Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математического анализа

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий

по математическому анализу
Часть 5

Множества и операции с ними

М. Г. Голузина, А. Г. Савельева

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2018

Р е ц е н з е н т ы:

д.ф.-м.н., профессор *Ю. Н. Бибиков,* СПбГУ

к.ф.-м.н., доцент *П. М. Винник,* БГТУ “Военмех” им. Д. Ф. Устинова

Авторы выражают благодарность А. Н. Подкорытову
за советы и ценные замечания.

Методические указания к проведению практических занятий по математическому анализу. Часть 5. Множества и операции с ними / М. Г. Голузина, А. Г. Савельева СПб., 2018. — 12 с.

Пособие предназначено как дополнительное для преподавателей, ведущих практические занятия по математическому анализу для студентов, обучающихся по направлению “Прикладная математика и информатика”.

Математический термин «множество элементов» соответствует понятиям коллекция (марок, значков и т.д.), группа (студентов, одноклассников), набор (предметов, лежащих в одном ящике), пачка (книг, печенья), встречающихся в обычной жизни. Строго говоря, множеством называют совокупность элементов определённой природы, объединенных по какому-либо признаку. Так их в общем случае и принято задавать — указанием на свойства элементов:

$$\left\{x \mid x^5 - x^4 + 3x - 2 = 0\right\} \text{ — множество решений уравнения,}$$
$$\left\{x \,\middle|\, \sin x > \frac{1}{\pi}\right\} \text{ — множество решений неравенства.}$$

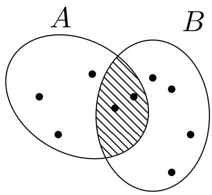
Если элементы множества можно занумеровать, используя все натуральные числа, то множество называют счётным. Если для нумерации достаточно отрезка натурального ряда — конечным. Если множество A состоит из конечного количества элементов, его можно задать, перечислив их: $A = \{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ множество оценок, которые ставят студентам на экзаменах. Запись $a \in A$ читается «a является элементом множества A», «a принадлежит множеству A» или «множество A содержит a».

Множества сравнивают по запасу элементов: множество A содержится в множестве B, если любой элемент $a \in A$ обязательно принадлежит B ($a \in B$). Эта связь между A и B коротко записывается $A \subset B$ или $B \supset A$. Знак «$\subset$» называется знаком включения, а запись читается “B содержит A”.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества состоят из одинаковых элементов и называются равными: $A = B$. Если $A \subset B \subset C$, то $A \subset C$.

Операции с множествами

Пересечение множеств A и B:

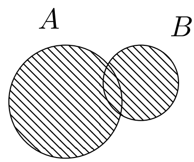


$$A \cap B = \{c \,|\, c \in A \text{ и } c \in B\}.$$

Операции с множествами удобно иллюстрировать картинками: рисуется замкнутая линия, как заборчик, отделяющий элементы множества от всего остального мира (вид из окна: стадо овец, огороженое забором). На рисунке слева заштрихованная территория соответствует пересечению $A \cap B$.

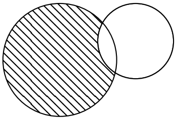
Если A и B не имеют общих элементов, то говорят, что A и B *дизъюнктны*. Множество, не имеющее элементов, называется *пустым множеством* и обозначается $\emptyset$.

Объединение множеств A и B:



$$A \cup B = \{c \,|\, c \in A \text{ или } c \in B\}.$$

Это «или» не является разделительным: компонента c принадлежит хотя бы одному из множеств. На рисунке справа заштрихована территория, на которой находятся элементы $A \cup B$.

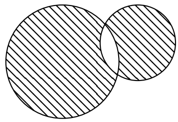


Разность A и B:

$$A \setminus B = \{c \,|\, c \in A \text{ и } c \notin B\}.$$

($c \notin B$ читается «c не является элементом множества B» или, более коротко, «c не принадлежит B».)

Симметрическая разность множеств A и B:



$$A \triangle B = \big(A \cup B\big) \setminus \big(A \cap B\big) = \big(A \setminus B\big) \cup \big(B \setminus A\big)$$

— набор элементов, которые по-разному относятся к A и B.

Примеры

1. *Проверить равенство*

$$D = \big(A \cup B\big) \cap C \overset{?}{=} \big(A \cap C\big) \cup \big(B \cap C\big) = E.$$

Надо проверить два включения $D \subset E$ и $E \subset D$.

Сначала проверим второе. Очевидно, что $A \cup B \supset A$, поэтому $\big(A \cup B\big) \cap C \ \supset \ A \cap C$. Аналогично, $\big(A \cup B\big) \cap C \ \supset \ B \cap C$. Имеем $D \supset B \cap C$ и $D \supset A \cap C$. Тогда $D \supset \big(A \cap C\big) \cup \big(B \cap C\big) = E$.

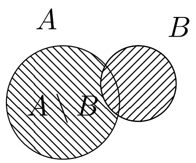
Теперь проверим включение $D \subset E$. Пусть $p \in D = \big(A \cup B\big) \cap C$. По определению пересечения $p \in A \cup B$ и $p \in C$. Возможные варианты:

$$p \in A \quad \text{и} \quad p \in B.$$

В первом случае $p \in A \cap C \subset E$, во втором — $p \in B \cap C \subset E$. Получили, что $p \in E$ при любом $p \in D$, т.е. $D \subset E$.

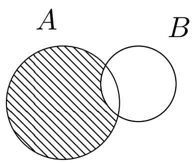
2. Сосчитать результат операций

а) $\big(A \setminus B\big) \cup B = ?$



Если посмотреть на картинку ($A \setminus B$ и B заштрихованы по-разному), то в ответе должно получиться $A \cup B$. Проверим это: $A \setminus B \subset A \cup B$ и $B \subset A \cup B$, поэтому $\big(A \setminus B\big) \cup B \subset A \cup B$. Обратное включение: если $c \in A \cup B$, то либо $c \in B \subset \big(A \setminus B\big) \cup B$, либо $c \notin B$, но тогда $c \in A$ и, по определению разности $c \in A \setminus B \subset \subset \big(A \setminus B\big) \cup B$. В любом случае $c \in \big(A \setminus B\big) \cup B$.

б) $\big(A \cup B\big) \setminus B = ?$



По картинке получаем $A \setminus B$. Проверим, что $\big(A \cup B\big) \setminus B = A \setminus B$.

Поскольку $A \cup B \supset A$, то $\big(A \cup B\big) \setminus B \supset A \setminus B$. Теперь проверим включение в другую сторону. Если $p \in \big(A \cup B\big) \setminus B$, то $p \in A \cup B$ и $p \notin B$. По определению объединения, с учётом того, что $p \notin B$, имеем $p \in A$, т.е. $p \in A \setminus B$ и верно $\big(A \cup B\big) \setminus B \subset A \setminus B$.

3. Решить уравнение: если A и B множества, то найти все множества X такие, что $A \cup X = B$.

По определению объединения $A \subset B$, $X \subset B$, т.е. если $A \not\subset B$, то таких множеств X нет: $\{X \mid A \cup X = B\} = \emptyset$.

Теперь рассмотрим случай, когда $A \subset B$. Верно равенство $B = \big(A \cap B\big) \cup \big(B \setminus A\big) = A \cup \big(B \setminus A\big)$. Чтобы выполнялось уравнение нужно, чтобы $B \setminus A \subset X$. Проверим, что при выполнении этих двух включений $B \setminus A \subset X \subset X \subset B$ верно, что $A \cup X = B$.

1. $A \subset B$ и $X \subset B$ влечёт $A \cup X \subset B$.

2. $X \supset B \setminus A$. Следовательно, $A \cup X \supset A \cup \big(B \setminus A\big) = B$ (см. выше), т.е. $A \cup X = B$.

Ответ. 1) Если $A \not\subset B$ (т.е. $A \setminus B \neq \emptyset$), то множество решений уравнения пусто.

2) Если $A \subset B$, то $\{X \mid B \setminus A \subset X \subset B\} = \{X \mid A \cup X = B\}$.

4. Свойства операции симметрической разности множеств.

1) $A \triangle B = B \triangle A$

2) $\big(A \triangle B\big) \triangle C = A \triangle \big(B \triangle C\big)$ и поэтому скобки можно не ставить.

Доказательство. Пусть $p \in \big(A \triangle B\big) \triangle C$. Тогда или (а) $p \in$ $\in A \triangle B$ и $p \notin C$, или (б) $p \in C$ и $p \notin A \triangle B$.

В случае (а) имеется два варианта: $p \in A$, $p \notin B$ и $p \notin C$ — тогда $p \notin B \triangle C$ и $p \in A$, т.е. $p \in A \triangle \big(B \triangle C\big)$; или $p \notin A$, $p \in B$, $p \notin C$ — тогда $p \in B \triangle C$ и $p \notin A$, т.е. $p \in A \triangle \big(B \triangle C\big)$.

В случае (б) также имеется 2 варианта: $p \in A$, $p \in B$, $p \in C$ — тогда $p \notin B \triangle C$ и $p \in A$, т.е. $p \in A \triangle \big(B \triangle C\big)$; или $p \notin A$, $p \notin B$, $p \in C$ — тогда $p \in B \triangle C$ и $p \notin A$, т.е. $p \in A \triangle \big(B \triangle C\big)$.

Мы проверили, что $\big(A \triangle B\big) \triangle C \subset A \triangle \big(B \triangle C\big)$. Аналогично проверяется противоположное включение.

3) Из $A \triangle B = C$ следует $A = B \triangle C$.

Доказательство.

$$\big(A\triangle B\big)\triangle B = C\triangle B = B\triangle C$$
$$\big(A\triangle B\big)\triangle B = A\triangle\big(B\triangle B\big) = A\triangle\emptyset = A$$

Из свойств 1 и 2 следует, что при выполнении подряд нескольких операций $\triangle$ можно переставлять участвующие множества в любом порядке. В частности: $\big(A\triangle C\big)\triangle\big(B\triangle C\big) = A\triangle C\triangle B\triangle C = A\triangle\big(C\triangle C\big)\triangle B = \big(A\triangle\emptyset\big)\triangle B = A\triangle B$.

Упражнения для читателя

Проверить равенства:
1. $\big(A\cap B\big)\cup C \stackrel{?}{=} \big(A\cup C\big)\cap\big(B\cup C\big)$
2. $\big(A\cup B\big)\setminus C \stackrel{?}{=} \big(A\setminus C\big)\cup\big(B\setminus C\big)$
3. $\big(A\setminus B\big)\setminus C \stackrel{?}{=} A\setminus\big(B\cup C\big)$
4. $\big(A\setminus B\big)\setminus C \stackrel{?}{=} A\setminus\big(B\setminus C\big)$.

Решить уравнения с множествами:
5. $A\cap X = B$
6. $A\triangle X = B$
7. $X\setminus A = B$

Обозначение. Если X множество, то $2^X = \{A\,|\,A\subset X\}$ — набор подмножеств множества X.

Рассмотрим множество $Y\subset 2^X$ такое, что $\forall\, A,\ B\in Y$ множества $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $X\setminus X\in Y$. Если X — прямоугольник на плоскости, то множества получаемые конечным объединением треугольников $\triangle_k \subset X$ — $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \triangle_k$ — обладают этим свойством.

$$Y = \left\{ A \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{найдётся конечный набор треугольников} \\ \{\triangle_k\}_{k=1}^{n} \text{ такой, что } A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \triangle_k \end{array} \right\}.$$

Для множеств $A \in Y$ определено понятие площади.

Площадь: 1) $S(A) \geq 0$, $S(\emptyset) = 0$; 2) если $A \cap B = \emptyset$, то $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$; 3) если $A \subset B$, то $S(A) \leq S(B)$.

Свойство 2 называется аддитивностью, ствойство 3 называется монотонностью функции S. (Площадь треугольника та же, что была в школьной программе, площадь единичного квадрата равна 1.)

Задача 1. $S(X) = 10$, A, $B \in Y$ и $S(A \cap B) = 2$. Найти точные оценки сверху и снизу для $S(A) + S(B)$, т.е. найти числа m и M такие, что $m \leq S(A) + S(B) \leq M$ и m самое большое с этим свойством, M — самое маленькое.

Решение. Свойство аддитивности S допускает обобщение:

1. Если $\{A_k\}_{k=1}^{n} \subset Y$ — попарно дизъюнктный набор подмножеств содержащихся в X, т.е. $\forall\ k_1 \neq k_2\ A_{k_1} \cap A_{k_2} = \emptyset$, то $S\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} S(A_k)$.

2. Если $A \cap B \neq \emptyset$, то $S(A \cup B) = S(A) + S(B) - S(A \cap B)$. Заметим, что $A \cup B = \big(A \setminus B\big) \cup \big(A \cap B\big) \cup \big(B \setminus A\big)$ — 3 попарно

диъюнктных подножества в $A\cup B$, поэтому

$$S(A\cup B)=S(A\setminus B)+S(A\cap B)+S(B\setminus A)=$$
$$=S\big((A\setminus B)\cup(A\cap B)\big)+S(\big((B\setminus A)\cup(A\cap B)\big)-S(A\cap B)=$$
$$=S(A)+S(B)-S(A\cap B).$$

Надо оценивать $S(A)+S(B)=S(A\cup B)+S(A\cap B)=S(A\cup B)+2$:

$$S(A\cup B)+2\geq S(A\cap B)+2=4,$$
$$S(A\cap B)+2\leq S(X)+2=12.$$

Приведём примеры множеств A и B, для которых получается 4 и 12. Если $A=B=A\cap B$, то $S(A)+S(B)=4$. Если $A\supset B$, то $A\cap B=B$, т.е. $S(B)=2$; пусть $A=X$, тогда $S(A)+S(B)=10+$ $+2=12$. Значит, оценки улучшить нельзя.

Задача 2. $S(X)=10$, A, B, $C\subset X$, $S(A\setminus B)=4$, $S\big((A\cap C)\cup B\big)=5$. Оценить $S(A)+S(B)+S(C)$.

Решение.

$$S(A)+S(B)+S(C)=S(A\cup C)+S(A\cap C)+S(B)=$$
$$=S(A\cup B\cup C)+S\big((A\cup C)\cap B\big)+S(A\cap C)\leq 10+5+5=20,$$

т.к. $(A\cup C)\cap B\subset B\subset(A\cap C)\cup B$ и $A\cap C\subset(A\cap C)\cup B$, а площадь монотонна.

Чтобы получить сумму 20 нужно:

1) $S(A\cap C)=S\big((A\cap C)\cup B\big)=5$. Можно взять $B=A\cap C$, чтоб была побольше $S(B)$.

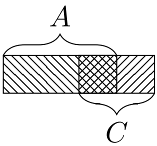
2) $S\big((A\cup C)\cap B\big)=5$ — это уже выполнено:

$$(A\cup C)\cap(A\cap C)=A\cap C.$$

3) $S(A\cup C\cup B)=10$. Можно взять $A\cup B\cup C=X$. Преобразуем:

$$A\cup B\cup C=A\cup(A\cap C)\cup C=A\cup C=(A\setminus C)\cup(C\setminus A)\cup(A\cap C).$$

$S(A\setminus B)=S\big(A\setminus(A\cap C)\big)=S(A\setminus C)=4$ по условию.



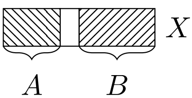
$S(C\setminus A)=1$, т.к. множества $A\setminus C$, $C\setminus A$ и $A\cap C$ попарно не пересекаются и сумма их площадей — это площадь X. Получили $S(B)=5$, $S(C)=S(C\cap A)+S(C\setminus A)=5+1=6$, $S(A)=$ $=S(A\setminus C)+S(A\cap C)=9$. Сумма 20.

Оценим снизу.

$$S(A)+S(B)+S(C)\geq S(A\setminus B)+S(B)+S(A\cap C)\geq$$
$$\geq 4+S\big(B\cup(A\cap C)\big)=4+5=9.$$

Чтобы получить 9, нужно:

1) $S(A)=S(A\setminus B)=4$. Можно взять $B\cap A=\emptyset$.



2) $S(B)+S(A\cup C)=S\big(B\cup(A\cap C)\big)=5$. Можно взять такие A, B, C, что $B\cap(A\cap C)=\emptyset$, тогда первое равенство выполнено при $C=\emptyset$ и $S(B)=5$. Отсюда $S(A)+S(B)+S(C)=9$.

Задачи читателю

8. $S(X)=10$, $S(A\cap B)=3$, $S(C\setminus A)=2$ (A, B, $C\subset X$).

Оценить сверху и снизу сумму $S(A)+S(B)+S(C)$.

9. $S(X)=10$, A, B, $C\subset X$, $S(A\cup B)=5$, $S\big(B\setminus(C\cap A)\big)=3$. Оценить сумму площадей.

Ответы

1, 2, 3 — равенства верные.

4. Левое множество содержится в правом, но равенства для любых A, B, C нет.

5. При $A\supset B$ $\big\{X\,|\,B\subset X\subset M\setminus(A\setminus B)\big\}$, иначе множество решений пусто.

6. $X=A\triangle B$.

7. При $A\cap B=\emptyset$ $\big\{X\,|\,B\subset X\subset X\subset A\cup B\big\}$, иначе множество решений пусто.

8. $m=8$, $M=23$.

9. $m=5$, $M=22$.