Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математического анализа

Применение методов ТФКП к вычислению определенных интегралов

Методические указания

Громов А. Л., Дубова Т. П.

Санкт - Петербург, 2019

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является пособием для студентов, изучающих теорию функций комплексной переменной (в качестве отдельного предмета или в рамках курса математического анализа). Основная цель книги — продемонстрировать приложение этой теории к вычислению определенных интегралов.

Излагаемый материал разбит на две части. В первой главе обсуждаются понятия, необходимые для решения основной задачи: криволинейные интегралы, ряды Лорана, изолированные особые точки регулярных функций и вычеты в них. Вторая глава посвящена непосредственно нахождению определенных интегралов. Мы выделили шесть типов таких интегралов. Для каждого типа характерны определенные приемы вычисления интегралов, они описываются в параграфах 1 – 5. Мы не стремились дать максимально полную классификацию интегралов, которые можно посчитать комплексными методами. Наша цель состояла в том, чтобы обсудить сложные для понимания вопросы: выбор контура интегрирования, работу с точками разрыва функции на промежутке интегрирования, использование регулярных ветвей многозначных функций.

В последнем параграфе главы 2 собраны интегралы разных типов. Это сделано для того, чтобы читатель мог не только использовать описанную ранее технику, но также самостоятельно определять тип интегралов и пути их нахождения. Мы рекомендуем студентам использовать этот параграф в качестве «контрольной работы»: сначала попытаться решить задачи самостоятельно, и лишь потом читать решения.

Наше пособие является практическим руководством по решению задач, а не теоретическим курсом. В соответствии с этим принципом и построена структура книги. Материал излагается так, как это принято на семинарских занятиях: основной упор делается на решение задач, а теоретические сведения приводятся фрагментарно и лишь там, где они непосредственно используются. Как правило, теоремы в нашей книге не доказываются, а только формулируются. Исключение сделано лишь для утверждений, доказательство которых иллюстрирует методы, используемые при решении задач.

Читателя, который интересуется теорией, мы отсылаем к литературе, список которой приведен в конце пособия.

Книга имеет следующую структуру. Наиболее важная часть излагаемого материала — примеры, снабженные решением. Нумерация этих примеров ведется отдельно в каждом параграфе. В конце некоторых параграфов даются задачи для самостоятельной работы. Их номера имеют формат $m.n$, где m — номер параграфа, а n — номер задачи. К теоретическим сведениям относятся определения, теоремы, леммы и утверждения. Их нумерация также ведется по параграфам. В тексте встречаются еще замечания и следствия. Они привязаны к конкретному определению или утверждению и нумеруются по каждому из них отдельно. В конце книги приводятся список рекомендуемой литературы и оглавление.

Некоторые формулы в пособии помечены номерами, чтобы на них было удобно ссылаться. Нумерация формул ведется отдельно по каждой главе. Это же относится и к нумерации рисунков. Конец разбора примера или доказательства утверждения помечается символом $\square$.

ГЛАВА 1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Мы предполагаем, что читатель знаком с простейшими свойствами комплексных чисел и комплекснозначных функций. Будем придерживаться следующих обозначений: $z = x + iy$, $f = u + iv$, где $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

§ 1. Интеграл от комплекснозначной функции. Интегральная теорема Коши

Определение 1. Пусть $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ — кусочно-непрерывная функция, $f = u+iv$. *Интегралом от f по отрезку* $[a,b]$ называется комплексное число

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b u(t)\,dt + i\int\limits_a^b v(t)\,dt$$

(заметим, что функции u и v также кусочно-непрерывны). Иногда для краткости мы будем писать $\int_a^b f$.

Замечание. Из определения вытекают следующие равенства:

$$\operatorname{Re}\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt = \int\limits_a^b u(t)\,dt,$$

$$\operatorname{Im}\int\limits_a^b f(t)\,dt = \int\limits_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt = \int\limits_a^b v(t)\,dt,$$

$$\overline{\int\limits_a^b f(t)\,dt} = \int\limits_a^b \overline{f(t)}\,dt.$$

Свойства интеграла. Пусть $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ — кусочно-непрерывные функции.

1. Линейность. *Для любых* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

2. Аддитивность. *Для любого* $c \in [a, b]$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

3. Оценка интеграла.

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt.$$

Определение 2. *Путем в* $\mathbb{C}$ называется непрерывное отображение $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, где $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ называются соответственно *началом* и *концом* пути γ.

Напомним читателю основные понятия, связанные с путями.

1) Если $\gamma(a) = \gamma(b)$, то путь γ называется *замкнутым.*

2) Если сужение γ на $[a, b)$ взаимно однозначно, то путь γ называется *простым.*

3) Множество $\Gamma_\gamma = \{\gamma(t)\colon t \in [a, b]\}$ называется *носителем* γ.

4) *Длиной пути* γ называется верхняя грань длин "вписанных ломаных", то есть наименьшая верхняя граница множества всех сумм вида

$$\sum_{j=0}^{m-1} \bigl|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)\bigr|, \quad \text{где } a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b.$$

Если длина пути γ конечна, то он называется *спрямляемым.*

5) Путь $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ назовем *гладким*, если функции $\operatorname{Re}\gamma$ и $\operatorname{Im}\gamma$ непрерывно дифференцируемы, и *кусочно-гладким*, если $\operatorname{Re}\gamma$

и $\operatorname{Im}\gamma$ кусочно-непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Напомним, что функция f *кусочно-непрерывно дифференцируема* на $[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$ и существует такой конечный набор точек $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_m = b$, что сужение f на $[a_k, a_{k+1}]$ непрерывно дифференцируемо при любом $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$. Положим $\gamma'(t) = (\operatorname{Re}\gamma)'(t) + i(\operatorname{Im}\gamma)'(t)$ для тех $t \in [a, b]$, при которых правая часть имеет смысл.

6) Простой кусочно-гладкий путь γ мы будем в дальнейшем называть *стандартным путем.*

7) Кусочно-гладкий путь $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ спрямляем, а его длина равна $\int\limits_a^b |\gamma'(t)|\,dt$. Справедливо также равенство

$$\int\limits_a^b \gamma'(t)\,dt = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Для гладкого пути γ оно вытекает из формулы Ньютона – Лейбница, а для кусочно-гладкого — из аддитивности интеграла.

Определение 3. Интеграл по пути. Пусть $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ — кусочно-гладкий путь, f — непрерывная функция на носителе γ. *Интегралом от f по пути γ* называется число

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt.$$

Замечание. В правой части стоит интеграл от кусочно-непрерывной функции, который всегда существует и конечен.

Пример 1. Найти $\int\limits_\gamma z^n\,dz$ при $n \in \mathbb{Z}$, где $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ (r — положительное число).

Решение. Путь γ гладкий, а его носитель — окружность радиуса r. Функция $f(z) = z^n$ непрерывна Γ_γ. Согласно определению,

$$\int\limits_\gamma z^n\,dz = \int\limits_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it}\,dt = \begin{cases} 2\pi i, & \text{если } n = -1, \\ 0, & \text{если } n \neq -1. \end{cases} \qquad \square$$

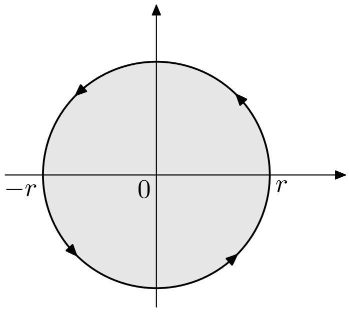

Рис. 1

Пример 2. Вычислить $\int\limits_\gamma e^{\overline{z}}\,dz$, где $\gamma(r) = re^{i\frac{\pi}{4}}$, $r \in [0,1]$.

Решение. Путь γ гладкий, а его носитель — отрезок. Функция $f(z) = e^{\overline{z}}$ непрерывна на Γ_γ. Следовательно,

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_0^1 e^{re^{-i\frac{\pi}{4}}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\,dr = i\big(e^{(1-i)/\sqrt{2}} - 1\big). \quad \square$$

Пример 3. Найти $\int\limits_\gamma |z|\,dz$, где $\gamma(y) = iy$, $y \in [-1,1]$.

Решение. Функция $f(z) = |z|$ непрерывна на Γ_γ. Тогда

$$\int\limits_\gamma |z|\,dz = \int\limits_{-1}^1 |iy|\,idy = 2i\int\limits_0^1 y\,dy = i. \quad \square$$

Задачи. Вычислить следующие интегралы.

1. $\int\limits_\gamma z^n\,dz$ при $n \in \mathbb{Z}$, где $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0,\pi]$.

Ответ:
$$\begin{cases} \pi i, & \text{если } n = -1, \\ \frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}, & \text{если } n \neq -1. \end{cases}$$

2. $\oint\limits_{\gamma} z^{-n}\, dz$, где $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [-2\pi, 2\pi]$.

Ответ: $\begin{cases} 4\pi i, & \text{если } n = 1, \\ 0, & \text{если } n \neq 1. \end{cases}$

3. $\operatorname{Re}\left(\oint\limits_{\gamma} e^{z-\frac{1}{z}}\, dz\right)$, где $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Ответ: 0.

4. $\oint\limits_{\gamma} \cos(\overline{z})\, dz$, где путь γ показан на рисунке 2.

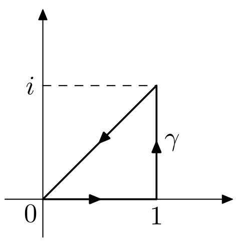

Рис. 2

Аналитически γ задается следующей формулой:

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \in [0, 1], \\ 1 + i(t-1), & \text{если } t \in [1, 2], \\ e^{\frac{i\pi}{4}}\big(2 + \sqrt{2} - t\big), & \text{если } t \in \big[2, 2 + \sqrt{2}\,\big]. \end{cases}$$

Ответ: $\big(2 - (i+1)\operatorname{ch} 1\big) \cdot \sin 1 + (i-1) \cdot \cos 1 \cdot \operatorname{sh} 1$.

Определение 4. Пути γ и γ_1, заданные соответственно на $[a, b]$ и $[a_1, b_1]$, называются *эквивалентными* ($\gamma \sim \gamma_1$), если существует отображение τ: $[a, b] \to [a_1, b_1]$ со следующими свойствами:

1) τ — непрерывная и возрастающая функция;
2) $\tau(a) = a_1$, $\tau(b) = b_1$;
3) для любого $t \in [a, b]$ верно равенство $\gamma_1\big(\tau(t)\big) = \gamma(t)$.

Замечание 1. Если пути γ и γ_1 кусочно-гладкие, то необходимо дополнительно потребовать, чтобы таковым было и отображение τ.

Нетрудно проверить, что эквивалентность путей *транзитивна*: из условий $\gamma_1 \sim \gamma_2$ и $\gamma_2 \sim \gamma_3$ следует $\gamma_1 \sim \gamma_3$.

Замечание 2. Носители эквивалентных путей совпадают: если $\gamma \sim \gamma_1$, то $\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma_1}$.

Замечание 3. Если кусочно-гладкие пути γ и γ_1 эквивалентны, а функция f непрерывна на их общем носителе, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz.$$

Замечание 4. Пусть $\gamma\colon\ [a,b] \to \mathbb{C}$ — простой путь, $c \in (a,b)$, а простые пути γ_1 и γ_2 эквивалентны сужениям γ на $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f = \int\limits_{\gamma_1} f + \int\limits_{\gamma_2} f.$$

Определение 5. Пусть Γ — носитель стандартного пути.

1) Назовем *ориентацией* Γ класс эквивалентных стандартных путей с носителем Γ. Множество Γ с введенной на нем ориентацией называется *стандартной ориентированной кривой.*

2) Определим интеграл по Γ формулой

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz,$$

где γ — путь из класса, определяющего ориентацию Γ. В силу замечания 3 такое определение корректно.

Пример 4. Вычислить $\int\limits_{\gamma} |z|^2$, если носитель пути γ — отрезок, соединяющий точки $1+i$ (начало пути) и $-1+2i$ (конец пути).

Решение. Параметризуем этот отрезок так:

$$\gamma(t) = t(2i-1) + (1-t)(1+i) = (1-2t) + i(1+t), \quad t \in [0,1].$$

Тогда γ — гладкий путь. Функция $f(z) = |z|^2$ непрерывна на Γ_γ. Заметим, что $\gamma'(t) = i - 2$, а

$$f\big(\gamma(t)\big) = (1-2t)^2 + (t+1)^2 = 5t^2 - 2t + 2.$$

Следовательно,

$$\int\limits_\gamma |z|^2 = (i-2)\int\limits_0^1 (5t^2 - 2t + 2)\,dt = \frac{8(i-2)}{3}. \quad \square$$

С путем $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ свяжем путь $\gamma^-(t) = \gamma(a+b-t)$. Ясно, что

$$\Gamma_\gamma = \Gamma_{\gamma^-}, \quad \gamma(a) = \gamma^-(b), \quad \gamma(b) = \gamma^-(a).$$

Определение 6. Пути $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ и $\eta\colon [c,d] \to \mathbb{C}$ называются *противоположно направленными*, если $\eta \sim \gamma^-$.

Замечание 1. Если кусочно-гладкие пути γ и η противоположно направлены, то для любой функции f, непрерывной на Γ_γ, верно равенство

$$\int\limits_\gamma f(z)\,dz = -\int\limits_\eta f(z)\,dz.$$

В частности, интегралы по γ и γ^- различаются знаком.

Замечание 2. Если простые пути γ_1 и γ_2 имеют общий носитель $\Gamma \subset \mathbb{C}$, то эти пути либо эквивалентны, либо противоположно направлены.

Таким образом, на стандартной ориентированной кривой существуют ровно две ориентации, порождаемые путями γ и γ^-. При смене ориентации кривой интеграл по ней меняет знак.

Определение 7. 1) Множество $G \subset \mathbb{C}$ называется *линейно связным*, если для любых точек $z_0, z_1 \in G$ существует такой путь $\gamma\colon [a,b] \to G$, что $\gamma(a) = z_0$, $\gamma(b) = z_1$.

2) Множество $G \subset \mathbb{C}$ называется *областью в* $\mathbb{C}$, если оно открыто в $\mathbb{C}$ и линейно связно.

Теорема 1 (Жордан). *Всякий простой замкнутый путь разбивает плоскость $\mathbb{C}$ на две области.*

Доказательство этой теоремы можно найти в [9] (см. главу 2).

Замечание. Переформулируем теорему подробнее: *если γ — простой замкнутый путь, Γ — его носитель, то существуют такие области G и G_0 в $\mathbb{C}$, что*

1) $G \cap G_0 = \varnothing$;
2) $\partial G = \partial G_0 = \Gamma$;
3) $G \cup G_0 \cup \Gamma = \mathbb{C}$;
4) G_0 — *ограниченная область в* $\mathbb{C}$.

Мы будем называть G_0 *внутренностью пути* γ и обозначать символом G_0^γ. Путь γ называется *положительно ориентированным*, если при возрастании параметра t точка $\gamma(t)$ движется так, что область G_0^γ остается слева. Таким образом, с путем γ связаны два объекта: носитель Γ_γ и положительное направление его обхода. Мы будем называть эту пару *ориентированной границей* G_0^γ.

Определение 8. Ограниченное множество $E \subset \mathbb{C}$ называется *односвязным*, если оно есть внутренность некоторого простого замкнутого пути.

Замечание. Если G — односвязная область, γ — простой замкнутый путь, носитель которого лежит в G, то внутренность γ также содержится в G.

Определение 9. Пусть множество G открыто в $\mathbb{C}$, $f\colon \Gamma \to \mathbb{C}$.

1) Функция f называется *регулярной в точке* $z \in G$, если она дифференцируема по комплексной переменной в точке z.

2) Функция f называется *регулярной на* G, если она регулярна в каждой точке G.

Подробно комплексная дифференцируемость обсуждается в [10] (см. § 1 главы 10).

Теорема 2. Интегральная теорема Коши. *Пусть G — односвязная область в $\mathbb{C}$, функция f регулярна на G. Тогда для любого замкнутого стандартного пути γ с носителем в G*

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Следствие 1. *Для функции f, регулярной в односвязной области G, интеграл по стандартному пути γ ($\Gamma_\gamma \subset G$) зависит лишь от начала и конца этого пути.*

Следствие 2. *У функции f, регулярной в односвязной области G, существует первообразная F (то есть функция $F\colon\ G \to \mathbb{C}$, для которой $F' = f$ на G).*

Следствие 3. *Пусть функция f регулярна в области G, γ_1 и γ_2 — два таких стандартных замкнутых положительно ориентированных пути в G, что*

$$\Gamma_{\gamma_2} \subset G_0^{\gamma_1}, \quad G_0^{\gamma_1} \setminus G_0^{\gamma_2} \subset G,$$

где $G_0^{\gamma_1}$ и $G_0^{\gamma_2}$ — внутренности соответствующих путей. Тогда

$$\oint\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz = \oint\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

Доказательства теоремы 2 и ее следствий также можно найти в [10] (см. § 1 главы 10).

Пример 5. Вычислить с помощью теоремы Коши *интегралы Френеля:*

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\,dx.$$

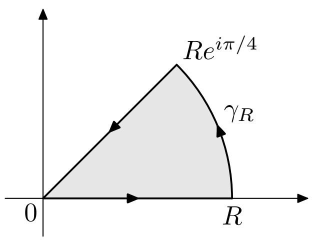

Рис. 3

Решение. Искомые интегралы являются соответственно вещественной и мнимой частями интеграла $\int\limits_0^{+\infty} e^{ix^2}\,dx$, который по определению равен пределу его частичных интегралов по отрезку $[0,R]$. Зафиксируем произвольное положительное число R. Нам понадобится *интеграл Эйлера – Пуассона:*

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Эта формула выводилась в курсе математического анализа. Рассмотрим регулярную на $\mathbb{C}$ функцию $f(z)=\exp\bigl(iz^2\bigr)$. Заметим, что $\operatorname{Re} f(x)=\cos x^2$, $\operatorname{Im} f(x)=\sin x^2$ при $x\in\mathbb{R}$.

Введем замкнутый путь γ_R, показанный на рисунке 3. Выбор пути интегрирования объясняется тем, что искомые несобственные интегралы понимаются соответственно как

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R \operatorname{Re} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \lim_{R\to+\infty}\int\limits_0^R \operatorname{Im} f(x)\,dx,$$

а при $z=re^{i\pi/4}$, $r\in[0,R]$ верно равенство $f(z)=e^{-|z|^2}=e^{-r^2}$. Путь γ_R — замкнутый стандартный, и по интегральной теореме Коши

$$\oint\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0 \quad \text{для любого } R>0.$$

С другой стороны, этот интеграл равен сумме

$$\int\limits_0^R \bigl(\cos x^2 + i\sin x^2\bigr)\,dx + \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ 0\leqslant \arg z\leqslant \pi/4}} e^{iz^2}\,dz + e^{i\pi/4}\int\limits_R^0 e^{-r^2}\,dr.$$

Обозначим среднее слагаемое в этой сумме символом I_R. Тогда

$$|I_R| = \left| \int\limits_0^{\pi/4} e^{iR^2(\cos 2t + i\sin 2t)} iRe^{it}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{\pi/4} \left| e^{R^2(\cos 2t + i\sin 2t)} \right| R\, dt = \int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2t} R\, dt.$$

Так как $\sin x \geqslant 2x/\pi$ при $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$|I_R| \leqslant R \int\limits_0^{\pi/4} e^{-R^2 \cdot 4t/\pi}\, dt = \frac{\pi}{4R}\left(1 - e^{-R^2}\right)$$

(эта оценка — частный случай утверждения леммы Жордана, которая будет доказана далее). Следовательно, $I_R \to 0$ при $R \to +\infty$. Предельный переход в выражении для $\oint\limits_{\gamma_R} f(z)\, dz$ дает

$$0 = \lim_{R \to +\infty} \int\limits_0^R \left(\cos x^2 + i \sin x^2\right) dx - \lim_{R \to +\infty} e^{i\pi/4} \int\limits_0^R e^{-r^2}\, dr.$$

Используя интеграл Эйлера – Пуассона и приравнивая в последнем равенстве вещественные и мнимые части, мы получим, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}. \quad \square$$

Пример 6. Вычислить

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}, \quad \text{где} \;\; a, b > 0.$$

Решение. Пусть $z(t) = a\cos t + ib\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$. Заметим, что

$$\frac{z'}{z} = \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib\sin t} = \frac{(b^2 - a^2)\cos t \sin t + iab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$$

(во втором переходе мы домножили числитель и знаменатель на $\overline{z}$). Таким образом, мнимая часть $\dfrac{z'}{z}$ кратна подынтегральной функции в I с коэффициентом ab.

Рассмотрим пути γ_1 и γ_2, показанные на рисунке 4. Они задаются равенствами

$$\gamma_1(t) = \varepsilon(\cos t + i\sin t), \quad \gamma_2(t) = a\cos t + ib\sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

где $0 < \varepsilon < \min\{a, b\}$. В силу следствия 3 интегральной теоремы Коши

$$abI = \operatorname{Im} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(b^2 - a^2)\cos t \sin t + iab}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t}\, dt = \operatorname{Im} \oint\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = \operatorname{Im} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z}.$$

Используем результат примера 1, мы получим

$$I = \frac{1}{ab} \cdot \operatorname{Im} \oint\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \frac{\operatorname{Im}(2\pi i)}{ab} = \frac{2\pi}{ab}. \quad \square$$

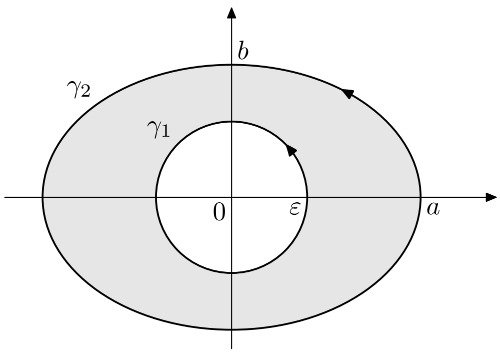

Рис. 4

Пример 7. При $b \in \mathbb{R}$ вычислить

$$I(b) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\, dx.$$

Решение. У функции e^{-x^2-2bxi} мнимая часть нечетна, а вещественная четна и совпадает с подынтегральной функцией в $I(b)$. Поэтому

$$I(b) = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2bxi}\,dx = \frac{e^{-b^2}}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+bi)^2}\,dx.$$

Рассмотрим функцию $f(z) = e^{-z^2}$, регулярную в $\mathbb{C}$. Для любого $R > 0$ определим стандартный замкнутый путь γ_R, показанный стрелками на рисунке 5.

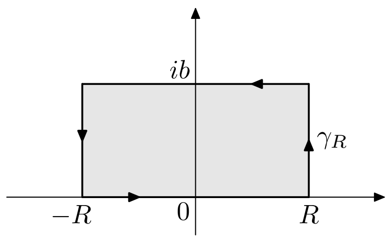

Рис. 5

По интегральной теореме Коши $\oint\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$. С другой стороны, используя для каждого отрезка пути свою параметризацию, в силу аддитивности интеграла мы получим

$$0 = \int\limits_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx + \int\limits_{0}^{b} e^{-(R+iy)^2}\,idy + \int\limits_{R}^{-R} e^{-(x+bi)^2}\,dx + \int\limits_{b}^{0} e^{-(iy-R)^2}\,idy.$$

Покажем, что при $R \to +\infty$ второй и четвертый интегралы в правой части стремятся к нулю. Действительно,

$$\left|\int\limits_{0}^{b} e^{-R^2+y^2\mp 2Riy}\,dy\right| \leqslant \int\limits_{0}^{b} e^{-R^2+y^2}\,dy \leqslant \frac{b\,e^{b^2}}{e^{R^2}} \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

Первый интеграл в правой части стремится к интегралу Эйлера – Пуассона, равному $\sqrt{\pi}$. Поэтому предельный переход при $R \to +\infty$

дает

$$0 = \sqrt{\pi} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+bi)^2}\,dx = \sqrt{\pi} - 2e^{b^2} I(b), \quad \text{и} \;\; I(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-b^2}. \quad \square$$

Пример 8. При $a > 0$, $a \neq 1$ вычислить интеграл

$$J(a) = \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x \; dx}{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

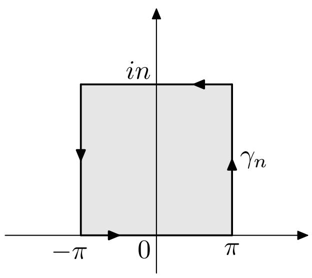

Рис. 6

Решение. Поскольку $J(a) = J(1/a)/a^2$, мы ограничимся рассмотрением случая $0 < a < 1$. Заметим, что

$$1 - 2a\cos x + a^2 = (a - e^{-ix})(a - e^{ix}).$$

Так как интеграл от нечетной функции по отрезку $[-\pi, \pi]$ равен нулю,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}}\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a - e^{ix})}{a^2 - 2a\cos x + 1}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x(a - \cos x) - ix\sin x}{a^2 - 2a\cos x + 1}\,dx = -2i \int\limits_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}\,dx,$$

откуда $J(a) = \dfrac{i}{2} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \dfrac{x}{a - e^{-ix}}\, dx$.

Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{z}{a - e^{-iz}}$ и замкнутый путь γ_n, показанный на рисунке 6. Носитель пути — граница прямоугольника с вершинами в точках

$$z_1 = -\pi + i0, \;\; z_2 = \pi + i0, \;\; z_3 = \pi + in, \;\; z_4 = -\pi + in, \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Особые точки дроби $f(z)$ — нули знаменателя: $a_k = i \ln a + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Так как $\ln a < 0$, они лежат вне прямоугольника, ограниченного носителем γ_n. Следовательно, функция f регулярна на некоторой области G, содержащей прямоугольник, и γ_n — стандартный замкнутый путь, входящий в G вместе со своей внутренностью. По интегральной теореме Коши интеграл от f по γ_n равен нулю. С другой стороны, запишем этот интеграл как сумму интегралов по сторонам прямоугольника. Тогда

$$0 = \oint\limits_{\gamma_n} f(z)\, dz = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}}\, dx - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x + in}{a - e^{-ix+n}}\, dx +$$
$$+ \int\limits_{0}^{n} \frac{\pi + iy}{a + e^{y}}\, idy - \int\limits_{0}^{n} \frac{-\pi + iy}{a + e^{y}}\, idy.$$

Мы использовали равенство $e^{\mp i\pi} = -1$. Второй интеграл в правой части стремится к нулю при $n \to +\infty$, так как его абсолютная величина не превосходит $2\pi \cdot \frac{\pi+n}{e^n - a}$. Третий и четвертый интегралы в сумме дают

$$2\pi i \int\limits_{0}^{n} \frac{dy}{a + e^{y}} \to 2\pi i \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dy}{a + e^{y}} = \frac{2\pi i\, \ln(1 + a)}{a} \quad (n \to +\infty)$$

(последний переход легко проверяется с помощью замены переменной $t = e^y$). Переходя к пределу при $n \to +\infty$, мы получим

$$J(a) = \frac{i}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{a - e^{-ix}}\, dx = -\frac{2\pi i \ln(1 + a)}{a} \cdot \frac{i}{2} = \frac{\pi \ln(1 + a)}{a}\,,$$

где $0 < a < 1$. $\square$

В дальнейшем нам потребуется оценка интегралов от функций специального вида по дугам окружности. Докажем соответствующее утверждение.

Лемма 1 (Жордан). *Пусть $b \in \mathbb{R}$, $R_0 > 0$.*

1) Если функция f непрерывна на множестве

$$G = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z \geqslant -b,\ |z| \geqslant R_0\}$$

и $\lim\limits_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G}} f(z) = 0$, то для любого $a > 0$

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ z\in G}} f(z)e^{iaz}\,dz = 0.$$

2) Если функция f непрерывна на множестве

$$E = \{z\colon |z| \geqslant R_0,\ \operatorname{Re} z \geqslant -b\}$$

и $\lim\limits_{\substack{z\to\infty,\\ z\in E}} f(z) = 0$, то для любого $a > 0$

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ z\in E}} f(z)e^{-az}\,dz = 0.$$

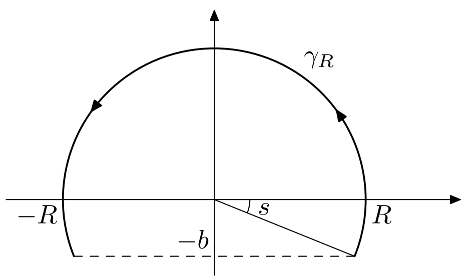

Рис. 7

Доказательство. Второе утверждение есть следствие первого и получается из него после замены переменных $z = iz_1$, $z_1 \in E$, то есть поворотом пути интегрирования на $\frac{\pi}{2}$. Поэтому мы ограничимся доказательством первого утверждения. По условию леммы для любого $\varepsilon > 0$ существует такое R_ε, что если $z \in G$, $|z| > R_\varepsilon$, то $|f(z)| < \varepsilon$. Рассмотрим путь γ_R, показанный на рисунке 7 (он соответствует случаю $b > 0$). Полагая $s = \arcsin\frac{b}{R}$, мы можем параметризовать этот путь:

$$\gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t \in [-s, \pi + s].$$

Носителем γ_R является дуга окружности $\{z\colon\ |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant -b\}$. Тогда при $R > R_\varepsilon$

$$\int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz = \int\limits_{-s}^{\pi+s} f\big(Re^{it}\big)e^{iRa(\cos t + i\sin t)} iRe^{it}\,dt.$$

Оценим модуль этого интеграла при $R > R_\varepsilon$, используя симметрию графика функции $\sin t$ относительно прямой $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\Bigg|\int\limits_{\gamma_R} f(z)e^{iaz}\,dz\Bigg| \leqslant \varepsilon R \int\limits_{-s}^{\pi+s} e^{-aR\sin t}\,dt = 2\varepsilon R \int\limits_{-s}^{\pi/2} e^{-aR\sin t}\,dt.$$

Обозначим интеграл в правой части за $I(R)$. Достаточно доказать, что произведение $R \cdot I(R)$ ограничено (тогда утверждение леммы Жордана будет вытекать из определения предела). Можно считать, что $b > 0$ (то есть $s > 0$). Действительно, в случае $s < 0$ замена s на $-s$ увеличивает промежуток интегрирования в $I(R)$, а значит, и сам $I(R)$. В силу аддитивности интеграла

$$R \cdot I(R) = R\left(\int\limits_{-s}^{0} + \int\limits_{0}^{\pi/2} e^{-aR\sin t}\,dt\right).$$

Ясно, что $|R\sin t| \leqslant b$ при $t \in [-s, 0]$ и $s = \arcsin\frac{b}{R} \leqslant \frac{\pi b}{2R}$. Поэтому

$$R\int\limits_{-s}^{0} e^{-aR\sin t}\,dt \leqslant R\int\limits_{-s}^{0} e^{ab}\,dt = Re^{ab}s \leqslant \frac{\pi b}{2}\,e^{ab}.$$

Таким образом, первое слагаемое в выражении для $R \cdot I(R)$ ограничено. Для оценки второго слагаемого воспользуемся неравенством $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$ при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Мы получим

$$R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-aR\sin t}\, dt \leqslant R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-aR\cdot 2t/\pi}\, dt = \frac{\pi}{2a}\left(1 - e^{-aR}\right) \leqslant \frac{\pi}{2a}\,.$$

Из полученных оценок вытекает, что произведение $R \cdot I(R)$ ограничено. Лемма доказана. $\square$

Теорема 3 (Коши). *Пусть функция f регулярна в области G, γ — стандартный замкнутый путь, принадлежащий этой области вместе со своей внутренностью G_0^γ. Тогда*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(u)}{u - z}\, du \quad \text{для любого } z \in G_0^\gamma.$$

Эта формула называется *интегральной формулой Коши*, а стоящий справа интеграл — *интегралом Коши.*

Следствие 1. *Для любых $a \in G$ и $n \in \mathbb{N}$ существует производная $f^{(n)}(a)$, и она равна*

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\, du,$$

где γ — произвольный стандартный замкнутый путь в G, для которого $a \in G_0^\gamma \subset G$.

Следствие 2. *Регулярная в области G функция f является там аналитической, то есть для любой точки $a \in G$ существуют окрестность этой точки $V_a \subset G$ и последовательность коэффициентов $\left\{c_n\right\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$, для которых*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

причем ряд абсолютно сходится при всех $z \in V_a$.

Доказательства теоремы 3 и ее следствий можно найти в [10] (см. § 2 главы 10).

Пример 9. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=3} \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz$.

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде разности функций $g(z) = \frac{2}{z-2}$ и $f(z) = \frac{1}{z-1}$. Тогда достаточно найти интегралы от этих функций. По теореме Коши

$$\oint\limits_{|z|=3} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot 1 \quad \text{и} \quad \oint\limits_{|z|=3} g(z)\,dz = 2\pi i \cdot 2,$$

так как точки 1 и 2 лежат внутри контура интегрирования. Разность этих интегралов и дает искомый интеграл:

$$\oint\limits_{|z|=3} \frac{z}{(z-1)(z-2)}\,dz = 2\pi i. \quad \square$$

Пример 10. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\,dz$.

Решение. Применим следствие 1 теоремы Коши в следующей ситуации:

$$f(z) = \sin z, \;\; a = 0, \;\; n = 1 \quad \text{и} \quad \gamma(t) = e^{it}, \;\; t \in [0, 2\pi].$$

Мы получим

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin z}{z^2}\,dz = n! \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} = 2\pi i f'(0) = 2\pi i. \quad \square$$

Пример 11. Вычислить при $a > 0$ *интеграл Лапласа*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{1+x^2}\,dx.$$

Решение. Интеграл Лапласа абсолютно сходится, поскольку $\left|\dfrac{e^{iax}}{1+x^2}\right| = \dfrac{1}{x^2+1}$ при любом вещественном a. Рассмотрим функцию $f(z) = e^{iaz}/(1+z^2)$. Для любого $R > 1$ выберем путь γ_R так, как показано на рисунке 8.

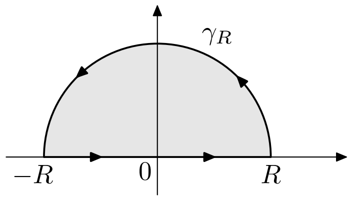

Рис. 8

Запишем $f(z) = g(z)/(z-i)$, где $g(z) = e^{iaz}/(z+i)$. Ясно, что g — регулярная функция в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > -1\}$, а замкнутый путь γ_R содержится в ней. По интегральной формуле Коши

$$\oint\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = \oint\limits_{\gamma_R} \frac{g(z)}{z-i}\,dz = 2\pi i\,g(i) = \pi e^{-a}.$$

С другой стороны, по аддитивности интеграла

$$\oint\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} f(z)\,dz.$$

Так как $a > 0$, к функции $1/(1+z^2)$ можно применить первое утверждение леммы Жордана при $b = 0$. Тогда

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} \frac{e^{iaz}}{1+z^2}\,dz = 0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}dx}{1+x^2} = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} \frac{e^{iax}dx}{1+x^2} = \pi e^{-a}.$$

Заметим, что $\cos(ax) = \cos(|a|x)$. Отделяя вещественную часть интеграла Лапласа, мы получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-|a|} \text{ для любого } a \in \mathbb{R}. \quad \square$$

§ 2. Ряды Лорана. Вычеты

Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ называется *рядом Лорана* с центром в точке a. Он понимается как сумма двух рядов:

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

и считается сходящимся тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда. Положим $u = \frac{1}{z-a}$. Тогда первый ряд в сумме можно переписать как степенной ряд относительно u, то есть $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_{-m}u^m$. По теореме Коши – Адамара радиус сходимости этого ряда равен

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\ \sqrt[m]{|c_{-m}|}}.$$

Аналогично радиус сходимости второго ряда равен

$$R_1 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Если $R, R_1 > 0$ и $\frac{1}{R} < R_1$, то ряд Лорана абсолютно сходится на кольце

$$\bigl\{z\colon \tfrac{1}{R} < |z-a| < R_1\bigr\}.$$

Теорема 1 (Лоран). *Пусть $G = \{z\colon\ r < |z-a| < R\}$ при некоторых $0 \leqslant r < R \leqslant +\infty$, а функция f регулярна на G. Тогда существует такая последовательность $\bigl\{c_n\bigr\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в $\mathbb{C}$, что*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n \quad \textit{для любого } z \in G.$$

При этом

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma} \frac{f(u)}{(u-a)^{n+1}}\, du, \qquad (1)$$

где γ — стандартный замкнутый путь в этом кольце G, “обходящий” точку a (то есть $a \in G_0^{\gamma}$).

Иными словами, функция, регулярная в кольце, разлагается там единственным образом в ряд Лорана.

Определение 1. Вычет. Пусть $R > 0$, функция f регулярна на кольце $\{z\colon\ 0 < |z-a| < R\}$, γ_a — любой стандартный замкнутый путь, “обходящий” точку a. Тогда интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_a} f(z)\, dz$ называется *вычетом* функции f в точке a и обозначается символом $\mathrm{Res}_a f$:

$$\mathrm{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_a} f(z)\, dz.$$

Замечание 1. Определение вычета функции f в точке a корректно, то есть вычет не зависит от замкнутого пути γ_a, ”обходящего” точку a (см. следствие 3 из интегральной теоремы Коши).

Замечание 2. В силу формулы (1) для функции f, регулярной в кольце $\{z\colon\ 0 < |z-a| < R\}$, верно равенство $\mathrm{Res}_a f = c_{-1}$, где c_{-1} — коэффициент ряда Лорана с центром в точке a функции f.

Рассмотрим несколько примеров на разложение в ряд Лорана и на нахождение вычетов.

Определение 2. Для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим

$$J_n(c) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\,(nt - c\sin t)\, dt, \quad J_{-n}(c) = (-1)^n J_n(c) \quad (c \in \mathbb{C}).$$

Функции J_m при $m \in \mathbb{Z}$ называют *функциями Бесселя порядка m.*

Пример 1. Найти коэффициенты разложения функций Бесселя в степенной ряд.

Решение. В силу равенства $J_{-n} = (-1)^n J_n$ достаточно найти разложение J_n при $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $w \in \mathbb{C}$ рассмотрим функцию $f(z) = e^{(z-1/z)\,w/2}$. Она регулярна в кольце $\{z\colon 0 < |z| < +\infty\}$ и по теореме Лорана раскладывается там в обобщенный степенной ряд. Вычислим коэффициенты c_k этого ряда двумя способами. С одной стороны, по формуле (1)

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Выберем путь $z(t) = e^{it}$, где $t \in [-\pi, \pi]$. Тогда

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{w(e^{it}-e^{-it})/2} e^{-i(k+1)t} e^{it} i\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{iw\sin t} e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\left(kt - w\sin t\right) dt = J_k(w),$$

так как $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin\left(kt - w\sin t\right) dt = 0$ в силу нечетности подынтегральной функции.

С другой стороны, ряд Лорана f — произведение разложений функции e^t при $t = \frac{wz}{2}$ и $t = -\frac{w}{2z}$. Перемножим эти ряды по правилу Коши, которое будет сформулировано далее. Мы получим

$$c_n = \frac{w^n}{2^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m w^{2m}}{2^{2m} m!(m+n)!}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Таким образом, для любых $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$J_n(w) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \cdot \left(\frac{w}{2}\right)^{2m+n} \quad (w \in \mathbb{C}).$$

Это разложение дает способ приближенного вычисления значений функций Бесселя. Например,

$$J_1(2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+1)!} = -0,57672481\ldots \quad \square$$

Пример 2. Разложить функцию $f(z) = z^2 \sin \frac{\pi(z+1)}{z}$ в ряд Лорана по степеням z в кольце $\{z\colon 0 < |z| < +\infty\}$.

Решение. Функция f регулярна в предложенном кольце, и к ней применима теорема Лорана. Заметим, что $\sin \frac{\pi(z+1)}{z} = -\sin \frac{\pi}{z}$, и воспользуемся известным разложением

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (t \in \mathbb{C}).$$

Полагая в нем $t = \frac{\pi}{z}$, мы получим

$$f(z) = -z^2 \sin \frac{\pi}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{z^{2n-1}(2n+1)!} \quad \text{и} \quad \mathrm{Res}_0 f = \frac{\pi^3}{3!}. \quad \square$$

Пример 3. При $b \neq 0$ разложить функцию $f(z) = (z+b)^{-1}$ в ряд Лорана в круге $\{z\colon |z| < |b|\}$.

Решение. Если $|z| < |b|$, то

$$f(z) = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1 + z/b} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{b^n}.$$

В последнем переходе мы воспользовались формулой для суммы бесконечной геометрической прогрессии, и получившийся ряд абсолютно сходится. Тогда коэффициенты ряда Лорана равны

$$c_n = \begin{cases} (-1)^n\, b^{-n-1}, & \text{если } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ 0, & \text{если } n < 0. \end{cases}$$

В частности, $\mathrm{Res}_0 f = 0$. $\square$

Задача. Разложить функцию $f(z) = 1/(z+b)$ в ряд Лорана в кольце $\{z\colon |b| < |z| < +\infty\}$.

Пример 4. Разложить функцию $f(z) = z^{-1}(z-3)^{-2}$ в ряд Лорана в кольце $\{z\colon 1 < |z-1| < 2\}$.

Решение. Положим $u = z - 1$ и

$$g(u) = f(u+1) = (u+1)^{-1}(u-2)^{-2}.$$

Разложив $g(u)$ в сумму простейших дробей, мы получим

$$g(u) = \tfrac{1}{9}\,(2-u)^{-1} + \tfrac{1}{3}\,(2-u)^{-2} + \tfrac{1}{9}\,(u+1)^{-1}.$$

Каждое из слагаемых нужно представить рядом Лорана в кольце $\{u\colon 1 < |u| < 2\}$. Для первого слагаемого верно равенство

$$(2-u)^{-1} = \frac{1}{2(1-u/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}\, u^n.$$

Ряд в правой части абсолютно сходится в круге $\{u\colon |u| < 2\}$, и его сумму можно почленно дифференцировать в этом круге (теорема о дифференцируемости суммы степенного ряда):

$$(2-u)^{-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}}\, u^{n-1}.$$

Третье слагаемое имеет разложение

$$(1+u)^{-1} = u^{-1}\frac{1}{1+u^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{u^{n+1}}. \qquad (2)$$

Этот ряд сходится на множестве $\{u\colon |u| > 1\}$. Таким образом, все три ряда абсолютно сходятся в кольце $\{u\colon 1 < |u| < 2\}$, и в нем справедливо разложение

$$g(u) = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{u^{n+1}} + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5+3n}{2^{n+2}}\, u^n.$$

Осталось вернуться к переменной z. Для функции f получаем

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-1)^n, \quad \text{где } c_n = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+1}}{9}, & n \leqslant -1, \\ \dfrac{5+3n}{9\cdot 2^{n+2}}, & n \geqslant 0. \end{cases} \qquad \square$$

Теорема 2. Правило Коши. *Пусть ряды* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ *и* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-a)^n$ *сходятся на кольце* $\{z \in \mathbb{C}\colon r < |z-a| < R\}$

к суммам $f(z)$ и $g(z)$ соответственно. Тогда в том же кольце функция $f(z)g(z)$ раскладывается в ряд Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n$ с коэффициентами $c_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$.

Пример 5. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ функцию $F(z) = e^{1/(z-1)}(z+1)^{-1}z^{-1}$ в кольце $\{z\colon\ 1 < |z-1| < 2\}$.

Решение. Положим $f(z) = e^{1/(z-1)}$, $g(z) = z^{-1}(z+1)^{-1}$. Ясно, что

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(z-1)^k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-1)^n, \quad \text{где } a_n = \begin{cases} \frac{1}{|n|!}, & n \leqslant 0, \\ 0, & n > 0. \end{cases}$$

Этот ряд сходится в кольце $\{z\colon\ 0 < |z-1| < +\infty\}$. Функцию $g(z)$ запишем в виде $1/z - 1/(z+1)$, и каждое слагаемое разложим в ряд по степеням $t = z-1$. Используя равенство (2) и формулу суммы геометрической прогрессии, мы получим

$$\frac{1}{t+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{t^{m+1}}, \quad |t| > 1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2+t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m}{2^{m+1}}, \quad |t| < 2.$$

Оба ряда сходятся на кольце $\{t\colon\ 1 < |t| < 2\}$, и их разность дает ряд Лорана функции $g(t+1)$. Осталось умножить его на ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{-n}}{n!}$, представляющий функцию $f(t+1)$.

Перемножим сначала ряды $\sum\limits_{m=0}^{\infty} (-1)^m t^{-m-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{-n}}{n!}$. Неотрицательных степеней t произведение, очевидно, не содержит. Положим $k = m+n+1$. Ясно, что $k \geqslant 1$, а коэффициент при t^{-k} равен $(-1)^k \sum\limits_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

Перемножим теперь ряды $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^m}{2^{m+1}}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{t^{-n}}{n!}$. При $n > m$ обозначим $k = n - m$. Мы получим, что коэффициент при t^{-k} равен сумме ряда $\sum\limits_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k+1} n!}$. В случае $m \geqslant n$ положим $m - n = k$.

Коэффициент при t^k представим в виде

$$(-1)^k \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = e^{-1/2} \cdot \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}.$$

Вернемся к функциям $g(t+1)$ и $f(t+1)$. Используя доказанные равенства, по правилу Коши мы получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k t^{-k} \left(\sum_{n=0}^{k-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\right) - e^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{2^{k+1}} - \\ - \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k t^k}{2^{k+1}} \left(\sum_{n=-k}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^n\, n!}\right).$$

Осталось заменить t на $z-1$. Напомним, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} = e^{-1/2}$, откуда $\sum\limits_{n=-k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} = e^{-1/2} - \sum\limits_{n=0}^{-k-1} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$. Поэтому при $1 < |z-1| < 2$

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1} (z-1)^k (-1)^k \left(\sum_{n=0}^{-k-1} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{2^{n+1+k}} - 1\right) - e^{-1/2}\right) - \\ - e^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-1)^k}{2^{k+1}}. \quad \square$$

Определение 3. Изолированная особая точка. Точка a называется *изолированной особой точкой* функции f, если существует кольцо $\{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z-a| < r\}$, в котором функция f регулярна.

Различают три типа изолированных особых точек.

1. Устранимая особая точка. Точка a называется *устранимой особой точкой* функции f, если существует конечный $\lim\limits_{z\to a} f(z)$. Это равносильно ограниченности функции f в некоторой проколотой окрестности точки a.

В терминах ряда Лорана такая точка характеризуется тем, что разложение функции f в ряд Лорана с центром в точке a не содержит отрицательных степеней (то есть $c_n = 0$ при $n < 0$).

2. Полюс. Точка a называется *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to a}|f(z)| = +\infty$.

В терминах ряда Лорана полюс характеризуется тем, что существует число $m \geqslant 1$ (называемое *порядком полюса*), удовлетворяющее условиям $c_{-m} \neq 0$ и $c_n = 0$ при $n < -m$ (c_n — коэффициенты ряда Лорана с центром в точке a функции f).

3. Существенно особая точка. *Существенно особой* называется изолированная особая точка функции f, которая не является ни устранимой, ни полюсом. Ряд Лорана f с центром в точке a имеет бесконечно много членов с отрицательными степенями $(z-a)$.

Наша дальнейшая задача — научиться вычислять вычеты в изолированных особых точках. Важно правильно определить тип изолированной особой точки, а для полюса — его порядок.

Замечания

1) В устранимой особой точке вычет равен нулю.

2) *Точка a является полюсом порядка m тогда и только тогда, когда предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)(z-a)^m$ конечен и отличен от нуля.* Для нахождения вычетов в полюсе ниже приводятся удобные формулы.

3) Если a — существенно особая точка, то для нахождения вычета нужно разложить функцию в ряд Лорана с центром в a и найти коэффициент c_{-1}. Мы уже знаем, что он равен вычету.

Правила вычисления вычетов.

1) *Если a — полюс первого порядка, то*

$$\mathrm{Res}_a f = \lim_{z\to a} f(z)(z-a).$$

Это следует из равенства $f(z)(z-a) = c_{-1} + c_0(z-a) + \ldots$ и непрерывности суммы степенного ряда в точке a.

2) *Пусть $f(z) = g(z)/h(z)$, где g, h — регулярные функции в круге $\{z\colon |z-a| < r\}$, причем $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Тогда*

$$\mathrm{Res}_a f = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Действительно,

$$\mathrm{Res}_a f = \lim_{z\to a} \frac{g(z)(z-a)}{h(z)} = \lim_{z\to a} g(z)\left(\frac{h(z)-h(a)}{z-a}\right)^{-1} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Отметим также, что a — полюс первого порядка функции f в случае $g(a) \neq 0$ и устранимая особая точка f при $g(a) = 0$.

3) *Если* $m \in \mathbb{N}$, a — *полюс* f *порядка* m, *то*

$$\mathrm{Res}_a f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \big(f(z)(z-a)^m \big)^{(m-1)}.$$

В случае $m = 1$ эта формула совпадает с равенством из пункта 1.

Рассмотрим несколько примеров на вычисление вычетов.

Пример 6. Найти вычеты функции $f(z) = 1/\big(1 + z^5\big)$ в особых точках комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Решение. Запишем $f = g/h$, где $g(z) = 1$, $h(z) = 1 + z^5$. Изолированными особыми точками f в $\mathbb{C}$ являются нули h. Уравнение $z^5 = -1$ имеет корни

$$z_k = e^{i\pi(2k+1)/5}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Эти точки — полюсы первого порядка функции f, и по правилу 2

$$\mathrm{Res}_{z_k} f = \frac{1}{5z_k^4} = \frac{z_k}{5z_k^5} = -\frac{z_k}{5} = -\frac{e^{i\pi(2k+1)/5}}{5}. \quad \square$$

Пример 7. Пусть $f(z) = (z^{2n} - 1)z^{-n}(1+z)^{-1}$, где $n \in \mathbb{N}$. Найти вычеты f в особых точках комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Решение. В $\mathbb{C}$ функция f имеет изолированные особые точки -1 и 0. Точка -1 — устранимая особая для f, так как существует конечный $\lim\limits_{z \to -1} f(z) = 2n(-1)^{n-1}$. Поэтому $\mathrm{Res}_{-1} f = 0$. Так как $\lim\limits_{z \to 0} z^n f(z) = -1$, точка 0 — полюс n-го порядка. Правило 3 в данном случае не очень удобно. Разложим функцию f в ряд Лорана с центром в нуле. Нам нужен коэффициент c_{-1} этого ряда. По формуле для суммы геометрической прогрессии

$$f(z) = -z^{-n} \sum_{k=0}^{2n-1} (-z)^k = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{k+1} z^{k-n}.$$

Степень z^{-1} получается при $k = n - 1$, и коэффициент при ней равен $(-1)^n$. Следовательно, $\mathrm{Res}_0 f = (-1)^n$. $\square$

Пример 8. Найти вычеты функции $f(z) = e^{1/z}(z+3)^{-1}$ в особых точках плоскости $\mathbb{C}$.

Решение. В $\mathbb{C}$ функция f имеет изолированные особые точки -3 и 0. Точка -3 — полюс первого порядка f, и

$$\mathrm{Res}_{-3} f = \lim_{z \to -3} f(z)(z+3) = e^{-1/3}.$$

Точка 0 — существенно особая, и для нахождения вычета в ней разложим f в ряд Лорана. Заметим, что

$$e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!}, \quad |z| > 0 \quad \text{и} \quad \frac{1}{z+3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{3^n}, \quad |z| < 3.$$

Перемножая эти ряды, находим коэффициент при z^{-1}. Он равен

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}(n+1)!} = 1 - \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1/3)^{n+1}}{(n+1)!}\right) = 1 - e^{-1/3},$$

что и дает нам $\mathrm{Res}_0 f$. $\square$

Пример 9. Найти вычеты функции $f(z) = \sin z\,(z+i)^{-3}$ в особых точках плоскости $\mathbb{C}$.

Решение. Единственной особой точкой f в $\mathbb{C}$ является $-i$, это полюс третьего порядка. Следовательно,

$$\mathrm{Res}_{-i} f = \frac{1}{2!} \lim_{z \to -i} \big(f(z)(z+i)^3\big)'' = -\frac{\sin(-i)}{2} = \frac{i}{4}\big(e - e^{-1}\big) = \frac{i\,\mathrm{sh}(1)}{2}.$$

Мы использовали формулу Эйлера: $\sin z = \frac{1}{2i}\big(e^{iz} - e^{-iz}\big)$. $\square$

Задачи. Разложить по степеням разности $(z-a)$ в кольце D следующие функции.

1) $f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z-2}$, $a = 2$, $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z-2|\}$.

2) $f(z) = \frac{e^{1/z}}{z+i}$, $a = 0$, $D = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z| < 1\}$.

§ 3. Теорема о вычетах

Определение 1. *Конечносвязной (s - связной) областью* называется область G расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, граница Γ которой состоит из s замкнутых дизъюнктных кривых Γ_j, которые можно ориентировать так, что при обходе каждой из них область остается слева. Такой обход границы называется *положительным*.

Поясним это определение. Пусть γ_j: $[0, 1] \to \mathbb{C}$ — путь с носителем Γ_j, а в точке $t \in [0, 1]$ существует $\gamma_j'(t)$. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что $\gamma_j(t)+i\varepsilon\gamma_j'(t) \in G$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Геометрически это условие означает, что если касательный вектор $\gamma_j'(t)$ повернуть на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, умножить на малое положительное число и отложить от точки $\gamma_j(t)$, то мы попадем внутрь области.

Отметим, что если область G ограничена, то *внешний* контур (то есть тот контур, одна из дополнительных областей для которого содержит точку ∞ и не содержит точек области G) при положительном обходе границы G проходится против часовой стрелки, а *внутренние* (то есть все остальные) контуры — по часовой. На рисунке 9 внешний контур обозначен символом Γ_1.

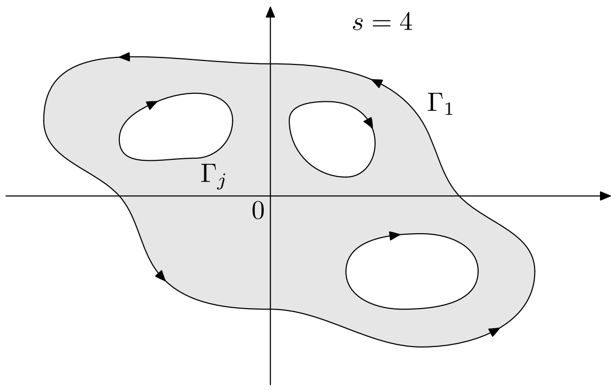

Рис. 9

Если G содержит точку ∞, то все граничные контуры будут внутренними, и при положительном обходе они проходятся по часовой стрелке. Эта ситуация показана на рисунке 10.

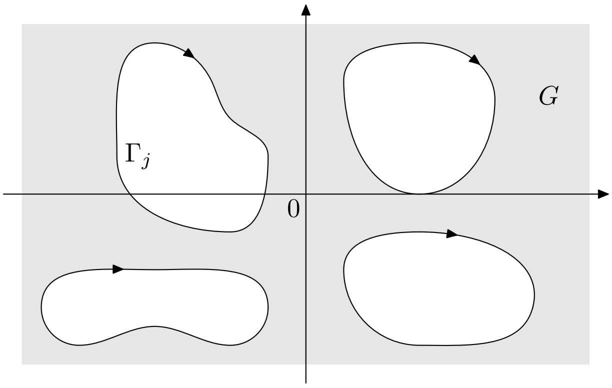

Рис. 10

Область G будем называть *жордановой областью*, если всякая кривая Γ_j есть замкнутая кривая Жордана (стандартная замкнутая кривая). Для такой области непрерывность функции f в G вплоть до границы означает ее непрерывность на $\overline{G}$. Далее при интегрировании по границе области G мы всегда будем предполагать, что каждая граничная компонента Γ_j есть стандартная замкнутая кривая (то есть носитель стандартного замкнутого пути γ_j). Такую область будем называть *стандартной областью со спрямляемой границей.*

Определение 2. Область G с границей Γ называется *звездной относительно точки* $z_0 \in G$, если для любой точки $z \in G \cup \Gamma$ интервал с концами z и z_0 содержится в G.

Перейдем к обобщениям теорем Коши.

Теорема 1. *Пусть G — конечносвязная ограниченная стандартная область со спрямляемой границей Γ, f — функция, регулярная в G и непрерывная в G вплоть до границы. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство мы приведем лишь для случая, когда G — односвязная ограниченная стандартная область, звездная относительно некоторой точки $z_0 \in G$. Пусть $\Gamma = \Gamma_\gamma$, где $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ —

стандартный замкнутый путь. Для любого $p \in (0,1)$ положим

$$\gamma_p(t) = p\bigl(\gamma(t) - z_0\bigr) + z_0, \quad t \in [a,b].$$

Пути γ_p лежат в области G ввиду ее звездности. Действительно, при любом $t \in [a,b]$ точка $\gamma_p(t)$ лежит на интервале, соединяющем z_0 с $\gamma(t)$. Тогда по теореме Коши (для контуров, лежащих внутри области регулярности функции f)

$$\oint\limits_{\gamma_p} f(z)\,dz = 0 \quad \text{при всех } p \in (0,1).$$

Используя определение интеграла по пути γ_p, получаем при всех $p \in (0,1)$ равенство

$$0 = p\int\limits_a^b f\bigl(p\gamma(t) + z_0(1-p)\bigr)\gamma'(t)\,dt. \tag{3}$$

Так как

$$\bigl|p\gamma(t) + z_0(1-p) - \gamma(t)\bigr| \le (1-p)\left(|z_0| + \max_{t\in[a,b]}\bigl|\gamma(t)\bigr|\right),$$

левая часть стремится к нулю при $p \to 1$ равномерно относительно $t \in [a,b]$. Поскольку функция f непрерывна на множестве $\overline{G}$,

$$f\bigl(p\gamma(t) + z_0(1-p)\bigr) \to f\bigl(\gamma(t)\bigr) \quad \text{при} \ \ p \to 1$$

равномерно по $t \in [a,b]$. Далее в равенстве (3) совершаем предельный переход под знаком интеграла при $p \to 1$ и получаем

$$0 = \int\limits_a^b f\bigl(\gamma(t)\bigr)\gamma'(t)\,dt = \int\limits_\gamma f(z)\,dz = \int\limits_\Gamma f(z)\,dz.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Случай ограниченной конечносвязной стандартной области G сводится к доказанному. Действительно, вводя в границу дополнительные отрезки (дважды проходимые в противоположных направлениях), мы можем разбить область G на конечное число односвязных стандартных звездных областей G_j, где $\Gamma = \bigcup\limits_j \Gamma_j$. Для каждой из G_j теорема уже доказана, поэтому

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = \sum_j \int\limits_{\Gamma_j} f(z)\, dz = 0.$$

Например, на рисунке 11 кольцо $G = \{z\colon\ r < |z| < R\}$ разбито отрезками на координатных осях на четыре стандартные звездные области G_j.

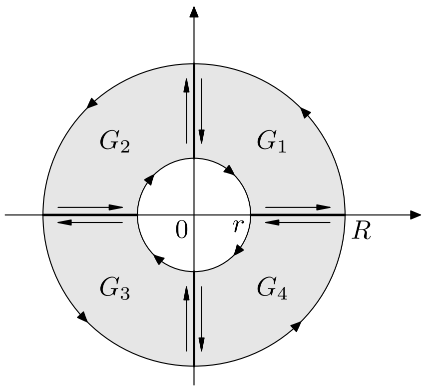

Рис. 11

Теорема 2. *Пусть G — ограниченная конечносвязная область со спрямляемой границей Γ. Если функция f регулярна в G и непрерывна в G вплоть до границы, то для любой точки $z \in G$ имеет место формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Определение 3. Пусть $R > 0$, функция f задана и регулярна в кольце $\{z \in \mathbb{C}\colon\ R < |z| < +\infty\}$. Назовем f *регулярной в* ∞, если существует конечный $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ (обозначим его символом $f(\infty)$).

Теорема 3. *Пусть G — область со спрямляемой границей Γ, содержащая точку ∞. Если функция f регулярна в G и непрерывна в G вплоть до границы, то для каждой точки $z \in G$ имеет место формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + f(\infty).$$

Напомним, что граница Γ положительно ориентирована относительно области G, то есть все компоненты связности границы Γ_j обходятся по ходу часовой стрелки.

Теорема 4. О вычетах. *Пусть G — ограниченная конечно-связная стандартная область с положительно ориентированной, спрямляемой границей Γ. Пусть $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \subset G$, а функция f регулярна в $G \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и непрерывна на $\overline{G} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Тогда имеет место формула*

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{a_j} f.$$

Определение 4. Пусть $R > 0$, функция f регулярна в кольце $\{z \in \mathbb{C}\colon\ R < |z| < +\infty\}$. *Вычетом функции f в ∞* называется число $\mathrm{Res}_{\infty} f$, задаваемое равенством

$$\mathrm{Res}_{\infty} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=R} f(z)\, dz,$$

где контур интегрирования положительно ориентирован по отношению ко внешности круга (то есть окружность проходится по часовой стрелке).

Лемма 1. О сумме вычетов. *Пусть функция f регулярна на $\overline{\mathbb{C}}$ за исключением конечного множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и изолированной особой точки ∞. Тогда верна формула*

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{Res}_{a_j} f + \mathrm{Res}_{\infty} f = 0.$$

Замечание 1. Если ∞ — изолированная особая функции f, то при некотором $R > 0$ функция f представима на множестве $\{z\colon |z| > R\}$ рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Тогда $\mathrm{Res}_\infty f = -c_{-1}$.

Замечание 2. По аналогии с конечной точкой введем три типа изолированной особенности в ∞.

1) Точка ∞ называется *устранимой особой*, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ существует и конечен. В терминах ряда Лорана это означает равенство нулю коэффициентов при положительных степенях z.

2) Точка ∞ называется *полюсом*, если $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$. В терминах ряда Лорана это означает, что положительных степеней z в нем лишь конечное число.

3) Точка ∞ называется *существенно особой*, если она не является ни устранимой, ни полюсом.

Замечание 3. Для вычисления $\mathrm{Res}_\infty f$ можно в интеграле, определяющем этот вычет, сделать замену переменной интегрирования $u = 1/z$. Тогда

$$\mathrm{Res}_\infty f = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|u|=1/R} f\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \frac{1}{u^2}\, du,$$

где контур интегрирования положительно ориентирован относительно круга. Так как точка ∞ — изолированная особая, в некоторой проколотой окрестности нуля у функции $f(1/u)$ нет особых точек. Поэтому

$$\mathrm{Res}_\infty f = -\mathrm{Res}_0 \left(f\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \frac{1}{u^2}\right).$$

Пример. Вычислить $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{dz}{z^5+1}$, где окружность обходится по часовой стрелке.

Решение. Этот интеграл равен $\mathrm{Res}_\infty f$, где $f(z) = 1/(z^5+1)$. Используя замечание 3, мы получим

$$\mathrm{Res}_\infty f = -\mathrm{Res}_0 \left(f\left(\frac{1}{u}\right) \cdot \frac{1}{u^2} \right) = \mathrm{Res}_0 \frac{u^3}{u^5+1}.$$

Последний вычет равен нулю, так как функция $\dfrac{u^3}{u^5+1}$ имеет устранимую особенность в точке 0. Следовательно, искомый интеграл равен нулю. □

Задачи

1. Найти особые точки следующих функций, выяснить характер этих точек, исследовать поведение функций на бесконечности.
a) $e^z/(1+z)$; b) $e^{1/(z-1)}$; c) $(\sin z - \sin a)^{-1}$; d) $e^{1/\operatorname{tg} z}$.

Ответ:

a) $z = -1$ — полюс первого порядка, ∞ — существенно особая точка.

b) $z = 1$ — существенно особая, ∞ — устранимая особая точка.

c) Точки $z_n = (-1)^n a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — полюсы (при $a = \frac{\pi}{2} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$ — второго порядка, для остальных a — первого порядка). Точка ∞ — неизолированная особая.

d) $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — существенно особые точки, точки вида $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — устранимые, ∞ — неизолированная особая точка.

2. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} (z^2+z-1)\, e^{1/z}\, dz$, где окружность ориентирована против часовой стрелки.

Ответ: $-\frac{2\pi i}{3}$.

3. Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $|a| < r < |b|$. Используя лемму о сумме вычетов, найти при $n \in \mathbb{N}$ интеграл $\displaystyle\oint\limits_{|z|=r} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}$, где окружность ориентирована против часовой стрелки.

Ответ: $-2\pi i\,(b-a)^{-n}$.

4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=1} \dfrac{dz}{(z-a)(z-a^{-1})}$ при $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, где окружность ориентирована против часовой стрелки. Доказать с его помощью равенство $\int\limits_0^{2\pi} \dfrac{dt}{1+a^2-2a\cos t} = \dfrac{2\pi}{1-a^2}$.

5. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-a|=1} \dfrac{ze^z}{(z-a)^3}\,dz$, где окружность ориентирована против часовой стрелки.

Ответ: $i\pi e^a(2+a)$.

6. Вычислив интеграл $\oint\limits_{|z|=R} \dfrac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz$ при $|a|, |b| < R$ и оценив его при $R \to +\infty$, доказать следующую теорему: *если функция f регулярна на плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена на ней, то f постоянна.* Это утверждение называется *теоремой Лиувилля.*

7. Доказать, что если функция f регулярна на плоскости $\mathbb{C}$ и $f(z) = o\big(|z|\big)$ при $z \to \infty$, то f — постоянная функция.

8. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma} \dfrac{dz}{1+z^4}$, где эллипс

$$\Gamma = \big\{x + iy\colon\, x^2 - xy + y^2 + x + y = 0\big\}$$

ориентирован против часовой стрелки.

Ответ: $\frac{\pi(i-1)}{2\sqrt{2}}$.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

10. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=r} \overline{e^z}\,dz$, где окружность ориентирована против часовой стрелки.

Ответ: $2\pi i r^2$.

ГЛАВА 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Применение теоремы о вычетах к вычислению собственных интегралов (I тип)

Для вычисления собственного интеграла по отрезку удобно использовать теорему Коши о вычетах (см. теорему 4 § 1 главы 1), которая позволяет находить интегралы по замкнутым контурам. Опишем общую схему применения этой теоремы. Мы составляем композицию подынтегральной функции с отображением, переводящим в отрезок некоторый замкнутый контур комплексной плоскости. Эта композиция аналитически продолжается во внутренность контура за исключением нескольких особых точек. Исходный интеграл сводится к криволинейному интегралу от композиции, который и вычисляется по теореме Коши. Простое продолжение такого типа допускают рациональные функции одной или двух вещественных переменных. Ими мы и будем заниматься в этом параграфе.

Пример 1. При $\varepsilon \in (-1,1)$ вычислить интеграл

$$I(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\varepsilon\cos t}\,dt.$$

Решение. Рассмотрим отображение $z(t) = e^{it}$, $t \in [0,2\pi]$. Тогда $dz = ie^{it}dt$, то есть $dt = \dfrac{dz}{iz}$, и по формуле Эйлера

$$I(\varepsilon) = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\big(1+\frac{\varepsilon}{2}(z+\overline{z})\big)} = \frac{2}{i\varepsilon}\oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+\frac{2}{\varepsilon}z+1}.$$

Корни знаменателя равны

$$z_1 = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}-1}{\varepsilon}, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}+1}{\varepsilon}.$$

Очевидно, $|z_2| > 1$, так как $\varepsilon \in (-1, 1)$. Кроме того, по теореме Виета $z_1 z_2 = 1$, откуда $|z_1| < 1$. Значит, в единичный круг попадает только z_1. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$I(\varepsilon) = \frac{4\pi}{\varepsilon} \operatorname{Res}_{z_1} f = \lim_{z \to z_1} \frac{4\pi(z - z_1)}{\varepsilon(z^2 + \frac{2}{\varepsilon} z + 1)} = \frac{4\pi}{\varepsilon(z_1 - z_2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad \square$$

Напомним, что вычет функции $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ в точке a, являющейся простым корнем функции h, равен

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{g(a)}{h'(a)}. \tag{1}$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I_n(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nt\, dt}{1 - 2a \sin t + a^2} \quad \text{при } \ n \in \mathbb{N}, \ \ a \in \mathbb{C}, \ \ 0 < |a| < 1.$$

Решение. Рассмотрим отображение $z(t) = e^{it}$, переводящее отрезок $[0, 2\pi]$ в единичную окружность. Тогда $dz = ie^{it} dt$, то есть $dt = \dfrac{dz}{iz}$. По формуле Эйлера $\sin nt = \frac{1}{2i}\big(z^n - z^{-n}\big)$ и

$$I_n(a) = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{2n} - 1}{z^n \big(iz(1 + a^2) - az^2 + a\big)}\, dz$$

(окружность обходится против часовой стрелки). Представим интеграл $I_n(a)$ в виде суммы $I_n^+(a) + I_n^-(a)$, где

$$I_n^+(a) = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{z^n\, dz}{iz(1 + a^2) - az^2 + a},$$

$$I_n^-(a) = -\frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{z^{-n}\, dz}{iz(1 + a^2) - az^2 + a}.$$

Пусть f — подынтегральная функция в $I_n^+(a)$. Ее особые точки — корни знаменателя, которые равны $z_1 = ia$ и $z_2 = -\dfrac{1}{ia}$. Поскольку $|a| < 1$, в единичный круг попадает только точка z_1, которая является полюсом первого порядка f. По теореме Коши о вычетах

$$I_n^+(a) = \pi \mathrm{Res}_{z_1} f = \frac{\pi (ia)^n}{i(1+a^2) - 2a(ia)} = \frac{\pi\, i^{n-1} a^n}{1-a^2}.$$

Во втором контурном интеграле сделаем замену переменной интегрирования $z = \dfrac{1}{w}$. Тогда $dz = -\dfrac{dw}{w^2}$. При этом отображении единичная окружность перейдет в себя, но направление ее обхода сменится на противоположное. Мы можем вернуться к положительной ориентации контура, поменяв знак интеграла. Это даст

$$I_n^-(a) = -\frac{1}{2i} \oint\limits_{|w|=1} \frac{w^n\, dw}{iw(1+a^2) - a + aw^2} = -I_n^+(-a) = -\frac{\pi i^{n-1}(-1)^n a^n}{1-a^2}.$$

В итоге мы получим

$$I_n(a) = \frac{\pi a^n i^{n-1}\big(1 + (-1)^{n+1}\big)}{1-a^2} = \begin{cases} 0, & n = 2m, \\ \frac{2\pi(-1)^m a^{2m+1}}{1-a^2}, & n = 2m+1. \end{cases} \qquad \square$$

Пример 3. При $n \in \mathbb{Z}$ вычислить *интеграл Бесселя*

$$J(n) = \int\limits_0^{2\pi} e^{\cos t} \cdot \cos(nt - \sin t)\, dt.$$

Решение. Заметим, что $\cos(nt - \sin t) = \mathrm{Re}\big(e^{itn - i\sin t}\big)$. Поэтому после замены переменной $z = e^{it}$ мы получим

$$J(n) = \mathrm{Re}\Bigg(\oint\limits_{|z|=1} e^{\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})} z^n e^{-\frac{1}{2}(z-\frac{1}{z})} \frac{dz}{iz} \Bigg) = \mathrm{Re}\Bigg(\frac{1}{i} \oint\limits_{|z|=1} z^{n-1} e^{\frac{1}{z}}\, dz \Bigg).$$

Положим $f(z) = z^{n-1} e^{1/z}$. Внутри контура интегрирования функция f имеет единственную особую точку $a = 0$. По теореме Коши о вычетах $J(n) = \operatorname{Re}\bigl(2\pi \operatorname{Res}_a f\bigr)$. Точка a — существенно особая для функции f, поэтому для нахождения вычета в ней необходимо разложить f в ряд Лорана:

$$f(z) = z^{n-1} e^{1/z} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\, z^{n-1-k}.$$

Если $n < 0$, то коэффициент при z^{-1} равен нулю, а в случае $n \geqslant 0$ он равен $\frac{1}{n!}$. Таким образом,

$$J(n) = \operatorname{Re}\bigl(2\pi \operatorname{Res}_a f\bigr) = \begin{cases} 0, & n < 0, \\ \dfrac{2\pi}{n!}, & n \geqslant 0. \end{cases} \qquad \square$$

Задачи

1.1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{dt}{(a + b\cos t)^2}, \quad \text{где } \ a > b > 0.$$

Ответ: $\dfrac{\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$.

1.2. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 2t}{1 - 2a\cos t + a^2}\, dt, \quad \text{где } \ a \in \mathbb{C}, \ \ |a| < 1.$$

Ответ: $\dfrac{\pi\bigl(1 + a^4\bigr)}{1 - a^2}$.

1.3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{\cos^2 t}{1 - a\sin^2 t}\, dt, \quad \text{где } \ a < 1.$$

Ответ: $\dfrac{\pi\bigl(1 - \sqrt{1 - a}\,\bigr)}{a}$.

Опишем теперь в общем виде метод, который мы применяли в разобранных ранее примерах. С его помощью можно получать формулы для вычисления интегралов I типа. Сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть R — рациональная функция двух переменных, определенная на окружности $\{(x, y)\colon\ x^2+y^2=1\}$. Тогда*

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt = 2\pi \sum_{|a|<1} \operatorname{Res}_a \left(\frac{1}{z}\, R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i} \right) \right).$$

Замечание. Сумма в правой части фактически вычисляется по изолированным особым точкам функции, от которой берется вычет. Эта функция рациональна, поэтому таких точек конечное число.

Рассмотренный нами способ сведения определенного интеграла к криволинейному не годится, если определенный интеграл существует только в смысле главного значения. В этом случае часто оказывается удобной другая схема действий. Опишем ее.

1) Удалим из отрезка интегрирования симметричные окрестности особых точек, в которых интеграл сходится лишь в смысле главного значения.

2) Соединим концы оставшихся отрезков так, чтобы получился замкнутый контур.

3) Вычислим интеграл по этому контуру с помощью вычетов.

4) В получившемся равенстве устремим к нулю длины удаленных окрестностей. При этом в левой части окажется сумма искомого интеграла и еще нескольких интегралов, которые необходимо уметь вычислять или оценивать.

Проиллюстрируем описанную схему на примере.

Пример 4. При $a \in (-1, 1)$ вычислить интеграл

$$I(a) = v.p. \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{a + \sin x}.$$

Решение. Заметим, что

$$I(0) = \lim_{r \to 0+} \left(\int\limits_{-\pi}^{-r} \frac{dx}{\sin x} + \int\limits_{r}^{\pi} \frac{dx}{\sin x} \right) = 0,$$

поскольку подынтегральная функция нечетна. Кроме того, замена $x = -t$ дает

$$I(-a) = -v.p. \int\limits_{\pi}^{-\pi} \frac{dt}{-a + \sin(-t)} = -v.p. \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{a + \sin t} = -I(a).$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $a \in (-1, 0)$.

Положим $f(z) = \dfrac{1}{a + \sin z}$. На отрезке $[-\pi, \pi]$ функция f имеет две особые точки: $x_1 = \arcsin |a|$ и $x_2 = \pi - \arcsin |a|$. Поэтому

$$v.p. \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \lim_{\substack{r_1 \to 0 \\ r_2 \to 0}} \Bigg(\int\limits_{-\pi}^{x_1 - r_1} f(x)\, dx + \int\limits_{x_1 + r_1}^{x_2 - r_2} f(x)\, dx + \int\limits_{x_2 + r_2}^{\pi} f(x)\, dx \Bigg).$$

Выберем замкнутый контур $\gamma(r_1, r_2, n)$, показанный на рисунке 12, где полуокружности с центрами x_1 и x_2 имеют радиусы r_1 и r_2 соответственно.

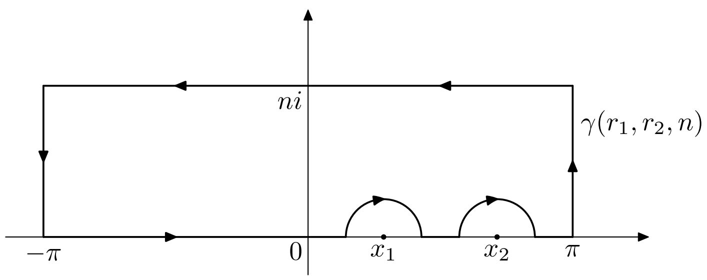

Рис. 12

Заметим, что $a + \sin z \neq 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$. Действительно,

$$\sin(x + iy) = \operatorname{ch} y \cdot \sin x + i \operatorname{sh} y \cdot \cos x.$$

При $y > 0$ либо $\operatorname{Im}(a + \sin z) \neq 0$, либо $\cos x = 0$ и

$$|\sin(x + iy) + a| \geqslant |\operatorname{ch} y \cdot \sin x| - |a| = \operatorname{ch} y - |a| > 1 - |a| > 0.$$

Таким образом, внутри контура $\gamma(r_1, r_2, n)$ функция f не имеет особых точек, и теореме Коши

$$\oint\limits_{\gamma(r_1,r_2,n)} f(z)\,dz = 0.$$

Рассмотрим интегралы по отдельным частям $\gamma(r_1, r_2, n)$. Покажем, что сумма интегралов по вертикальным отрезкам равна нулю. Параметризуя их как $z(y) = \pm\pi + iy$, мы получим

$$\int\limits_0^n \frac{i\,dy}{a+\sin(\pi+iy)} + \int\limits_n^0 \frac{i\,dy}{a+\sin(-\pi+iy)} = \\ = i\left(\int\limits_0^n \frac{dy}{a-\sin iy} - \int\limits_0^n \frac{dy}{a-\sin iy}\right) = 0.$$

Оценим интеграл по отрезку $[-\pi+in, \pi+in]$. В силу приведенного выше равенства

$$\bigl|\sin(x+in)\bigr| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 n\,\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 n\,\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 n} \geqslant \operatorname{sh} n.$$

Тогда

$$\bigl|f(x+in)\bigr| \leqslant \frac{1}{|\sin(x+in)| - |a|} \leqslant \frac{1}{\operatorname{sh} n - |a|}\,,$$

откуда

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+in)\,dx\right| \leqslant \frac{2\pi}{\operatorname{sh} n - |a|} \to 0 \ \text{ при } \ n\to+\infty.$$

Осталось найти пределы интегралов по полуокружностям. Воспользуемся леммой о полувычете, которая будет доказана в § 4. Согласно ей

$$-\lim_{r_1\to 0} \int\limits_{\substack{|z-x_1|=r_1,\\ 0\leqslant\arg(z-x_1)\leqslant\pi}} f(z)\,dz = -\pi i\operatorname{Res}_{x_1} f = -\frac{\pi i}{\cos x_1}.$$

Аналогично интеграл по второй полуокружности стремится при $r_2 \to 0$ к
$$-\frac{\pi i}{\cos x_2} = -\frac{\pi i}{\cos(\pi - x_1)} = \frac{\pi i}{\cos x_1}.$$
Значит, сумма этих пределов равна нулю. Устремляя теперь r_1 и r_2 к нулю, а n к $+\infty$, мы получим, что $I(a) = 0$ при $a \in (-1, 1)$. $\square$

§ 2. Вычисление несобственных абсолютно сходящихся интегралов (II тип)

В этом параграфе мы рассмотрим абсолютно сходящиеся интегралы по вещественной оси от непрерывных на $\mathbb{R}$ функций f, удовлетворяющих следующим требованиям. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} a_k > 0$ при $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и
$$G = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}.$$
Мы будем предполагать, что функция f имеет непрерывное продолжение на G, регулярное во внутренних точках G. Такое продолжение назовем *стандартным.*

Пример 1. Вычислить *интеграл Валлиса*
$$I(n) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \quad \text{при} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Положим $f(z) = \left(1 + z^2\right)^{-n}$. Функция f не обращается в ноль на $\mathbb{R}$ и $f(x) \sim x^{-2n}$ при $x \to \pm\infty$. Поэтому интеграл $I(n)$ абсолютно сходится при любом $n \in \mathbb{N}$. С учетом четности f мы можем записать
$$I(n) = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2} \lim_{R \to +\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\, dx.$$
Точка i — полюс n-го порядка функции f, и это единственная особая точка f в верхней полуплоскости. Найдем вычет f в точке i:
$$\operatorname{Res}_i f = \frac{1}{(n-1)!}(-n)(-n-1)\cdots(-n-n+2) \lim_{z \to i} (z+i)^{-2n+1} =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)\cdots(2n-2)(2i)^{-2n+1}}{(n-1)!} = \frac{-2i\,(2n-2)!}{4^n\big((n-1)!\big)^2}.$$

Пусть G — пересечение круга радиуса R с верхней полуплоскостью, а γ_R — его граница, ориентированная стандартным образом (см. рисунок 13).

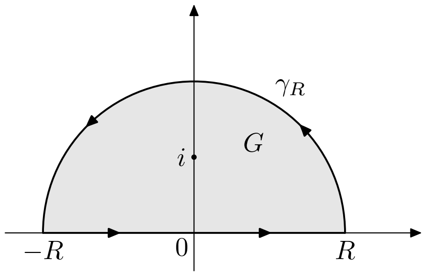

Рис. 13

Если $R > 1$, то $i \in G$. Применяя для таких R теорему Коши о вычетах, мы получим

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)\,dz = \oint\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f = \frac{4\pi(2n-2)!}{4^n\big((n-1)!\big)^2}.$$

Докажем, что интеграл по полуокружности стремится к нулю при $R \to +\infty$. Если $|z| = R > 1$, то

$$|f(z)| \geqslant \frac{1}{\big(|z|^2-1\big)^n} = \frac{1}{\big(R^2-1\big)^n},$$

откуда

$$\Bigg|\int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)\,dz\Bigg| \leqslant \frac{\pi R}{\big(R^2-1\big)^n} \sim \frac{\pi}{R^{2n-1}} \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

Таким образом, устремляя R к $+\infty$, мы получим

$$I(n) = \pi i \operatorname{Res}_i f = \frac{2\pi(2n-2)!}{4^n\big((n-1)!\big)^2}. \quad \square$$

Пример 2. При $n \in \mathbb{N}$ вычислить интеграл

$$J_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n} + x^n + 1}.$$

Решение. Положим $f(z) = \dfrac{1}{z^{2n} + z^n + 1}$. Особые точки f находятся из уравнения

$$0 = z^{2n} + z^n + 1 = \frac{z^{3n} - 1}{z^n - 1}.$$

Значит, z^n — кубические корни из единицы, отличные от 1, то есть $z^n = \exp\left(\pm \frac{2\pi i}{3}\right)$. Такие точки z являются простыми полюсами f. Найдем вычет f в одной из них. В силу равенства $2z^{2n} + 2z^n = -2$ мы получим

$$\operatorname{Res}_z f = \frac{1}{2nz^{2n-1} + nz^{n-1}} = \frac{z/n}{2z^{2n} + 2z^n - z^n} = \frac{z/n}{-2 - z^n} =$$
$$= \frac{z/n}{-2 - e^{\pm 2\pi i/3}} = \frac{z}{\sqrt{3}n} \frac{2}{(-\sqrt{3} \mp i)} = \frac{z}{n\sqrt{3}} \frac{(-\sqrt{3} \pm i)}{2} = \frac{z\, e^{\pm 5\pi i/6}}{n\sqrt{3}}.$$

Найдем явные выражения для полюсов f:

$$z_k^+ = \exp\left(\tfrac{2\pi i\,(3k+1)}{3n}\right), \quad z_k^- = \exp\left(\tfrac{2\pi i\,(3k-1)}{3n}\right), \quad k \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Выберем вновь G и контур γ_R так, показано на рисунке 13. Чтобы применить рассуждения примера 1, нам надо отобрать те полюсы функции f, которые лежат в верхней полуплоскости. В случае z_k^+ мы получаем условие $2(3k+1) \leqslant 3n$, откуда $0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n-1}{2}\right]$ (здесь квадратные скобки означают целую часть числа). Аналогичным образом условие $\operatorname{Im} z_k^- \geqslant 0$ эквивалентно неравенствам $1 \leqslant k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ (отметим, что при $n = 1$ таких z_k^- нет). Применяя к f и G тот же метод, что в примере 1, мы получим

$$J_n = \lim_{R \to +\infty} \oint\limits_{\gamma_R} f(z)\, dz = \frac{2\pi i}{n\sqrt{3}} \left(e^{\frac{5\pi i}{6}} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} z_k^+ + e^{-\frac{5\pi i}{6}} \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} z_k^- \right). \quad \square$$

Замечание. Полученный ответ нуждается в упрощении. Фигурирующие в нем суммы можно свести к суммам геометрических прогрессий и вычислить их. Кроме того, надо расписать отдельно случаи четных и нечетных n, чтобы избавиться от целой части. Предлагаем читателю сделать это самостоятельно. Далее мы вычислим J_n более рациональным способом, используя результат примера 3, и получим ответ в упрощенном виде.

Рассмотрим интегралы по полуоси от рациональных функций, не обладающих свойством четности.

Пример 3. При $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ вычислить интеграл

$$I_n = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

Решение. Найдем более общий интеграл

$$I_n(t) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n - e^{it}}\,, \quad \text{где } t \in (0, 2\pi).$$

Тогда исходный интеграл равен $I_n(\pi)$. Положим $f(z) = \dfrac{1}{z^n - e^{it}}$. Рассмотрим контур интегрирования, показанный стрелками на рисунке 14.

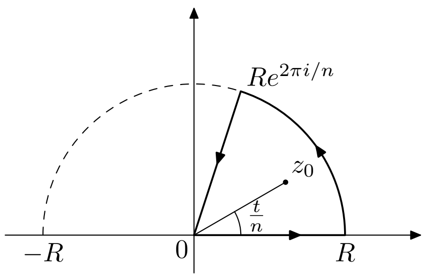

Рис. 14

Внутри этого контура функция f имеет единственную особую точку $z_0 = e^{it/n}$, которая является полюсом первого порядка. По теореме Коши о вычетах интеграл по этому контуру равен

$$2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{2\pi i}{nz_0^{n-1}} = \frac{2\pi i z_0}{nz_0^n} = \frac{2\pi i z_0}{ne^{it}} = \frac{2\pi i}{n}\, e^{i\,t(1-n)/n}.$$

С другой стороны, интеграл по рассматриваемому замкнутому контуру равен сумме трех интегралов — по двум отрезкам и по дуге. Интеграл по дуге бесконечно мал при $R \to +\infty$, поскольку он допускает оценку

$$\max_{|z|=R} \bigl|f(z)\bigr| \cdot \frac{2\pi R}{n} \leqslant \frac{2\pi R}{n\bigl(R^n - 1\bigr)} \sim \frac{2\pi}{nR^{n-1}} \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

Параметризуем наклонный отрезок по формуле $z = re^{2\pi i/n}$, где $r \in [0, R]$. Тогда интеграл по этому отрезку равен

$$-e^{2\pi i/n} \int\limits_0^R \frac{dr}{r^n - e^{it}}.$$

Устремляя R к $+\infty$, мы получим

$$\frac{2\pi i}{n}\, e^{i\,t(1-n)/n} = I_n(t) - e^{2\pi i/n} \cdot I_n(t) = -I_n(t) e^{\pi i/n}\, 2i \sin\tfrac{\pi}{n}.$$

Отсюда находим

$$I_n(t) = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}\, e^{i(t-\pi)(1-n)/n} \quad \text{и, в частности,} \quad I_n(\pi) = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}. \quad \square$$

Этот пример показывает, что к каждой задаче нужно подходить творчески, а не подгонять ее под общую схему.

Замечание. В случае $t = 0$ или $t = 2\pi$ знаменатель f равен $x^n - 1$ и обращается в ноль при $x = 1$. Для таких t интеграл необходимо понимать в смысле главного значения. Мы рассмотрим интегралы подобного типа в § 4.

Используя полученное значение $I_n(t)$, вычислим интегралы

$$I_n^{\pm} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n} \pm x^n + 1}.$$

Ясно, что

$$I_n^+ = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^n - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\left(x^n - e^{\frac{4\pi i}{3}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{\frac{4\pi i}{3}}} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^n - e^{\frac{2\pi i}{3}}} - \frac{1}{x^n - e^{\frac{4\pi i}{3}}} \right) dx = \frac{I_n\left(\frac{2\pi}{3}\right) - I_n\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{i\sqrt{3}}.$$

Аналогичным образом получаем

$$I_n^- = \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^n - e^{\frac{\pi i}{3}}\right)\left(x^n - e^{\frac{5\pi i}{3}}\right)} = \frac{I_n\left(\frac{\pi}{3}\right) - I_n\left(\frac{5\pi}{3}\right)}{i\sqrt{3}}.$$

Пример 2 (продолжение). Приведем теперь второй способ вычисления интеграла J_n из примера 2. Заметим, что

$$J_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n} + x^n + 1} = I_n^+ + \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{2n} + (-1)^n x^n + 1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_{2m} &= 2I_{2m}^+ = \frac{4\pi \sin\frac{\pi(2m-1)}{6m}}{2m\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2m}}, \\ J_{2m+1} &= I_{2m+1}^+ + I_{2m+1}^- = \\ &= 2\pi \left(\frac{\sin\frac{2m\pi}{3(2m+1)}}{(2m+1)\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2m+1}} + \frac{\sin\frac{4m\pi}{3(2m+1)}}{(2m+1)\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2m+1}} \right). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$J_n = \begin{cases} 4\pi\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3n}\right) / \left(n\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{n}\right), & n = 2m; \\ 4\pi\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{2n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right) / \left(n\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{n}\right), & n = 2m+1; \\ 2\pi/\sqrt{3}, & n = 1. \end{cases}$$

Заметим, что интегралы J_2, J_4 совпадают и равны $\pi/\sqrt{3}$. $\square$

Рассмотрим теперь многозначную функцию на $(0, +\infty)$, имеющую ветвь, которая регулярна в верхней полуплоскости и непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Пример 4. При $p \in (-1, 3)$ вычислить интеграл

$$J(p) = \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(1+x^2)^2}\, dx.$$

Решение. При $p \in (-1, 3)$ вычислить интеграл $J(p)$ сходится. Положим

$$f(z) = \frac{z^p}{\left(1+z^2\right)^2}, \quad \text{где } \ z^p = |z|^p e^{ip\arg z}, \ \ \arg z \in [0, \pi].$$

Функция f регулярна в области $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z > 0,\ z \neq i\}$ и непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. В точке i функция f имеет полюс второго порядка, и вычет в нем равен

$$\operatorname{Res}_i f = \lim_{z \to i} \left(\frac{z^p}{(z+i)^2} \right)' = \left(\frac{pz^{p-1}(z+i) - 2z^p}{(z+i)^3} \right)\Bigg|_{z=i} = \frac{i(p-1)e^{\frac{\pi i p}{2}}}{4}.$$

Рассмотрим замкнутый контур $\gamma_{R,r}$, носитель которого состоит из отрезков $[-R, -r]$, $[r, R]$ и полуокружностей радиусом R и r, лежащих в верхней полуплоскости. Контур $\gamma_{R,r}$ положительно ориентирован относительно верхнего полукольца. По теореме Коши о вычетах

$$\oint_{\gamma_{R,r}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f = \frac{\pi(1-p)e^{\frac{\pi i p}{2}}}{2}. \tag{2}$$

С другой стороны, по аддитивности интеграла

$$\oint_{\gamma_{R,r}} f = \int_{-R}^{-r} f(x)\, dx + \int_r^R f(x)\, dx + \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi}} f(z)\, dz - \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi}} f(z)\, dz.$$

Сделаем в первом интеграле замену $t = -x$. Так как $(-t)^p = t^p e^{\pi i p}$ при $t > 0$,

$$\int_{-R}^{-r} \frac{x^p}{\bigl(1+x^2\bigr)^2}\,dx = -\int_{R}^{r} \frac{t^p e^{\pi i p}}{\bigl(1+t^2\bigr)^2}\,dt = e^{\pi i p}\int_{r}^{R} \frac{t^p}{\bigl(1+t^2\bigr)^2}\,dt.$$

Поэтому при $r \to 0+$ и $R \to +\infty$

$$\int_{-R}^{-r} f(x)\,dx + \int_{r}^{R} f(x)\,dx = \bigl(1+e^{\pi i p}\bigr)\int_{r}^{R} f(x)\,dx \to \bigl(1+e^{\pi i p}\bigr)J(p).$$

Покажем, что интегралы по полуокружностям стремятся к нулю. Если $|z| = R > 1$, то

$$\bigl|f(z)\bigr| \leqslant \frac{|z|^p}{\bigl(|z|^2-1\bigr)^2} = \frac{R^p}{(R^2-1)^2},$$

откуда

$$\Biggl|\int\limits_{\substack{|z|=R,\\ 0\leqslant \arg z\leqslant \pi}} f(z)\,dz\Biggr| \leqslant \frac{R^p}{(R^2-1)^2}\cdot \pi R \sim \pi R^{p-3} \to 0 \quad (R\to+\infty).$$

Аналогичным образом мы получим

$$\Biggl|\int\limits_{\substack{|z|=r,\\ 0\leqslant \arg z\leqslant \pi}} f(z)\,dz\Biggr| \leqslant \frac{r^p}{(1-r^2)^2}\cdot \pi r \sim \pi r^{p+1} \to 0 \quad (r\to 0+).$$

Таким образом, предельный переход в (2) при $r \to 0+$ и $R \to +\infty$ дает

$$\bigl(1+e^{\pi i p}\bigr)J(p) = \frac{\pi(1-p)e^{\frac{\pi i p}{2}}}{2}.$$

Отсюда вытекает, что

$$J(p) = \begin{cases} \frac{\pi(1-p)}{4\cos(\pi p/2)}, & p \neq 1,\\ \frac{1}{2}, & p = 1. \end{cases}$$

Вторая формула получается из первой предельным переходом при $p \to 1$, поскольку $J(p)$ непрерывно зависит от p. $\square$

Обобщая метод, которым мы решали рассмотренные примеры, докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть функция $f \in C(\mathbb{R})$ удовлетворяет следующим условиям.*

1) Существует непрерывное продолжение f (также обозначаемое через f) на множество

$$G = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_m\},$$

где $\operatorname{Im} a_k > 0$ при $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

2) Это продолжение регулярно внутри G.

3) Существуют такие $M > 0$, $p > 1$ и $R_0 > 0$, что

$$\bigl|f(z)\bigr| \leqslant M|z|^{-p} \quad \text{при } z \in G, \ |z| \geqslant R_0.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}_{a_k} f.$$

Доказательство. Заметим, что в силу 3) искомый интеграл абсолютно сходится и равен $\lim\limits_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx$. Точки $a_1, \ldots, a_m$ будут для функции $f(z)$ изолированными особыми. Пусть γ_R — замкнутый путь, показанный на рисунке 13 (его носитель — граница полукруга радиуса R, а обход идет против часовой стрелки). Если $R > \max\{|a_1|, \ldots |a_m|, R_0\}$, то все особые точки a_k лежат внутри контура интегрирования, то есть в множестве G_0. По теореме Коши о вычетах

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}_{a_k} f.$$

С другой стороны, по аддитивности интеграла

$$\oint_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} f(z)\,dz.$$

Оценим интеграл по полуокружности. В силу условия 3)

$$\Bigl|\int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)\,dz\Bigr| \leqslant \max_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} \bigl|f(z)\bigr|\cdot \pi R \leqslant \pi M R^{1-p} \to 0 \quad (R\to+\infty).$$

Поэтому предельный переход при $R\to+\infty$ дает

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}_{a_k} f. \quad \square$$

Задачи

2.1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{x^4+6x^2+25}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}$.

2.2. При $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$ вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^n\,dx}{1+x^{2n}}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2n\cos\frac{\pi}{2n}}$.

Указание. Сделать замену переменной $x^n=t$ или использовать подходящий контур интегрирования (см. пример 3).

2.3. При $a>0$ вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\ln x}{x^2+a^2}\,dx.$$

Ответ: $\dfrac{\pi\,(\ln a^2+\pi)}{\sqrt{8a}}$.

§ 3. Вычисление интегралов, сходящихся в бесконечности в смысле главного значения (III тип)

В этом параграфе речь пойдет о несобственных интегралах по вещественной оси, сходящихся на бесконечности в смысле главного значения. Такой тип сходимости уже встречался нам в примере 4 § 1, но там речь шла о конечной особой точке. Сейчас мы введем аналогичное понятие на бесконечности.

Определение 1. Пусть $F \in C(\mathbb{R})$. Положим

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{-R}^{R} F(x)\,dx.$$

Если предел в правой части существует и конечен, то говорят, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$ *сходится в смысле главного значения* к этому пределу.

Замечание 1. Если $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$ сходится как несобственный к некоторому числу I, то он сходится к I и в смысле главного значения. Обратное неверно: $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$, но как несобственный этот интеграл расходится.

Замечание 2. Основным объектом изучения в этом параграфе будут интегралы от функций вида $F(x) = f(x)e^{iax}$, где $a \in \mathbb{R}$. Вначале мы рассмотрим несколько примеров вычисления интегралов от таких функций. Затем будут приведены достаточные условия на функцию f, при которых интеграл от F существует в смысле главного значения, а также формула для вычисления этого интеграла (см. утверждение 1 в конце параграфа).

Пример 1. При $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ вычислить интеграл

$$J(a) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x}{\left(a^2 + x^2\right)^2}\,dx.$$

Решение. Рассмотрим функцию $F(z) = \dfrac{e^{iz}}{\left(a^2+z^2\right)^2}$. Мнимая часть $F\big|_{\mathbb{R}}$ нечетна, откуда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\left(a^2+x^2\right)^2}\,dx = 2J(a).$$

Будем считать, что $a > 0$, а затем в ответе заменим a на $|a|$. Функция F регулярна в $\mathbb{C}$ за исключением точек $\pm ia$, которые являются полюсами F второго порядка. В верхней полуплоскости лежит только точка ia. Найдем вычет F в ней:

$$\mathrm{Res}_{ia}F = \lim_{z\to ia}\left(\frac{e^{iz}}{(z+ia)^2}\right)' = \frac{e^{iz}\big(i(z+ia)-2\big)}{(z+ia)^3}\bigg|_{z=ia} = \frac{(a+1)e^{-a}}{4ia^3}.$$

Рассмотрим замкнутый контур γ_R, показанный на рисунке 13. По теореме Коши о вычетах

$$\oint_{\gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{ia}F = \frac{\pi(a+1)e^{-a}}{2a^3}.$$

С другой стороны, левая часть равна сумме интегралов по отрезку $[-R,R]$ и по полуокружности $C_R = \{z\colon\ |z| = R,\ \mathrm{Im}\,z \geqslant 0\}$. Покажем, что интеграл по C_R стремится к нулю при $R\to+\infty$. Если $|z| = R > a$ и $\mathrm{Im}\,z \geqslant 0$, то

$$|F(z)| \leqslant \frac{\left|e^{iz}\right|}{(|z|^2-a^2)^2} \leqslant \frac{e^{-\mathrm{Im}\,z}}{(R^2-a^2)^2} \leqslant \frac{1}{(R^2-a^2)^2},$$

откуда

$$\left|\int_{C_R} F(z)\,dz\right| \leqslant \frac{1}{(R^2-a^2)^2}\cdot\pi R \sim \frac{\pi}{R^3} \to 0 \quad (R\to+\infty).$$

Тогда предельный переход при $R\to+\infty$ дает

$$2J(a) = \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} F(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_R} F(z)\,dz = \frac{\pi(a+1)e^{-a}}{2a^3}.$$

Заменяя теперь a на $|a|$, мы получим окончательный ответ:

$$J(a) = \frac{\pi(|a|+1)e^{-|a|}}{4|a|^3}. \quad \square$$

Пример 2. При $t > 0$ вычислить интеграл

$$I(t) = \int\limits_{1-i\infty}^{1+i\infty} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\, dz.$$

Решение. Положим $z(u) = 1 + iu$, $u \in \mathbb{R}$. Тогда

$$I(t) = ie^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\,tu}\, du}{1+(1+iu)^2}.$$

Так как

$$\left|\frac{e^{itu}}{1+(1+iu)^2}\right| = \frac{1}{|2-u^2+2iu|} = \frac{1}{\sqrt{u^4+4}} \sim \frac{1}{u^2} \quad (u \to \infty),$$

интеграл в правой части абсолютно сходится. Поэтому

$$I(t) = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{1-iR}^{1+iR} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\, dz.$$

Рассмотрим замкнутый кусочно-гладкий путь γ_R, показанный на рисунке 15. Его носитель состоит из отрезка $[1-iR, 1+iR]$ и полуокружности радиуса R с центром 1. Положим $f(z) = \dfrac{e^{tz}}{z^2+1}$. Особыми для функции f будут точки $\pm i$. Обе они лежат внутри контура γ_R и являются полюсами первого порядка f. По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}_i f + \mathrm{Res}_{-i} f\big) = 2\pi i\left(\frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i}\right) = 2\pi i \sin t.$$

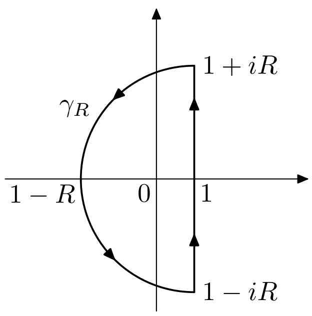

Рис. 15

С другой стороны, рассмотрим интегралы по отдельным частям контура γ_R. Интеграл по отрезку $[1-iR, 1+iR]$ стремится к искомому интегралу $I(t)$ при $R \to +\infty$. Покажем, что интеграл по полуокружности стремится к нулю. Сделаем в нем замену переменной $w = i(1-z)$. Тогда

$$\int\limits_{\substack{|z-1|=R,\\ \operatorname{Re} z\leqslant 1}} f(z)\,dz = ie^t \int\limits_{\substack{|w|=R,\\ \operatorname{Im} w\geqslant 0}} \frac{e^{itw}}{(1+iw)^2+1}\,dw.$$

Интеграл в правой части удовлетворяет условиям леммы Жордана и потому стремится к нулю при $R \to +\infty$. Таким образом,

$$I(t) = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_{1-iR}^{1+iR} f(z)\,dz = \lim_{R\to+\infty} \oint\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sin t. \quad \square$$

В рассмотренных примерах несобственные интегралы от функций вида $F(x) = f(x)e^{iax}$ сходились абсолютно, поскольку при некотором $k > 1$ выполнялось условие $f(x) = O\big(|x|^{-k}\big)$ $(x \to \pm\infty)$. Если же функция f достаточно медленно стремится к нулю на бесконечности, то интеграл от F может сходиться лишь условно или даже в смысле главного значения. В такой ситуации для оценки интегралов по полуокружностям нам окажется полезной лемма Жордана, без которой в двух предыдущих примерах можно было обойтись.

Пример 3. При $a > 0$ вычислить интеграл

$$I(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin ax}{1+x^4}\, dx.$$

Решение. Заметим, что $I(a)$ абсолютно не сходится, но сходится по признаку Дирихле. Так как подынтегральная функция четна и $\sin ax = \operatorname{Im} e^{iax}$, справедливо равенство

$$I(a) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}\, e^{iax}\, dx = \frac{1}{2i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4}\, e^{iax}\, dx$$

(последний переход вытекает из нечетности вещественной части подынтегральной функции). Положим

$$f(z) = \frac{z^3}{1+z^4}, \quad F(z) = f(z) e^{iaz}.$$

Эти функции имеют в верхней полуплоскости две особые точки: $z_1 = e^{i\pi/4}$ и $z_2 = e^{3i\pi/4}$. По формуле (1) вычеты F в них равны

$$\operatorname{Res}_{z_k} F = \frac{z_k^3\, e^{iaz_k}}{4z_k^3} = \frac{e^{iaz_k}}{4} = \frac{e^{-a/\sqrt{2}}\big(\cos\big(a/\sqrt{2}\,\big) \pm i \sin\big(a/\sqrt{2}\,\big)\big)}{4}.$$

Пусть γ_R — замкнутый контур, показанный на рисунке 13. По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma_R} F(z)\, dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z_1} F + \operatorname{Res}_{z_2} F\right) = \pi i\, e^{-a/\sqrt{2}} \cos\big(a/\sqrt{2}\,\big).$$

С другой стороны, рассмотрим интегралы по отдельным частям контура γ_R. Интеграл по отрезку $[-R, R]$ стремится к $2iI(a)$ при $R \to +\infty$. Интеграл по полуокружности стремится к нулю. Это вытекает из леммы Жордана, поскольку $f(z) = O\big(|z|^{-1}\big)$ $(z \to \infty)$. Таким образом, предельный переход при $R \to +\infty$ дает

$$I(a) = \frac{1}{2i} \lim_{R\to+\infty} \oint\limits_{\gamma_R} F(z)\, dz = \frac{\pi e^{-a/\sqrt{2}}}{2} \cos\big(a/\sqrt{2}\,\big). \quad \square$$

Подводя итог разобранным примерам, докажем общее правило вычисления интегралов, существующих в смысле главного значения.

Утверждение 1. *Положим* $G = \{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0\} \setminus \{a_1, \dots, a_m\}$, *где* $\operatorname{Im} a_k > 0$ *при* $k \in \{1, \dots m\}$. *Пусть функция* $f\colon G \to \mathbb{C}$ *удовлетворяет двум условиям.*

1) f *непрерывна на* G *и регулярна внутри* G.

2) $\lim\limits_{\substack{z\to\infty,\\ z\in G}} f(z) = 0$.

Тогда для любого $a > 0$ *интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx$ *сходится в смысле главного значения, и справедлива формула*

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}_{a_k} f(z)e^{iaz}.$$

Доказательство. Пусть γ_R — замкнутый путь, показанный на рисунке 13. При достаточно большом R все точки a_k попадут внутрь контура интегрирования. Эти точки являются изолированными особыми для функции $F(z) = f(z)\,e^{iaz}$. По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}_{a_k} F.$$

С другой стороны, по аддитивности интеграла

$$\oint\limits_{\gamma_R} F(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{R} F(x)\,dx + \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} f(z)\,e^{iaz}\,dz.$$

Второй интеграл стремится к нулю при $R \to +\infty$ в силу леммы Жордана. Поэтому предельный переход дает

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{-R}^{R} F(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\oint\limits_{\gamma_R} F(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Res}_{a_k} F.$$

Левая часть этого равенства и есть $v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}\,dx$. $\square$

Задачи

3.1. При $t > 0$ вычислить интеграл

$$\int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{tz}\,dz}{(z^2-1)^2}.$$

Ответ: $\dfrac{i\pi}{2}(1+t)\,e^{-t}$.

3.2. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+x+1}\,dx.$$

Ответ: $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\,e^{-\sqrt{3}/2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\right)$.

§ 4. Лемма о полувычете. Интегралы IV типа

Утверждение 1. *Пусть множество G открыто в $\mathbb{C}$, $a \in G$, функция g регулярна в $G \setminus \{a\}$ и имеет в точке a полюс первого порядка. Пусть $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi]$ и функция f непрерывна на множестве $S = \{z \in G\colon \arg(z-a) \in [\alpha, \beta]\} \cup \{a\}$. Положим $\gamma_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда*

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\gamma_r} f(z)g(z)\,dz = i(\beta-\alpha)f(a)\operatorname{Res}_a g.$$

Носитель пути γ_r — дуга окружности радиуса r с центром в точке a.

Доказательство. Покажем вначале, что для непрерывной на S функции φ справедливо равенство

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\gamma_r} \frac{\varphi(z)}{z-a}\,dz = i(\beta-\alpha)\varphi(a).$$

Положим $m(r) = \max\limits_{\substack{|z-a|=r,\\ z\in S}} \bigl|\varphi(z) - \varphi(a)\bigr|$. Тогда $m(r) \to 0$ при $r \to 0$ в силу непрерывности φ в точке a. Поскольку

$$\left|\int\limits_{\gamma_r} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z-a}\, dz\right| \leqslant \frac{m(r)}{r} \cdot r(\beta - \alpha) = m(r)(\beta - \alpha) \to 0 \quad (r \to 0),$$

мы получаем

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\gamma_r} \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz = \lim_{r\to 0} \int\limits_{\gamma_r} \frac{\varphi(a)}{z-a}\, dz = \lim_{r\to 0} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\varphi(a) ire^{it}\, dt}{re^{it}} = i(\beta-\alpha)\varphi(a),$$

и требуемое равенство доказано.

Положим теперь $\varphi(z) = f(z)(z-a)g(z)$ при $z \neq a$. Заметим, что $\lim\limits_{z\to a}(z-a)g(z) = \mathrm{Res}_a g$, так как a — полюс первого порядка g. Если положить $\varphi(a) = f(a)\,\mathrm{Res}_a g$, функция φ станет непрерывной и в точке a. Применяя к φ доказанное выше равенство, мы получим

$$\lim_{r\to 0} \int\limits_{\gamma_r} f(z)g(z)\, dz = \lim_{r\to 0} \int\limits_{\gamma_r} \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz = i(\beta - \alpha) f(a)\,\mathrm{Res}_a g. \quad \square$$

Замечание. Наиболее часто утверждение 1 используется в ситуации, когда γ_r — полуокружность радиуса r с центром в точке a, то есть $[\alpha, \beta] = [0, \pi]$. В этом случае утверждение 1 называют *леммой о полувычете*. Функцию f обычно полагают равной единице.

В этом параграфе нам будут часто встречаться интегралы от функций с разрывами на интервале интегрирования. Договоримся понимать их в смысле главного значения. Определим это понятие.

Определение 1. Пусть $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$, функция f непрерывна на $\langle a, b\rangle \setminus \{c\}$. Положим

$$v.p. \int\limits_a^b f(x)\, dx = \lim_{r\to 0+} \Biggl(\int\limits_a^{c-r} f(x)\, dx + \int\limits_{c+r}^{b} f(x)\, dx\Biggr).$$

Если предел в правой части существует и конечен, то говорят, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *сходится в смысле главного значения* к этому пределу.

Замечание 1. Если $\int\limits_a^b F(x)\,dx$ сходится как несобственный к некоторому числу I, то он сходится к I и в смысле главного значения.

Замечание 2. Пусть функция f имеет на $\langle a, b\rangle$ несколько точек разрыва. Тогда мы разбиваем $\langle a, b\rangle$ на промежутки $\langle a_k, b_k\rangle$ так, чтобы внутри каждого из них была лишь одна точка разрыва, и полагаем

$$v.p.\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum_k v.p.\int\limits_{a_k}^{b_k} f(x)\,dx.$$

Интеграл в левой части называется сходящимся в смысле главного значения, если таковыми являются все интегралы в правой части. Несложно доказать корректность такого определения.

Пример 1. Для любого $a \in \mathbb{R}$ вычислить интеграл

$$J(a) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

Решение. Очевидно, что $J(0) = 0$ и $J(-a) = -J(a)$. Поэтому мы проведем вычисления только для $a > 0$. Положим $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z}$. По формуле Эйлера

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{r\to 0+}\left(\int\limits_{-\infty}^{-r} \frac{\cos ax}{x}\,dx + \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x}\,dx\right) + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

Под знаком предела стоит ноль ввиду нечетности подынтегральной функции. Поэтому

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = iJ(a).$$

Рассмотрим замкнутый путь $\gamma_{R,r}$, показанный стрелками на рисунке 16. Обозначим полуокружности радиусов r и R символами C_r и C_R соответственно.

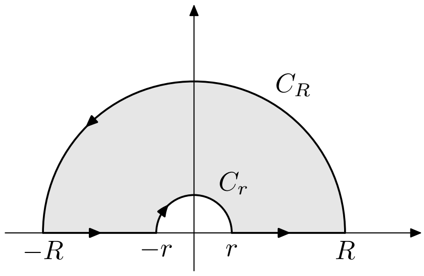

Рис. 16

Так как функция f непрерывна на носителе $\gamma_{R,r}$ и регулярна внутри $\gamma_{R,r}$, по теореме Коши

$$0 = \oint\limits_{\gamma_{R,r}} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{-r} f(x)\,dx + \int\limits_{r}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_r} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz.$$

Заметим, что

$$\lim_{r\to 0+}\left(\lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{-R}^{-r} f(x)\,dx + \int\limits_{r}^{R} f(x)\,dx\right)\right) = v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = iJ(a).$$

Интеграл по C_R стремится к нулю при $R \to +\infty$ в силу леммы Жордана. Наконец, применим к интегралу по C_r лемму о полувычете:

$$\lim_{r\to 0+}\int\limits_{C_r(0)} \frac{e^{iaz}}{z}\,dz = -\pi i\,\mathrm{Res}_0\frac{e^{iaz}}{z} = -\pi i.$$

Переходя к пределу сначала при $R \to +\infty$, затем при $r \to 0+$, мы получим $iJ(a) - \pi i = 0$, где $a > 0$. Тогда для произвольного $a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \pi\,\mathrm{sign}\,a. \quad \square$$

Пример 2. При $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ вычислить интеграл

$$J(a) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2}\, dx.$$

Решение. Так как $J(-a) = J(a)$ и $J(0) = 0$, мы проведем вычисления только для $a > 0$. Положим $f(z) = \dfrac{1 - e^{iaz}}{z^2}$. По формуле Эйлера

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2J(a) - i \cdot \lim_{r \to 0+} \Biggl(\int\limits_{-\infty}^{-r} \frac{\sin ax}{x^2}\, dx + \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^2}\, dx \Biggr).$$

Под знаком предела стоит ноль ввиду нечетности подынтегральной функции. Поэтому

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2J(a).$$

Рассмотрим замкнутый путь $\gamma_{R,r}$, показанный стрелками на рисунке 16. Обозначим полуокружности радиусов r и R символами C_r и C_R соответственно. Так как функция f непрерывна на носителе пути $\gamma_{R,r}$ и регулярна внутри $\gamma_{R,r}$, по теореме Коши

$$0 = \oint\limits_{\gamma_{R,r}} f(z)\, dz = \int\limits_{-R}^{-r} f(x)\, dx + \int\limits_{r}^{R} f(x)\, dx + \int\limits_{C_r} f(z)\, dz + \int\limits_{C_R} f(z)\, dz.$$

Заметим, что

$$\lim_{r \to 0+} \Biggl(\lim_{R \to +\infty} \Biggl(\int\limits_{-R}^{-r} f(x)\, dx + \int\limits_{r}^{R} f(x)\, dx \Biggr) \Biggr) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2J(a).$$

Покажем, что интеграл по C_R стремится к нулю при $R \to +\infty$. Действительно,

$$\int\limits_{C_R} f(z)\, dz = \int\limits_{C_R} \frac{dz}{z^2} - \int\limits_{C_R} \frac{e^{iaz}\, dz}{z^2}.$$

Второй интеграл в правой части стремится к нулю по лемме Жордана, а первый допускает простую оценку:

$$\left| \int\limits_{C_R} \frac{dz}{z^2} \right| \leqslant \frac{1}{R^2} \cdot \pi R \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

Вычислим теперь предел интеграла по C_r. Так как

$$\mathrm{Res}_0 f = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{1 - e^{iaz}}{z} = -ia,$$

по лемме о полувычете

$$\int\limits_{C_r} f(z)\, dz \to -\pi i(-ia) = -\pi a \quad (r \to 0+).$$

Переходя к пределу сначала при $R \to +\infty$, затем при $r \to 0+$, мы получим $2J(a) - \pi a = 0$, где $a > 0$. Тогда для произвольного $a \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1 - \cos ax}{x^2}\, dx = \frac{\pi |a|}{2}. \quad \square$$

Пример 3. Для любого $a \in \mathbb{R}$ вычислить интеграл

$$I(a) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^3}\, dx.$$

Решение. Поскольку $I(-a) = I(a)$, ограничимся случаем $a > 0$. Положим $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z^3 + 1}$. По формуле Эйлера

$$I(a) = \mathrm{Re}\left(v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx \right).$$

Особыми точками f являются кубические корни из -1, и все они — простые полюсы f. Нам потребуются две особые точки: $z_0 = -1$ и $z_1 = e^{2\pi i/3}$. Найдем вычеты в них:

$$\mathrm{Res}_{z_1} f = \frac{e^{iaz_1}}{3z_1^2} = -\frac{z_1\, e^{iaz_1}}{3} \quad \text{и, аналогично,} \quad \mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{e^{-ia}}{3}.$$

Рассмотрим замкнутый путь $\gamma_{R,r}$, показанный стрелками на рисунке 17.

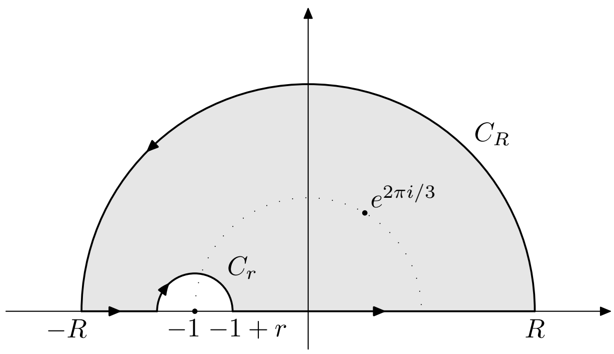

Рис. 17

Единственной особой точкой f, лежащей внутри $\gamma_{R,r}$, будет z_1. По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{\gamma_{R,r}} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{z_1} f = -\frac{2\pi i z_1}{3}\, e^{iaz_1}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\gamma_{R,r}} f(z)\,dz = \int\limits_{-R}^{-1-r} f(x)\,dx + \int\limits_{-1+r}^{R} f(x)\,dx + \int\limits_{C_r} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz.$$

Заметим, что

$$\lim_{r\to 0+}\left(\lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{-R}^{-1-r} f(x)\,dx + \int\limits_{-1+r}^{R} f(x)\,dx\right)\right) = v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Интеграл по C_R стремится к нулю при $R \to +\infty$ в силу леммы Жордана. Наконец, по лемме о полувычете

$$\int\limits_{C_r} f(z)\,dz \to -\pi i \operatorname{Res}_{z_0} f = -\frac{\pi i e^{-ia}}{3} \quad (r \to 0+).$$

Переходя к пределу сначала при $R \to +\infty$, затем при $r \to 0+$, мы получим

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx - \frac{\pi i e^{-ia}}{3} = -\frac{2\pi i z_1}{3}\, e^{iaz_1}.$$

Осталось отделить в этом равенстве вещественную часть:

$$I(a) = \operatorname{Re}\left(v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \right) = \operatorname{Re}\left(\tfrac{\pi i}{3}\left(e^{-ia} - 2z_1\, e^{iaz_1}\right)\right) =$$

$$= \tfrac{\pi}{3}\left(\sin a + e^{-a\sqrt{3}/2}\left(\sqrt{3}\cos\tfrac{a}{2} + \sin\tfrac{a}{2}\right)\right). \quad \square$$

Замечание 1. Чтобы получить значение $I(a)$ при любом $a \in \mathbb{R}$, надо в полученном ответе заменить a на $|a|$.

Замечание 2. Если $a = 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, то

$$I(a) = (-1)^n \frac{\pi}{\sqrt{3}}\, e^{-\pi n\sqrt{3}} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

хотя $I(a)$ не имеет предела при $a \to +\infty$.

Обобщая методы решения этих примеров, сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Положим* $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. *Пусть функция* $f(z)$ *удовлетворяет двум условиям.*

1) f *регулярна в открытом множестве, содержащем* $\mathbb{C}_+$, *за исключением точек* $\{a_k\}_{k=1}^{m} \subset \mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{R}$ *и* $\{b_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C}_+ \cap \mathbb{R}$, *которые являются простыми полюсами* f.

2) $\lim\limits_{\substack{z\to\infty,\\ \operatorname{Im} z \geqslant 0}} f(z) = 0.$

Тогда для любого $a > 0$ справедливо равенство

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax}\, dx = \pi i \left(2 \sum_{k=1}^{m} \operatorname{Res}_{a_k} \left(f(z) e^{iaz} \right) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{b_k} \left(f(z) e^{iaz} \right) \right).$$

Замечание 1. Интеграл в левой части понимается в смысле главного значения как в точках b_k, так и в бесконечности (см. определение 1 § 3).

Замечание 2. При решении задач не следует пользоваться готовыми формулами. Лучше применить следующую схему.

1) По виду интеграла понять, к какому типу он относится, и выбрать подходящий замкнутый путь интегрирования.

2) Вычислить интеграл по этому пути с помощью вычетов, а также явно записать интегралы по отдельным частям пути.

3) Проводя предельный переход по параметрам, определяющим контур, получить искомый интеграл.

Реализовывать эту схему можно как для конкретной функции, заданной в задаче, так и для некоторого класса функций, к которому она относится. Во втором случае мы решаем более общую задачу, получая искомый интеграл как частный случай.

Пример 4. При $p \in (0, 1)$ вычислить интеграл

$$J(p) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{1 - e^x}\, dx.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{e^{pz}}{1 - e^z}$. Она регулярна в $\mathbb{C}$ за исключением точек $2\pi k i$ ($k \in \mathbb{Z}$), которые являются полюсами первого порядка f. Заметим, что при $z \neq 2\pi k i$ справедливо равенство $f(z + 2\pi i) = f(z) e^{2\pi i p}$. Поэтому удобно выбрать замкнутый контур $\gamma_{R,r}$, показанный стрелками на рисунке 18, где $0 < r < \pi$ и $R > r$. Обозначим полуокружности с центрами 0 и $2\pi i$ символами $C_r(0)$ и $C_r(2\pi i)$ соответственно, а вертикальные отрезки $\gamma_{R,r}$ — символами γ_R^+ и γ_R^-.

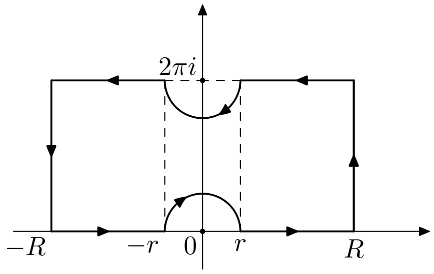

Рис. 18

Так как у функции f нет особых точек внутри $\gamma_{R,r}$, по интегральной теореме Коши

$$\oint\limits_{\gamma_{R,r}} f(z)\,dz = 0.$$

С другой стороны, в силу аддитивности интеграла по $\gamma_{R,r}$

$$0 = \int\limits_{-R}^{-r} f(x)\,dx + \int\limits_{r}^{R} f(x)\,dx - \int\limits_{-R+2\pi i}^{-r+2\pi i} f(x)\,dx - \int\limits_{r+2\pi i}^{R+2\pi i} f(x)\,dx -$$
$$- \int\limits_{C_r(0)} f(z)\,dz - \int\limits_{C_r(2\pi i)} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_R^-} f(z)\,dz. \quad (3)$$

Заметим, что

$$\lim_{r\to 0+}\left(\lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_{-R}^{-r} f(x)\,dx + \int\limits_{r}^{R} f(x)\,dx\right)\right) = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = J(p).$$

Поскольку $f(x+2\pi i) = f(x)e^{2\pi i p}$, сумма третьего и четвертого интегралов в (3) стремится аналогичным образом к $-J(p)e^{2\pi i p}$.

Для нахождения пределов интегралов по полуокружностям воспользуемся леммой о полувычете. По формуле (1)

$$\mathrm{Res}_{2\pi i} f = \left.\frac{e^{pz}}{-e^{z}}\right|_{z=2\pi i} = -e^{2\pi p i} \quad \text{и, аналогично,} \quad \mathrm{Res}_0 f = -1.$$

Поэтому при $r \to 0+$

$$\int\limits_{C_r(0)} f(z)\,dz + \int\limits_{C_r(2\pi i)} f(z)\,dz \to \pi i\left(\operatorname{Res}_{2\pi i} f + \operatorname{Res}_0 f\right) = -\pi i\left(e^{2\pi p i} + 1\right).$$

Покажем теперь, что интегралы по γ_R^+ и γ_R^- стремятся к нулю при $R \to +\infty$. Пусть $z = \pm R + iy$, $y \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\left|f(z)\right| \leqslant \frac{|e^{pz}|}{\left||e^z| - 1\right|} = \frac{e^{\pm pR}}{|e^{\pm R} - 1|}.$$

Отсюда вытекает, что при $R \to +\infty$

$$\left|\int\limits_{\gamma_R^+} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{e^{pR}}{e^R - 1} \cdot 2\pi \sim 2\pi e^{R(p-1)} \to 0,$$

$$\left|\int\limits_{\gamma_R^-} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{e^{-pR}}{1 - e^{-R}} \cdot 2\pi \sim 2\pi e^{-Rp} \to 0.$$

Переходя в (3) к пределу сначала при $R \to +\infty$, затем при $r \to 0+$, мы получим

$$J(p)\left(1 - e^{2\pi i p}\right) + \pi i\left(1 + e^{2\pi i p}\right) = 0,$$

откуда

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{1 - e^x}\,dx = \frac{\pi i\,(e^{2\pi i p} + 1)}{e^{2\pi i p} - 1} = \pi \operatorname{ctg} \pi p. \quad \square$$

В следующем параграфе будут рассмотрены интегралы от многозначных функций на полуоси, содержащих в качестве множителя логарифм или степенную функцию с нецелым показателем. Приведем один пример такого типа.

Пример 5. Вычислить интеграл

$$I = v.p.\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{1 - x^2}\,dx.$$

Решение. Положим

$$J = v.p. \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{i\ln x}}{1-x^2}\,dx.$$

Тогда $I = \operatorname{Im} J$. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{e^{i\ln z}}{1-z^2}, \quad \text{где} \quad \ln z = \ln|z| + i\arg z \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z < \frac{3\pi}{2}.$$

При $0 < r < \frac{1}{2}$ и $R > r+1$ выберем путь $\gamma_{R,r}$, показанный стрелками на рисунке 19.

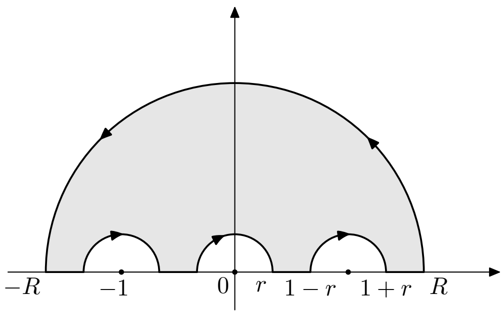

Рис. 19

Функция f регулярна внутри пути $\gamma_{R,r}$ и на его носителе. По интегральной теореме Коши

$$\oint\limits_{\gamma_{R,r}} f(z)\,dz = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь интегралы по отдельным участкам $\gamma_{R,r}$. Во-первых,

$$\lim_{r\to 0+}\left(\lim_{R\to+\infty}\left(\int\limits_r^{1-r} f(x)\,dx + \int\limits_{1+r}^{R} f(x)\,dx\right)\right) = v.p. \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx = J.$$

Во-вторых, при $x > 0$

$$f(-x) = \frac{e^{i\,(\ln x + \pi i)}}{1 - x^2} = \frac{e^{i \ln x}}{1 - x^2}\, e^{-\pi} = f(x)\, e^{-\pi}.$$

Поэтому замена $t = -x$ дает

$$\int\limits_{-1+r}^{-r} f(x)\,dx + \int\limits_{-R}^{-1-r} f(x)\,dx = \int\limits_{r}^{1-r} f(-t)\,dt + \int\limits_{1+r}^{R} f(-t)\,dt \to J\,e^{-\pi}.$$

Таким образом, сумма интегралов по горизонтальным участкам стремится к $J\big(1 + e^{-\pi}\big)$.

Вычислим предел суммы интегралов по полуокружностям с центрами 1 и -1. Точки ± 1 — простые полюсы f. По формуле (1)

$$\operatorname{Res}_{-1} f = \frac{e^{i \ln z}}{-2z}\bigg|_{z=1} = \frac{e^{i \ln(-1)}}{2} = \frac{e^{-\pi}}{2} \quad \text{и, аналогично,} \quad \operatorname{Res}_{1} f = -\frac{1}{2}.$$

По лемме о полувычете

$$\lim_{r \to 0+} \Bigg(\int\limits_{\substack{|z+1|=r,\\ 0 \leqslant \arg(z+1) \leqslant \pi}} f(z)\,dz + \int\limits_{\substack{|z-1|=r,\\ 0 \leqslant \arg(z-1) \leqslant \pi}} f(z)\,dz \Bigg) =$$

$$= -i\pi \big(\operatorname{Res}_{-1} f + \operatorname{Res}_{1} f\big) = -\frac{i\pi}{2}\big(e^{-\pi} - 1\big).$$

Докажем теперь, что интегралы по большой и малой полуокружностям с центром в нуле бесконечно малы при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$ соответственно. Пусть $z = ae^{it}$, где $a > 0$, $t \in [0, \pi]$. Тогда

$$\big|f(z)\big| \leqslant \frac{\big|e^{i \ln z}\big|}{\big||z|^2 - 1\big|} = \frac{\big|e^{i\,(\ln a + it)}\big|}{|a^2 - 1|} = \frac{e^{-t}}{|a^2 - 1|} \leqslant \frac{1}{|a^2 - 1|}.$$

откуда

$$\Bigg| \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi}} f(z)\,dz \Bigg| \leqslant \frac{1}{R^2 - 1} \cdot \pi R \to 0 \quad (R \to +\infty),$$

$$\Bigg| \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \pi}} f(z)\,dz \Bigg| \leqslant \frac{1}{1 - r^2} \cdot \pi r \to 0 \quad (r \to 0+).$$

Теперь предельный переход в равенстве (4) при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$ дает

$$J\bigl(1 + e^{-\pi}\bigr) - \frac{i\pi}{2}\,\bigl(e^{-\pi} - 1\bigr) = 0.$$

Отделяя мнимую часть, мы получим

$$v.p. \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{1 - x^2}\,dx = \operatorname{Im} J = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} + 1} = -\frac{\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Задачи

4.1. Вычислить интеграл

$$v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 5x + 6}\,dx.$$

Ответ: $\pi\,(2 \sin 2 - 2 \sin 3)$.

4.2. Вычислить интеграл

$$v.p. \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - 1}\,dx.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

4.3. При $a, b > 0$ вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x\bigl(x^2 + b^2\bigr)}\,dx.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2b}\bigl(1 - e^{-ab}\bigr)$.

4.4. При $a \in \mathbb{R}$ вычислить интеграл

$$v.p. \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} \operatorname{th} \dfrac{\pi a}{2}$.

§ 5. Вычисление интегралов интегрированием по границе разрезанного кольца (V и VI типы)

В этом параграфе мы будем рассматривать интегралы от функций, содержащих многозначный множитель (логарифм или степенную функцию с нецелым показателем). Для продолжения таких функций на комплексную плоскость нам понадобятся ветви логарифма комплексного аргумента. Известно, что в комплексной плоскости, разрезанной по лучу с началом в нуле, существуют регулярные ветви как функции $\ln z$, так и функции $z^p = e^{p \ln z}$ при нецелом показателе p. Ветвь $\ln z$ определяется выбором аргумента z. Если рассматривать разрез по положительной полуоси, то она задается так:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \arg z \leqslant 2\pi. \tag{5}$$

Договоримся трактовать луч $[0, +\infty)$ как два склеенных луча, которые называют *верхним и нижним берегами* разреза. Тогда на верхнем берегу $\ln z$ равен $\ln |z|$, а на нижнем он равен $\ln |z| + 2\pi i$. При таком соглашении логарифм будет непрерывен в разрезанной плоскости вплоть до границы.

Нам потребуются разрезанные кольца, то есть множества вида

$$G(R, r) = \{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < \arg z < 2\pi,\ r < |z| < R\} \quad (0 < r < R). \tag{6}$$

Границу кольца можно ориентировать стандартным образом (так, чтобы кольцо при обходе оставалось слева). При этом верхний берег разреза проходится слева направо, а нижний — справа налево. Поскольку мы различаем берега разреза, граница кольца является простым путем. Если функция f регулярна во внутренних точках кольца и непрерывна вплоть до его границы, то интеграл от f по

$G(R,r)$ можно вычислять с помощью вычетов. Отметим, что этим условиям удовлетворяют логарифм и степенная функция.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\, dx}{1+x^3}.$$

Решение. Зададим ветвь логарифма формулой (5) и положим

$$f(z) = \frac{1}{1+z^3}, \quad g(z) = f(z)\ln^2 z = \frac{\ln^2 z}{1+z^3}.$$

Кубические корни из -1 равны $z_k = e^{i\pi(2k+1)/3}$, где $k \in \{0,1,2\}$. Они являются простыми полюсами функции g. Найдем вычеты g в этих точках. По формулам (1) и (5)

$$\mathrm{Res}_{z_k} g = \frac{\ln^2 z_k}{3z_k^2} = \frac{\big(i\pi(2k+1)\big)^2}{27z_k^2} = \frac{z_k}{27}\big(\pi(2k+1)\big)^2.$$

Пусть $0 < r < 1 < R$. Рассмотрим разрезанное кольцо $G(R,r)$, задаваемое формулой (6), а его ориентированную границу обозначим символом $\gamma(R,r)$ (см. рисунок 20).

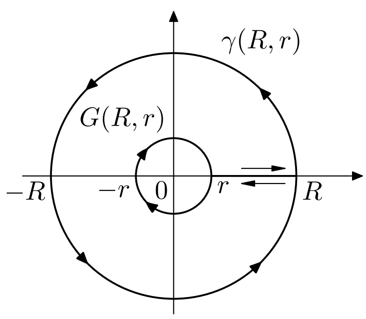

Рис. 20

Заметим, что функция g регулярна внутри $G(R,r)$ за исключением точек z_0, z_1, z_2 и непрерывна на берегах разреза. Применяя к функции g и контуру $\gamma(R,r)$ обобщенную теорему Коши о вычетах, мы получим

$$\oint\limits_{\gamma(R,r)} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=0}^{2} \operatorname{Res}_{z_k} g = \frac{2\pi i}{27} \sum_{k=0}^{2} \pi^2 (2k+1)^2 z_k. \qquad (7)$$

С другой стороны, пусть γ^+ и γ^- — верхний и нижний берега разреза кольца, а C_r и C_R — малая и большая полуокружности соответственно. Тогда

$$\oint\limits_{\gamma(R,r)} g(z)\,dz = \int\limits_{\gamma^+} g(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-} g(z)\,dz + \int\limits_{C_r} g(z)\,dz + \int\limits_{C_R} g(z)\,dz. \qquad (8)$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\gamma^+} g(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-} g(z)\,dz = \int\limits_r^R f(x)\ln^2 x\,dx - \int\limits_r^R f(x)(\ln x + 2\pi i)^2\,dx =$$

$$= -4\pi i \int\limits_r^R f(x)\ln x\,dx - 4\pi^2 \int\limits_r^R f(x)\,dx,$$

откуда при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$

$$\operatorname{Im}\Bigg(\int\limits_{\gamma^+} g(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-} g(z)\,dz\Bigg) = -4\pi \int\limits_r^R f(x)\ln x\,dx \to -4\pi I.$$

Докажем теперь, что интегралы по C_R и C_r стремятся к нулю при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$ соответственно. Пусть $z = ae^{it}$, где $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\big|g(z)\big| \leqslant \frac{|\ln z|^2}{\big||z|^3 - 1\big|} = \frac{|\ln a + it|^2}{|a^3 - 1|} = \frac{\ln^2 a + t^2}{|a^3 - 1|} \leqslant \frac{\ln^2 a + 4\pi^2}{|a^3 - 1|}\,,$$

откуда

$$\Bigg|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\Bigg| \leqslant \frac{\ln^2 R + 4\pi^2}{R^3 - 1} \cdot 2\pi R \sim \frac{2\pi \ln^2 R}{R^2} \to 0 \quad (R \to +\infty),$$

$$\Bigg|\int\limits_{C_r} f(z)\,dz\Bigg| \leqslant \frac{\ln^2 r + 4\pi^2}{1 - r^3} \cdot 2\pi r \sim 2\pi r \ln^2 r \to 0 \quad (r \to 0+).$$

Отделим в равенстве (8) мнимую часть и перейдем к пределу при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$. С учетом (7) мы получим

$$-4\pi I = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0+}} \operatorname{Im}\Bigg(\oint\limits_{\gamma(R,r)} g(z)\,dz \Bigg) = \operatorname{Im}\Bigg(\frac{2\pi i}{27} \sum_{k=0}^{2} \pi^2(2k+1)^2 z_k \Bigg) =$$

$$= \operatorname{Im} \frac{i\pi^3}{27} \Big(1 + i\sqrt{3} - 18 + 25\big(1 + i\sqrt{3}\,\big) \Big) = \frac{8\pi^3}{27}.$$

Сокращая это равенство на -4π, получаем ответ:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x\,dx}{1+x^3} = -\frac{2\pi^2}{27}. \quad \square$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \left(\ln \frac{x}{1-x} \right)^2 \cdot \frac{dx}{1+x}.$$

Решение. Выполнив в интеграле замену $t = \dfrac{x}{1-x}$, мы получим

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 t\,dt}{(t+1)(2t+1)}.$$

По аналогии с примером 1 разумно рассмотреть функции

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(2z+1)}, \quad g(z) = \frac{\ln^3 z}{(z+1)(2z+1)},$$

где ветвь логарифма вновь задается формулой (5). Пусть $0 < r < \frac{1}{2}$ и $R > 1$. Функция g регулярна внутри разрезанного кольца $G(R,r)$ за исключением точек -1 и $-\frac{1}{2}$, которые являются простыми полюсами g. Обозначим через $\gamma(R,r)$ ориентированную границу $G(R,r)$. Тогда по обобщенной теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma(R,r)} g(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{-1} g + \operatorname{Res}_{-\frac{1}{2}} g \right). \tag{9}$$

С другой стороны, пусть γ^+ и γ^- — верхний и нижний берега разреза кольца, а C_r и C_R — малая и большая полуокружности соответственно. Тогда

$$\oint\limits_{\gamma(R,r)} g(z)\,dz = \int\limits_{\gamma^+} g(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-} g(z)\,dz + \int\limits_{C_r} g(z)\,dz + \int\limits_{C_R} g(z)\,dz. \quad (10)$$

Заметим, что

$$\int\limits_{\gamma^+} g(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-} g(z)\,dz = \int\limits_r^R f(x)\ln^3 x\,dx - \int\limits_r^R f(x)(\ln x + 2\pi i)^3\,dx =$$
$$= -6i\pi \int\limits_r^R f(x)\ln^2 x\,dx + 8i\pi^3 \int\limits_r^R f(x)\,dx + 12\pi^2 \int\limits_r^R f(x)\ln x\,dx,$$

откуда при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$

$$\operatorname{Im}\Bigl(\int\limits_{\gamma^+} g(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-} g(z)\,dz\Bigr) \to 8\pi^3 \int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx - 6\pi I = 8\pi^3 \ln 2 - 6\pi I$$

(последний переход проверяется непосредственным вычислением интеграла от f).

Докажем теперь, что интегралы по C_R и C_r стремятся к нулю при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$ соответственно. Пусть $z = ae^{it}$, где $a > 0$, $t \in [0, 2\pi]$. Тогда

$$\bigl|g(z)\bigr| \leqslant \frac{|\ln z|^3}{\bigl|\bigl(|z|-1\bigr)\bigl(2|z|-1\bigr)\bigr|} = \frac{|\ln a + it|^3}{|(a-1)(2a-1)|} \leqslant \frac{\bigl(\ln^2 a + 4\pi^2\bigr)^{3/2}}{|(a-1)(2a-1)|},$$

откуда

$$\Bigl|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\Bigr| \leqslant \frac{\bigl(\ln^2 R + 4\pi^2\bigr)^{3/2}}{(R-1)(2R-1)} \cdot 2\pi R \sim \frac{2\pi \ln^3 R}{R} \to 0 \quad (R \to +\infty),$$
$$\Bigl|\int\limits_{C_r} f(z)\,dz\Bigr| \leqslant \frac{\bigl(\ln^2 r + 4\pi^2\bigr)^{3/2}}{(1-r)(1-2r)} \cdot 2\pi r \sim 2\pi r \ln^3 r \to 0 \quad (r \to 0+).$$

Отделим в равенстве (10) мнимую часть и перейдем к пределу при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$. С учетом (9) мы получим

$$8\pi^3 \ln 2 - 6\pi I = \operatorname{Im}\left(2\pi i \left(\operatorname{Res}_{-1} g + \operatorname{Res}_{-\frac{1}{2}} g\right)\right).$$

Осталось найти вычеты в правой части. Заметим, что

$$\operatorname{Res}_{-\frac{1}{2}} g = \left.\frac{\ln^3 z}{2(z+1)}\right|_{z=-\frac{1}{2}} = \ln^3\left(-\tfrac{1}{2}\right) = (-\ln 2 + i\pi)^3.$$

Аналогичные вычисления показывают, что $\operatorname{Res}_{-1} g = i\pi^3$, то есть этот вычет чисто мнимый. Поэтому

$$8\pi^3 \ln 2 - 6\pi I = \operatorname{Im}\left(2\pi i \operatorname{Res}_{-\frac{1}{2}} g\right) = 2\pi\left(-\ln^3 2 + 3\pi^2 \ln 2\right).$$

Выражая отсюда I, мы получим

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{x}{1-x}\right)^2 \cdot \frac{dx}{1+x} = \frac{\pi^2 \ln 2 + \ln^3 2}{3}. \quad \square$$

Пример 3. При $a > 0$ вычислить интеграл

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x \, dx}{x^2 + a^2}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = \dfrac{\ln^2 z}{z^2 + a^2}$. Поскольку при $\ln^2 z$ стоит четный множитель, удобно в качестве замкнутого контура $\gamma(R, r)$ использовать границу верхнего полукольца, показанного на рисунке 16. Пусть $0 < r < a$ и $R > a$. Тогда $z = ia$ — единственная особая точка f, лежащая внутри $\gamma(R, r)$. Она является простым полюсом f, и вычет в ней равен

$$\operatorname{Res}_{ia} f = \left.\frac{\ln^2 z}{2z}\right|_{z=ia} = \frac{\ln^2(ia)}{2ia} = \frac{\left(\ln a + \frac{\pi}{2} i\right)^2}{2ia}.$$

Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma(R,r)} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{ai} f = \frac{\pi\bigl(\ln a + \frac{\pi}{2}\,i\bigr)^2}{a}. \tag{11}$$

С другой стороны, по аддитивности интеграла

$$\oint\limits_{\gamma(R,r)} f(z)\,dz = \int\limits_r^R \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2} - \int\limits_R^r \frac{(\ln x + i\pi)^2\,dx}{x^2+a^2} + \\ + \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ \mathrm{Im}\,z\geqslant 0}} f(z)\,dz - \int\limits_{\substack{|z|=r,\\ \mathrm{Im}\,z\geqslant 0}} f(z)\,dz.$$

Пусть $R \to +\infty$ и $r \to 0+$. Два последних интеграла стремятся к нулю (это проверяется так же, как в примере 2). Кроме того,

$$\mathrm{Re}\Biggl(\int\limits_r^R \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2} - \int\limits_R^r \frac{(\ln x + i\pi)^2\,dx}{x^2+a^2}\Biggr) = 2\int\limits_r^R \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2} - \\ - \pi^2 \int\limits_r^R \frac{dx}{x^2+a^2} \to 2I(a) - \pi^2 \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = 2I(a) - \frac{\pi^3}{2a}$$

(последнее равенство — прямое вычисление интеграла). Отделим в (11) вещественную часть и перейдем к пределу:

$$2I(a) - \frac{\pi^3}{2a} = \mathrm{Re}\left(\frac{\pi\bigl(\ln a + \frac{\pi}{2}\,i\bigr)^2}{a}\right) = \frac{\pi\bigl(4\ln^2 a - \pi^2\bigr)}{4a}.$$

Выражая отсюда $I(a)$, мы получим ответ:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi\bigl(\ln^2 a + \pi^2\bigr)}{8a}. \quad \square$$

Используя метод, предложенный в примерах, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть функция f регулярна на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ за исключением конечного множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ изолированных особых точек, не лежащих на положительной полуоси. Предположим, что выполнены два условия.*

1) $f(z) = O(1)$ при $z \to 0$.

2) Существует такое $p > 1$, что $f(z) = O\big(|z|^{-p}\big)$ при $z \to \infty$.

Тогда сходятся два несобственных интеграла

$$J_1 = \int\limits_0^{+\infty} f(x) \ln x \, dx, \quad J_2 = \int\limits_0^{+\infty} f(x) \, dx,$$

и справедливы равенства

$$J_1 = -\frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f(z) \ln^2 z\right),$$

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} f(z) \ln^2 z\right),$$

где ветвь логарифма определяется формулой (5).

Задачи

5.1. Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) \frac{dx}{1+x^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi \ln 2}{8}$.

5.2. Вычислить интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)(x^2+4)}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{16}$.

Последний тип интегралов, который мы будем рассматривать, — это интегралы вида $\int_0^{+\infty} R(x)\, x^{a-1}\, dx$. Здесь $R(x)$ — рациональная функция, не имеющая особых точек при $x > 0$, а параметр a выбирается так, чтобы интеграл сходился. Прежде чем сформулировать общее утверждение, рассмотрим несколько примеров.

Пример 4. Вычислить интеграл

$$I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

и найти условия на параметр a, исследовав сходимость интеграла.

Решение. Положим

$$f(z) = \frac{e^{(a-1)\ln z}}{(z+1)(z+2)(z+3)},$$

где ветвь логарифма определяется формулой (5). Так как

$$f(x) \sim \tfrac{1}{6}\, x^{a-1} \ \ (x \to 0+), \quad f(x) \sim x^{a-4} \ \ (x \to +\infty),$$

интеграл $I(a)$ сходится при $a \in (0,3)$. Вычислим его вначале при нецелых a. Пусть $G(R,r)$ — разрезанное кольцо, показанное на рисунке 20, а $\gamma(R,r)$ — ориентированная граница $G(R,r)$. Если $0 < r < 1$ и $R > 3$, то функция f регулярна внутри $G(R,r)$ за исключением точек -1, -2 и -3, которые являются простыми полюсами f. Найдем вычеты f в этих точках:

$$\operatorname{Res}_{-1} f = \lim_{z \to -1} \frac{e^{(a-1)\ln z}}{(z+2)(z+3)} = \frac{e^{(a-1)\ln(-1)}}{2} = \frac{e^{(a-1)i\pi}}{2} = -\frac{e^{i\pi a}}{2}$$

и, аналогично,

$$\operatorname{Res}_{-2} f = 2^{a-1} e^{i\pi a}, \quad \operatorname{Res}_{-3} f = -\frac{3^{a-1} e^{i\pi a}}{2}.$$

Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma(R,r)} f(z)\,dz = \pi i e^{i\pi a}\bigl(-1 + 2^a - 3^{a-1}\bigr). \tag{12}$$

С другой стороны, пусть γ^+ и γ^- — верхний и нижний берега разреза кольца, а C_r и C_R — малая и большая полуокружности соответственно. Тогда

$$\oint\limits_{\gamma(R,r)} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma^+} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz + \int\limits_{C_r} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz. \tag{13}$$

Заметим, что при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$

$$\int\limits_{\gamma^+} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma^-} f(z)\,dz = \int\limits_r^R f(x)\,dx - {}$$

$$- e^{2\pi i(a-1)} \int\limits_r^R f(x)\,dx \to \bigl(1 - e^{2\pi i a}\bigr) I(a).$$

Докажем теперь, что интегралы по C_R и C_r стремятся к нулю при $R \to +\infty$ и $r \to 0+$ соответственно. Поскольку

$$\bigl|f(z)\bigr| \leqslant \frac{|z|^{a-1}}{\bigl|\bigl(|z|-1\bigr)\bigl(|z|-2\bigr)\bigl(|z|-3\bigr)\bigr|},$$

мы получаем

$$\Biggl|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\Biggr| \leqslant \frac{R^{a-1}}{(R-1)(R-2)(R-3)} \cdot 2\pi R \sim 2\pi R^{a-3} \to 0,$$

$$\Biggl|\int\limits_{C_r} f(z)\,dz\Biggr| \leqslant \frac{r^{a-1}}{(1-r)(2-r)(3-r)} \cdot 2\pi r \sim 2\pi r^{a} \to 0.$$

Теперь предельный переход в (13) с учетом (12) дает

$$\left(1 - e^{2\pi i a}\right) I(a) = \pi i e^{i\pi a}\left(-1 + 2^a - 3^{a-1}\right),$$

откуда

$$I(a) = \frac{\pi\,(1 - 2^a + 3^{a-1})}{2\sin \pi a} \quad (a \notin \mathbb{N}).$$

Используя теорию несобственных интегралов с параметром, легко доказать, что функция $a \mapsto I(a)$ непрерывна на $(0,3)$. Поэтому

$$I(1) = \lim_{a\to 1} \frac{\pi\,(1 - 2^a + 3^{a-1})}{2\sin \pi a} = \ln\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \text{и} \quad I(2) = \ln\frac{3\sqrt{3}}{4}. \quad \square$$

Пример 5. При $b \in (-1, 2)$ вычислить интеграл

$$I(b) = \int_0^1 \frac{x^{1-b}(1-x)^b\,dx}{(1+x)^2}.$$

Решение. Замена $t = \dfrac{1-x}{x}$ дает

$$I(b) = \int_0^{+\infty} \frac{t^b\,dt}{(1+t)(2+t)^2}.$$

Здесь, как и в предыдущем пример, подынтегральная функция — произведение рациональной и степенной функций. Поэтому для вычисления $I(b)$ мы используем тот же метод. Рассмотрим вначале нецелые b. Пусть $0 < r < 1$ и $R > 2$, $G(R,r)$ — разрезанное кольцо, показанное на рисунке 20, $\gamma(R,r)$ — его ориентированная граница. Положим

$$f(z) = \frac{z^b}{(1+z)(2+z)^2} = \frac{e^{b\ln z}}{(1+z)(2+z)^2},$$

где ветвь логарифма задается формулой (5). Функция f регулярна внутри $G(R,r)$ за исключением двух особых точек: $z = -1$ (полюс первого порядка) и $z = -2$ (полюс второго порядка). Найдем вычеты в них:

$$\operatorname{Res}_{-2} f = \left(\frac{z^b}{z+1}\right)'\bigg|_{z=-2} = (b-1)(-2)^b + b(-2)^{b-1} = \left(b\,2^{b-1} - 2^b\right)e^{i\pi b}$$

и, легко видеть, $\mathrm{Res}_{-1} f = e^{i\pi b}$. Тогда по теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{\gamma(R,r)} f(z)\,dz = 2\pi i\, e^{i\pi b}\bigl(1 + b\,2^{b-1} - 2^b\bigr).$$

С другой стороны, интеграл в левой части есть сумма интегралов по берегам разреза $\gamma^{\pm}$ и по полуокружностям. Рассуждая как в примере 4, мы докажем, что сумма интегралов по γ^+ и γ^- стремится к $I(b)\bigl(1 - e^{2\pi i b}\bigr)$, а интегралы по полуокружностям — к нулю. Поэтому

$$I(b) = \frac{2\pi i\, e^{i\pi b}}{1 - e^{2\pi i b}}\bigl(1 + b\,2^{b-1} - 2^b\bigr) = -\frac{\pi\bigl(1 + b\,2^{b-1} - 2^b\bigr)}{\sin \pi b} \quad (b \notin \mathbb{N}).$$

Так как интеграл $I(b)$ непрерывно зависит от параметра, мы получим

$$I(0) = -\lim_{b\to 0} \frac{\pi\bigl(1 + b\,2^{b-1} - 2^b\bigr)}{\sin \pi b} = \ln 2 - \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad I(1) = 1 - \ln 2. \quad \square$$

Обобщая использованные в примерах рассуждения, сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть R — рациональная функция, причем ее полюса $z_1, \ldots, z_n$ не лежат на положительной полуоси. Пусть существуют числа $p, q \in \mathbb{Z}$, $p < q$, удовлетворяющие условиям*

$$R(z) = O\bigl(|z|^{-p}\bigr) \ \ (z \to 0), \qquad R(z) = O\bigl(|z|^{-q}\bigr) \ \ (z \to \infty).$$

Тогда для любого нецелого $a \in (p, q)$ справедлива формула

$$\int\limits_0^{+\infty} R(x)\, x^{a-1}\, dx = \frac{\pi e^{-i\pi a}}{\sin \pi a} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{z_k} R(z) z^{a-1},$$

где $z^{a-1} = e^{(a-1)\ln z}$, а ветвь логарифма задается формулой (5).

Задачи

5.3. При $p \in (-1, 1)$ и $a > 0$ вычислить интеграл

$$J(p) = \int\limits_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x+a}.$$

Ответ: $\begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin \pi p}\left(1 - \left(\dfrac{a}{a+1}\right)^p\right), & p \neq 0, \\ \ln\left(\dfrac{a+1}{a}\right), & p = 0. \end{cases}$

5.4. При $p \in (-1, 2)$ вычислить интеграл

$$I(p) = \int\limits_{-1}^1 \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\, dx.$$

Ответ: $\begin{cases} \dfrac{\pi}{\sin \pi p}\left(\sin \frac{\pi p}{2} + \cos \frac{\pi p}{2} - 1\right), & p \notin \{0, 1\}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & p \in \{0, 1\}. \end{cases}$

§ 6. Вычисление интегралов разных типов

В этом параграфе мы приведем некоторые примеры, использующие описанные ранее приемы. Рекомендуем читателю вначале посмотреть на интеграл и самостоятельно определить его тип, а уже потом читать решение.

Пример 1. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{(2 + \cos x)^2}$. При $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ вычислить интеграл

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx.$$

Решение. Заметим, что $a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\, dx$ в силу четности функции f. Полагая $z = e^{ix}$, мы получим

$$f(x) = \frac{1}{\left(2 + \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})\right)^2}, \quad dz = ie^{ix}\, dx,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\pi} \oint\limits_{|z|=1} \frac{4z^n\,dz}{iz\left(4+z+\frac{1}{z}\right)^2} = \frac{4}{\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^{n+1}\,dz}{(z^2+4z+1)^2},$$

где окружность обходится против часовой стрелки. Нули трехчлена z^2+4z+1 — точки $z_1 = \sqrt{3}-2$ и $z_2 = -(\sqrt{3}+2)$. В единичном круге лежит только точка z_1, и она является полюсом второго порядка подынтегральной функции. По теореме Коши о вычетах

$$a_n = \frac{8\pi i}{\pi i} \cdot \operatorname{Res}_{z_1}\left(\frac{z^{n+1}}{(z^2+4z+1)^2}\right) =$$
$$= 8\left(\frac{z^{n+1}}{(z-z_2)^2}\right)'\Bigg|_{z=z_1} = \frac{2(-1)^n}{3\sqrt{3}} \cdot \left(2-\sqrt{3}\,\right)^n \cdot (n\sqrt{3}+2).$$

Это равенство верно при неотрицательных целых n. В частности, $a_0 = \frac{4}{3\sqrt{3}}$. $\square$

Пример 2. При $p \in (0,1)$ вычислить интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot \cos x\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1} \cdot \sin x\,dx.$$

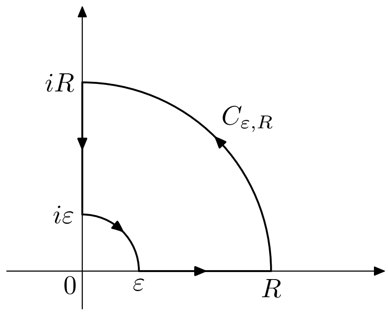

Рис. 21

Решение. Пусть $I(p) = \int\limits_0^{+\infty} t^{p-1} \cdot e^{it}\,dt$. Положим

$$z^{p-1} = |z|^{p-1} e^{i(p-1)\arg z}, \quad \text{где} \quad \arg z \in [0, 2\pi),$$

и рассмотрим функцию $f(z) = z^{p-1}e^{iz}$. Выберем контур $C_{\varepsilon,R}$ так, как показано на рисунке 21. По интегральной теореме Коши

$$\oint\limits_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = 0 \quad \text{при всех } \ R > \varepsilon > 0.$$

С другой стороны, разобьем контур $C_{\varepsilon,R}$ на два отрезка и две дуги. Мы получим

$$\oint\limits_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = \int\limits_{\varepsilon}^{R} t^{p-1}\cdot e^{it}\,dt - \int\limits_{\varepsilon}^{R} (it)^{p-1}\cdot e^{-t}\cdot i\,dt +$$
$$+ \int\limits_{\substack{|z|=R,\\ 0\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{2}}} f(z)\,dz - \int\limits_{\substack{|z|=\varepsilon,\\ 0\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{2}}} f(z)\,dz.$$

Интеграл по большой дуге стремиться к нулю при $R\to+\infty$ в силу леммы Жордана. Кроме того, $|e^{iz}|\leqslant 1$ при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$, откуда

$$\left|\int\limits_{\substack{|z|=\varepsilon,\\ 0\leqslant \arg z\leqslant \frac{\pi}{2}}} f(z)\,dz\right| \leqslant \varepsilon^{p-1}\cdot\frac{\pi\varepsilon}{2} = \frac{\pi}{2}\,\varepsilon^{p} \to 0 \quad (\varepsilon\to 0+).$$

Поэтому предельный переход дает

$$I(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}\cdot e^{it}\,dt = i^{p}\int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}\cdot e^{-t}\,dt = e^{i\pi p/2}\cdot\Gamma(p).$$

Отделяя вещественную и мнимую части, мы получим

$$\int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}\cdot\cos t\,dt = \cos\left(\tfrac{\pi p}{2}\right)\cdot\Gamma(p), \qquad \int\limits_{0}^{+\infty} t^{p-1}\cdot\sin t\,dt = \sin\left(\tfrac{\pi p}{2}\right)\cdot\Gamma(p). \quad \square$$

Замечание. С помощью доказанных формул можно вычислить интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\cos\left(x^q\right)dx$ при $q>1$. Действительно, замена $t = x^q$ дает

$$\int\limits_{0}^{+\infty}\cos\left(x^q\right)dx = \tfrac{1}{q}\int\limits_{0}^{+\infty} t^{1/q-1}\cos t\,dt = \tfrac{1}{q}\cos\left(\tfrac{\pi}{2q}\right)\cdot\Gamma\left(\tfrac{1}{q}\right).$$

Пример 3. При $\alpha \in (0,1)$ вычислить интеграл

$$J(\alpha) = v.p. \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\,dx.$$

Решение. Пусть $z^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\ln z}$, где ветвь логарифма задается формулой (5). Функция $z^{\alpha-1}$ регулярна в плоскости, разрезанной по положительной полуоси, и непрерывна на берегах разреза (см. § 5). Положим

$$f(z) = \frac{e^{-i\pi(\alpha-1)} \cdot z^{\alpha-1}}{1-z}.$$

Функция f регулярна в области $\mathbb{C} \setminus [0,+\infty)$ и непрерывна в любой точке ее границы, кроме 0 и 1.

Интеграл $J(\alpha)$ понимается как $\lim\limits_{\delta\to 0+}\left(\int\limits_0^{1-\delta} + \int\limits_{1+\delta}^{+\infty}\right)$. Поэтому нам нужен контур, "приближающий" луч $[0,+\infty)$, но обходящий точку 1, а также точку 0, в которой функция f имеет разрыв. Пусть положительные числа ε, δ, R таковы, что $\varepsilon < 1-\delta$ и $1+\delta < R$. Выберем контур $C(\varepsilon,\delta,R)$ так, как показано на рисунке 22.

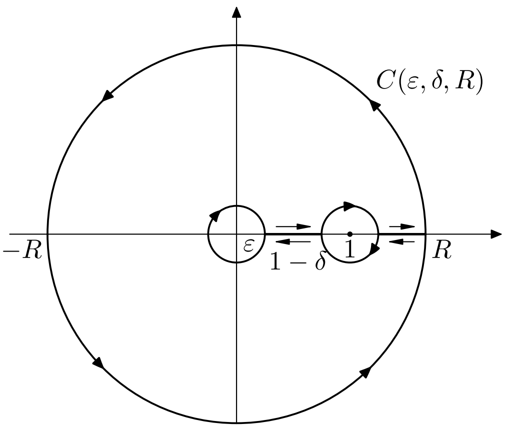

Рис. 22

Отрезки $[\varepsilon, 1-\delta]$ и $[1+\delta, R]$ проходятся дважды: слева направо — по верхнему берегу, справа налево — по нижнему. По теореме Коши

$$\oint\limits_{C_{\varepsilon,\delta,R}} f(z)\,dz = 0.$$

С другой стороны, рассмотрим интегралы по разным частям $C_{\varepsilon,\delta,R}$. Сумма интегралов по обоим берегам отрезков $[\varepsilon, 1-\delta]$ и $[1+\delta, R]$ равна

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1-\delta} e^{-\pi i(\alpha-1)} \cdot \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1-x} - \int\limits_{\varepsilon}^{1-\delta} e^{\pi i(\alpha-1)} \cdot \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1-x} +$$
$$+ \int\limits_{1+\delta}^{R} e^{-\pi i(\alpha-1)} \cdot \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1-x} - \int\limits_{1+\delta}^{R} e^{\pi i(\alpha-1)} \cdot \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1-x} =$$
$$= 2i\sin(\pi - \pi\alpha)\Bigg(\int\limits_{\varepsilon}^{1-\delta} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1-x} + \int\limits_{1+\delta}^{R} \frac{x^{\alpha-1}\,dx}{1-x}\Bigg).$$

Правая часть этого равенства стремится к $2i\sin(\pi\alpha)J(\alpha)$, когда ε и δ стремятся к нулю, а R — к $+\infty$. Покажем теперь, что интегралы по окружностям радиусов ε и R стремятся к нулю. Действительно,

$$\Bigg|\oint\limits_{|z|=R} f(z)\,dz\Bigg| \leqslant \max_{|z|=R}\big|f(z)\big| \cdot 2\pi R \leqslant \frac{2\pi R^{\alpha}}{R-1} \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

Аналогичная оценка дает

$$\Bigg|\oint\limits_{|z|=\varepsilon} f(z)\,dz\Bigg| \leqslant \frac{2\pi\varepsilon^{\alpha}}{1-\varepsilon} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+).$$

Наконец, к интегралам по полуокружностям с центром в единице применим лемму о полувычете. При $\delta \to 0+$ мы получим

$$\int\limits_{\substack{|z-1|=\delta,\\ 0\leqslant\arg(z-1)\leqslant\pi}} e^{-\pi i(\alpha-1)} \cdot \frac{z^{\alpha-1}\,dz}{1-z} \to -\pi i \lim_{\substack{z\to1,\\ \operatorname{Im} z>0}} e^{-\pi i(\alpha-1)} z^{\alpha-1} = \pi i e^{-\pi i\alpha}$$

и, аналогично,

$$\int\limits_{\substack{|z-1|=\delta,\\ \pi\leqslant\arg(z-1)\leqslant 2\pi}} e^{-\pi i(\alpha-1)}\cdot\frac{z^{\alpha-1}\,dz}{1-z}\to -\pi i\lim_{\substack{z\to 1,\\ \operatorname{Im} z<0}} e^{-\pi i(\alpha-1)}z^{\alpha-1}=\pi i e^{\pi i\alpha}.$$

Значит, сумма этих интегралов стремится к $2\pi i\cos\pi\alpha$. Таким образом,

$$0=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ \delta\to 0+\\ R\to+\infty}}\oint\limits_{C_{\varepsilon,\delta,R}} f(z)\,dz=2i\sin(\pi\alpha)J(\alpha)-2\pi i\cos\pi\alpha,$$

откуда $v.p.\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x}\,dx=\pi\operatorname{ctg}\pi\alpha$ при $\alpha\in(0,1)$. $\square$

Замечание. Пример 3 позволяет вычислить интеграл

$$J(p,t)=v.p.\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^p}{x-t}\,dx\quad\text{при } t>0 \text{ и } p\in(-1,0).$$

Действительно, выполнив в $J(p,t)$ замену $x=ty$, мы получим

$$J(p,t)=-\frac{t^{p+1}}{t}\,v.p.\int\limits_0^{+\infty}\frac{y^p\,dy}{1-y}=-t^p\pi\operatorname{ctg}\pi(p+1)=-t^p\pi\operatorname{ctg}(\pi p).$$

Пример 4. При $a>0$ и $\sigma\in(0,1)$ вычислить интеграл

$$\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{dz}{a^z\cdot\sin(\pi z)}.$$

Решение. Параметризуем прямую, по которой ведется интегрирование: $z=\sigma+ix$, $x\in\mathbb{R}$. Заметим, что

$$\sin(\pi\sigma+i\pi x)=\frac{e^{i\pi\sigma-\pi x}-e^{-i\pi\sigma+\pi x}}{2i}=-\frac{e^{2\pi x}-e^{2i\pi\sigma}}{2i\cdot e^{\pi x}\cdot e^{i\pi\sigma}}.$$

откуда

$$I(a,\sigma)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^{-\sigma-ix}\cdot i dx}{\sin(\pi\sigma+i\pi x)}=2e^{i\pi\sigma}\cdot a^{-\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{\pi x}\cdot a^{-ix}\,dx}{e^{2\pi x}-e^{2i\pi\sigma}}.$$

Сделаем в правой части замену $t=e^{\pi x}$. Тогда $x=\frac{\ln t}{\pi}$, $dx=\frac{dt}{\pi t}$ и

$$a^{-ix}=a^{-i\ln t/\pi}=t^{-i\ln a/\pi}=t^{-ip},\quad \text{где } p=\tfrac{\ln a}{\pi}\quad (\text{или } a=e^{\pi p}).$$

Мы получим

$$I(a,\sigma)=\frac{2e^{i\pi\sigma}\cdot a^{-\sigma}}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{t^{-ip}\,dt}{t^2-e^{2\pi i\sigma}}=\lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ R\to+\infty}}\frac{2e^{i\pi\sigma}\cdot a^{-\sigma}}{\pi}\int\limits_{\varepsilon}^{R}\frac{t^{-ip}\,dt}{t^2-e^{2\pi i\sigma}}.$$

Обозначим интеграл в правой части через $J(\varepsilon,R)$.

Положим $f(z)=\dfrac{z^{-ip}}{z^2-e^{2\pi i\sigma}}$, где ветвь степенной функции определется формулой

$$z^{-ip}=e^{-ip(\ln|z|+i\arg z)},\quad \arg z\in[0,\pi].$$

При $0<\varepsilon<1$ и $R>1$ выберем контур интегрирования $C_{\varepsilon,R}$ так, как показано на рисунке 23.

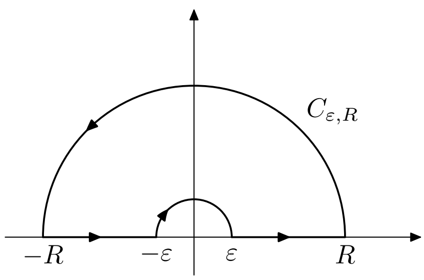

Рис. 23

Он ограничивает полукольцо, в котором функция f имеет единственную особую точку $e^{i\pi\sigma}$. По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}_{e^{i\pi\sigma}}f=\frac{2\pi i\cdot e^{\pi p\sigma}}{2e^{i\pi\sigma}}=\pi i\cdot a^{\sigma}\cdot e^{-i\pi\sigma}.$$

С другой стороны, рассмотрим интегралы по разным частям $C_{\varepsilon,R}$. Интеграл по $[\varepsilon, R]$ равен $J(\varepsilon, R)$. Полагая $z = -t$ при $t \in [R, \varepsilon]$, мы получим

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)\,dz = \int_{R}^{\varepsilon} \frac{t^{-ip} \cdot e^{\pi p} \cdot (-1)\,dt}{t^2 - e^{2\pi i\sigma}} = a \cdot J(\varepsilon, R).$$

Оценим теперь интегралы по полуокружностям. Пусть $z = re^{i\theta}$, где $r > 0$, $\theta \in [0, \pi]$. Тогда

$$\left|z^{-ip}\right| = \left|e^{-ip(\ln r + i\theta)}\right| = e^{p\theta} \leqslant e^{\pi|p|}.$$

Полагая $r = R$, мы получим

$$\left|\int\limits_{\substack{|z|=R\\ 0\leqslant\arg z\leqslant\pi}} f(z)\,dz\right| \leqslant \max_{\substack{|z|=R\\ 0\leq\arg z\leq\pi}} |f(z)|\cdot\pi R \leqslant \frac{e^{\pi|p|}\cdot\pi R}{R^2-1} \to 0 \quad (R \to +\infty),$$

а при $r = \varepsilon$ аналогичным образом

$$\left|\int\limits_{\substack{|z|=\varepsilon\\ 0\leq\arg z\leq\pi}} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{e^{\pi|p|}\cdot\pi\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+).$$

Теперь предельный переход дает

$$\pi i \cdot a^{\sigma} \cdot e^{-i\pi\sigma} = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ R\to+\infty}} \oint\limits_{C_{\varepsilon,R}} f(z)\,dz = (1+a) \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ R\to+\infty}} J(\varepsilon, R),$$

откуда

$$I(a,\sigma) = \frac{2e^{i\pi\sigma}\cdot a^{-\sigma}}{\pi} \lim_{\substack{\varepsilon\to 0+\\ R\to+\infty}} J(\varepsilon, R) = \\ = \frac{2e^{i\pi\sigma}\cdot a^{-\sigma}}{\pi} \cdot \frac{\pi i \cdot a^{\sigma}\cdot e^{-i\pi\sigma}}{1+a} = \frac{2i}{1+a}. \quad \square$$

Утверждение 1. *Пусть f — рациональная функция с полюсами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не лежащими на $[0, +\infty)$, и $f(z) = O\big(|z|^{-1}\big)$ при $z \to \infty$. Положим*

$$F(z) = \frac{f(z)}{\ln z - \pi i},$$

где ветвь логарифма задается формулой (5). Тогда

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{\ln^2 x + \pi^2} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} F.$$

Доказательство. Так как $f(z) = O\big(|z|^{-1}\big)$ при $z \to \infty$, существуют такие $R_0 > \pi$ и $M > 0$, что

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{|z|} \quad \text{при} \quad |z| > R_0.$$

Поскольку ноль не является особой точкой f, найдется такое число $\varepsilon_0 \in (0, e^{-\pi})$, что функция f ограничена в ε_0-окрестности нуля. Положим $m = \max\limits_{|z| \leqslant \varepsilon_0} \big|f(z)\big|$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $R \geqslant R_0$. Выберем контур $C_{\varepsilon,R}$ так, как показано на рисунке 24.

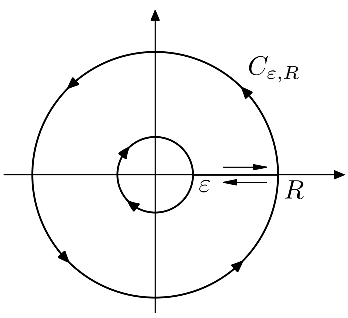

Рис. 24

По теореме Коши о вычетах

$$\oint\limits_{C_{\varepsilon,R}} F(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} F.$$

С другой стороны, рассмотрим интегралы по разным частям $C_{\varepsilon,R}$. Сумма интегралов по берегам отрезка $[\varepsilon, R]$ равна

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{f(x)\,dx}{\ln x - \pi i} + \int\limits_{R}^{\varepsilon} \frac{f(x)\,dx}{\ln x + 2\pi i - \pi i} = 2\pi i \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{f(x)\,dx}{\ln^2 x + \pi^2}.$$

Оценим интегралы по окружностям:

$$\Bigg| \oint\limits_{\substack{|z|=R \\ 0\leqslant \arg z \leqslant 2\pi}} \frac{f(z)\,dz}{\ln|z| + i\arg z - \pi i} \Bigg| \leqslant \frac{M}{R} \cdot \frac{1}{\ln R - \pi} \cdot 2\pi R \to 0 \quad (R \to +\infty),$$

$$\Bigg| \oint\limits_{\substack{|z|=\varepsilon \\ 0\leqslant \arg z \leqslant 2\pi}} \frac{f(z)\,dz}{\ln|z| + i\arg z - \pi i} \Bigg| \leqslant \frac{m}{|\ln \varepsilon| - \pi} \cdot 2\pi\varepsilon \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+).$$

Поэтому

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}_{a_k} F = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0+}} \oint\limits_{C_{\varepsilon,R}} F(z)\,dz = 2\pi i \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{f(x)\,dx}{\ln^2 x + \pi^2},$$

откуда и вытекает утверждение 1. □

Пример 5. При $a \neq 0$ вычислить интеграл

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(\ln^2 x + \pi^2)}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{\pi}{2|a|} \cdot \dfrac{1}{\left(\ln^2|a| + \frac{\pi^2}{4}\right)}$.

Решение. Вычислим интеграл при $a > 0$ и затем заменим в ответе a на $|a|$. Воспользуемся утверждением 1 для функций

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}, \quad F(z) = \frac{f(z)}{\ln z - \pi i}.$$

Особыми точками F будут -1 и $\pm ai$. Заметим, что

$$\ln(ai) - \pi i = \ln a + \tfrac{\pi}{2} i - \pi i = \ln a - \tfrac{\pi}{2} i, \quad \ln(-ai) - \pi i = \ln a + \tfrac{\pi}{2} i.$$

Тогда

$$\operatorname{Res}_{ai} F = \lim_{z\to ai} F(z)(z-ai) = \lim_{z\to ai} \frac{1}{(z+ai)(\ln z - \pi i)} = \\ = \frac{1}{2ai\big(\ln(ai) - \pi i\big)} = \frac{1}{2ai\big(\ln a - \frac{\pi}{2} i\big)}$$

и, аналогично,

$$\operatorname{Res}_{-ai} F = -\frac{1}{2ai\big(\ln(-ai) - \pi i\big)} = -\frac{1}{2ai\big(\ln a + \frac{\pi}{2} i\big)}.$$

Наконец, по формуле (1)

$$\operatorname{Res}_{-1} F = \frac{f(z)}{(\ln z - \pi i)'}\bigg|_{z=-1} = -f(-1) = -\frac{1}{1+a^2}.$$

Теперь в силу утверждения 1 искомый интеграл равен

$$\frac{1}{2ai\big(\ln a - \frac{\pi}{2} i\big)} - \frac{1}{2ai\big(\ln a + \frac{\pi}{2} i\big)} - \frac{1}{1+a^2} = \frac{\pi}{2a} \cdot \frac{1}{\big(\ln^2 a + \frac{\pi^2}{4}\big)} - \frac{1}{1+a^2}.$$

Осталось заменить a на $|a|$. $\square$

Пример 6. Вычислить

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(\ln^2 x + \pi^2)}.$$

Решение. Положим $F(z) = \dfrac{1}{(z+1)(\ln z - \pi i)}$, где ветвь логарифма задается формулой (5). Единственной особой точкой F будет -1. Функция F регулярна в кольце $\{z \in \mathbb{C}\colon\ 0 < |z+1| < 1\}$. По формуле Тейлора

$$\ln z - \pi i = \ln z - \ln(-1) = -(z+1) - \tfrac{1}{2}(z+1)^2 + O\big((z+1)^3\big) = \\ = -(z+1) \cdot \big(1 + \tfrac{1}{2}(z+1) + O\big((z+1)^2\big)\big) \quad (z \to -1).$$

Тогда при $z \to -1$

$$F(z) = -\frac{\left(1 + \frac{1}{2}(z+1) + O\big((z+1)^2\big)\right)^{-1}}{(z+1)^2} =$$

$$= \frac{-1 + \frac{1}{2}(z+1) + O\big((z+1)^2\big)}{(z+1)^2} = -\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{2(z+1)} + O(1).$$

Для последнего слагаемого в правой части особая точка -1 является устранимой, поэтому его ряд Лорана не содержит отрицательных степеней $z+1$. Значит, $\mathrm{Res}_{-1} F = \frac{1}{2}$. В силу утверждения 1 это и есть значение искомого интеграла. Таким образом,

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(\ln^2 x + \pi^2)} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. 1950.

2. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: ИЛ, 1963.

3. Волковыский Л. И., Лунц Г. Л., Араманович И. Г.
Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1975.

4. Леонтьева Т. А., Панферов В. С., Серов В. С. Задачи по теории функций комплексного переменного. ИМУ, 1992.

5. Сборник задач по теории аналитических функций (под ред. М. А. Евграфова). М.: Наука, 1974.

6. Теория функций комплексного переменного. Методические указания. ЛГУ, 1988.

7. Задачник-практикум по высшей математике (под ред. В. А. Волкова). СПб., 1997.

8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.

9. Александров П. С. Комбинаторная топология. М.: Гостехиздат, 1947.

10. Виноградов О. Л. Математический анализ. СПб.: БХВ-Петербург, 2017.

ОГЛАВЛЕНИЕ