\frac{m-1}{2}+1\big)}\frac{\Gamma\big(\frac{m-1}{2}\big)\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)}\\&=(m-1)\frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\frac{m-1}{2}\Gamma\big(\frac{m-1}{2}\big)}\frac{\Gamma\big(\frac{m-1}{2}\big)\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)}=2\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)}=m\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\frac{m}{2}\Gamma\big(\frac{m}{2}\big)}=m\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}=m\,\alpha_m,\end{aligned}$$

что и утверждается в теореме.

Следствие. Из доказанной теоремы вытекает, что

$$s_{m-1}R^{m-1} = (\alpha_m R^m)'.$$

Таким образом, площадь сферы есть производная объема шара. Этот результат еще раз подтверждает естественность принятого нами определения площади поверхности. Ведь представляется совершенно правдоподобным, что приращение объема шара при малом увеличении радиуса, т.е объем тонкого сферического слоя, заключенного между сферами радиусов R и $R + \Delta R$, "почти совпадает" с произведением ΔR и площади поверхности сферы.