Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра математического анализа

# МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к проведению практических занятий
по математическому анализу

Часть 1
**Определённый интеграл**

М. Г. Голузина, А. Г. Савельева

2016

Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор *Ю. Н. Бибиков*, СПбГУ,
к.ф.-м.н., профессор *В. Л. Файншмидт*, БГТУ «Военмех» им. Д. Ф. Устинова.

Авторы выражают благодарность А. Н. Подкорытову за советы и ценные замечания.

Методические указания к проведению практических занятий по математическому анализу. Часть 1. Определённый интеграл.
М. Г. Голузина, А. Г. Савельева – СПб., 2016. – 10 с.

Пособие предназначено как дополнительное для преподавателей, ведущих практические занятия по математическому анализу для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика» и «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

## Сравнение функций при $x \to a$

Пусть имеется числовое множество $X \subseteq R$, на котором задана функци $f: X \to R,\ a -$ точка сгущения множества $X$.

Обозначим через $V_\delta(a)$ некоторую окрестность точки $a$ и будем считать функции $k, g: X \cap \dot{V}_\delta(a) \to R$ такими, что $f(x) = k(x) \cdot g(x)$ для $x \in X \cap \dot{V}_\delta(a)$. Тогда

1. Если $\lim\limits_{a} k = 0$, пишут $f(x) = o\big(g(x)\big)$ при $x \to a$. Читается «*f* есть о-маленькое от *g*».
2. Если $\lim\limits_{a} k = 1$, то говорят, что «*f* эквивалентна *g*» и записывают $f(x) \sim g(x)$ при $x \to a$.
3. Если $k$ – ограниченная функция, пишут $f(x) = O\big(g(x)\big)$ при $x \to a$. Читается «*f* есть О-большое от *g*».

Эти обозначения используют в формулах, если хотят выделить одно из описанных выше свойств функции, но настоящими равенствами они не являются.

# Арифметика с о-малыми и О-большими.

*При описании свойств для краткости опустим условие $x \to a$, хотя всюду будем это подразумевать.*

1. $f \cdot o(g) = o(f \cdot g) = f \cdot g \cdot o(1)$. Здесь равенства настоящие.
2. При $c \in R \quad o(c \cdot g) = o(g)$.
3. $f \cdot O(g) = O(f \cdot g) = f \cdot g \cdot O(1)$.
4. $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$.
5. Если $f = o(g)$, то $f = O(g)$, но не наоборот.

6. $o(g) + o(g) = o(g)$ Здесь символами $o(g)$ обозначаются, вообще говоря, разные функции, удовлетворяющие определению 1.
7. $o(g) \cdot O(f) = o(g \cdot f)$.
8. $f \sim g \leftrightarrow f = g + o(g) \leftrightarrow g = f + o(g) \leftrightarrow g \sim f$.
9. Если $f \sim g$, то $o(f) = o(g)$ и $O(f) = O(g)$.
10. $o(f) + o(g) = o(|f| + |g|)$.
11. Если $k(x)$ – ограниченная функция, то
    $o(k \cdot g) = o(g)$ и $O(k \cdot g) = O(g)$.
12. $f \sim g \Rightarrow f \cdot h \sim g \cdot h$.
13. $f \sim g \nRightarrow f + h \sim g + h$, но $f + h = g + h + o(g)$.

## Свойства определенного интеграла

1. **Геометрический смысл**.

Если $f \geq 0$ и $a < b$, то $\int_a^b f$ считает площадь подграфика.

2. **Аддитивность по промежутку**.

Если $a < b < c$, то

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

3. **Ориентация.**

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Теперь можем сказать, что св. 2 будет верно при любом соотношении между $a, b, c$.

4. **Линейность.**

$$\int_a^b \left(\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x)\right) dx = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\, dx + \mu \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

5. **Монотонность.**

Если $f(x) \le g(x)$ при $x \in [a, b], a < b$, то

$$\int_a^b f \le \int_a^b g$$

6. **Формула Ньютона-Лейбница.**

Если $F' = f$, то

$$\int_a^b f = F \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

7. **Интегрирование по частям.**

Если $F' = f, G' = g$, то

$$\int_a^b F \cdot g\, dx = F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a) - \int_a^b G \cdot f\, dx$$

8. **Замена переменной.**

Если $h\colon [p, q] \to [a, b]$ и $h(p) = a, h(q) = b$, то

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_p^q f\left(h(y)\right) h'(y)\, dy$$

Это утверждение будет верно и в случае $h(p) = b, h(q) = a$, но со знаком «–». Если в левой части пределы интегрирования вместо $a, b$ записать как $h(p), h(q)$ то охватываются оба случая.

## 9. Теорема о среднем.

Если $f$ – непрерывна, а $g \geq 0$, то $\exists c \in [a, b]$ такова, что

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = f(c) \cdot \int_a^b g(x)\, dx$$

## Задача:

для следующих функций *v(t)* найти простую эквивалентную функцию при $\boldsymbol{x \to a}$

*1.*

$$v(t) = \int_t^{t^2} \sqrt{x - sin\, x} \cdot dx \text{ при } t \to \infty$$

**Решение.**

- Сначала попробуем найти правдоподобный ответ с помощью «правдоподобных рассуждений: $t$ – очень большое, $x > t$ – тоже большое, $x - \sin x \approx x$» ($\approx$ – знак «равенства», написанный дрожащей от страха рукой)

$$v(t) \approx \int_t^{t^2} \sqrt{x} \cdot dx = \frac{2}{3} \cdot \left(t^3 - t^{3/2}\right) \sim \frac{2}{3} \cdot t^3$$

Будет ли это настоящий ответ?

Посчитаем предел $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{v(t)}{\frac{2}{3} \cdot t^3}$ с помощью правила Лопиталя:

- ✓ Предел знаменателя очевидно $+\infty$
- ✓ Чему равен предел $v(t)$?

$$v(t) \geq \int_t^{t^2} 1 \cdot dx = t^2 - t \to +\infty \text{ при } t > 2$$

✓ Производная знаменателя отлична от нуля:

$$2t^2 \neq 0 \text{ при } t \to +\infty$$

и правило Лопиталя применимо. Осталось выяснить, чему равен

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{v'(t)}{2\cdot t^2}$$

Если $F'(x) = \sqrt{x - \sin x}$, то $v(t) = F(t^2) - F(t)$ и $v'(t) =$
$= F'(t^2)\cdot 2t - F'(t) = \sqrt{t^2 - \sin t^2}\cdot 2t - \sqrt{t - \sin t}$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{v'(t)}{2\cdot t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{t^2 - \sin t^2}\cdot 2t - \sqrt{t - \sin t}}{2\cdot t^2} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\sqrt{1 - \frac{\sin t^2}{t^2}} - \frac{\sqrt{1 - \frac{\sin t}{t}}}{2\cdot t\sqrt{t}}\right) = 1$$

Таким образом, согласно правилу Лопиталя мы получаем, что при $t \longrightarrow +\infty$

$$k(t) = \frac{v(t)}{\frac{2}{3}t^3} \longrightarrow 1$$

Как и требуется в определении эквивалентности.■

- Теперь проведем рассуждения без использования правила Лопиталя. Вычислить интеграл через первообразную мы не можем, воспользуемся оценками.

$\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x - \sin x} \leq \sqrt{x+1}$, а значит

$$\int_t^{t^2} \sqrt{x-1}\cdot dx \ \leq v(t) \leq \int_t^{t^2} \sqrt{x+1}\cdot dx$$

Вычислим интеграл из левой части неравенства

$$\int_t^{t^2} \sqrt{x-1}\,dx = \frac{2}{3}\left(\sqrt{t^2-1}\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\sqrt{t-1}\right)^3$$

$$= \frac{2}{3}\cdot t^3 \cdot \left(\left(\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\right)^3 - \frac{\left(\sqrt{1-\frac{1}{t}}\right)^3}{t^{3/2}}\right) \sim \frac{2}{3}\cdot t^3$$

поскольку при $t \to +\infty$ скобка стремится к 1. Оценка интеграла сверху приводит к тому же результату, что и примененная оценка снизу. ■

*2.*

$$v(t) = \int_t^{t^2} \sqrt{x - sin\,x}\cdot dx \text{ при } t \to 0$$

**Решение:** заменим подкоренную функцию её разложением по формуле Тейлора

$$\sqrt{x-\sin x} = \sqrt{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \sim \sqrt{\frac{x^3}{6}}.$$

Используем теорему о среднем: существует такое значение $c(t) \in [t^2, t]$, что

$$v(t) = \frac{\sqrt{c(t) - \sin c(t)}}{\sqrt{\frac{c(t)^3}{6}}} \cdot \int_t^{t^2} \sqrt{\frac{x^3}{6}}\cdot dx$$

Поскольку $c(t) \to 0$, то множитель $\frac{\sqrt{c(t)-\sin c(t)}}{\sqrt{\frac{c(t)^3}{6}}} \to 1$ и для исследуемой функции мы получаем

$$v(t) \sim \int_t^{t^2} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6}} \cdot dx = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{6}} \cdot \left(t^5 - t^{\frac{5}{2}}\right) \sim -\frac{\sqrt{6}}{15} \cdot t^{\frac{5}{2}}. \blacksquare$$

*3.*

$$v(t) = \int_t^{3t} \frac{\sin x}{x^2} \cdot dx \text{ при } t \to 0$$

**Решение:** используем теорему о среднем

$$v(t) = \int_t^{3t} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\sin c(t)}{c(t)} \cdot \int_t^{3t} \frac{dx}{x} \sim \ln|3t| - \ln|t| = \ln 3.$$

Здесь мы учитываем, что $c(t) \in [t, 3t]$, а значит $c(t) \to 0$ при $t \to 0. \blacksquare$

4.

$$v(t) = \int_0^{t} \sqrt{x + e^x} \cdot dx \text{ при } t \to +\infty$$

**Решение:** подынтегральная функция быстро растет, теорема о среднем тут не поможет, поскольку $c(t) \in [0; t]$ и $\lim\limits_{t\to\infty} c(t)$ при такой информации не сосчитать. Придется оценивать.

$$e^{x/2} < \sqrt{x + e^x} < e^{x/2} + \sqrt{x}$$

Интегрируем

$$\int_0^t e^{x/2}\cdot dx \ \le v(t) \le \int_0^t \left(e^{\frac{x}{2}}+\sqrt{x}\right)\cdot dx = 2\cdot\left(e^{t/2}-1\right)+\frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}} \sim 2\cdot e^{\frac{t}{2}} \text{ при } t\to+\infty$$

Левая часть тоже эквивалентна $2\cdot e^{\frac{t}{2}}$ при $t\to+\infty$. Значит при $t\to\infty$ функция $v(t)\sim 2\cdot e^{\frac{t}{2}}$. ■

*5.*

$$\mathrm{v(t)} = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^3}\cdot \mathrm{dx}, k\in N, k\to+\infty$$

**Решение***:* по теореме о среднем при каждом значении $k$ найдется точка $c(k)\in[2\pi k; 2\pi k+\pi]$ такая, что

$$\mathrm{v(t)} = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{\sin x}{x^3}\cdot \mathrm{dx} = \frac{1}{c^3(k)}\cdot\int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \sin x\cdot dx = \frac{2}{c^3(k)}$$

При $k\to\infty$ пределы интегрирования эквивалентны: $2k\pi+\pi\sim 2k\pi$, поэтому $c(k)\sim 2k\pi$ и

$$v(t) = \frac{2}{c^3(k)} \sim \frac{2}{(2\pi k)^3}. \ ■$$

*6.*

$$v(t) = \int_t^{t^2} e^{x^2+\sin x}\cdot dx \text{ при } t\to+\infty$$

**Решение:** оценка синуса $-1\le\sin x\le 1$ не дает одинаковых эквивалентных для большей и меньшей функций, поэтому выразим $v(t)$ иначе:

$$v(t)=\int\limits_t^{t^2} e^{x^2+\sin x}\cdot dx=\int\limits_t^{t^2}\left(e^{x^2+\sin x}\right)'\cdot\frac{1}{2x+\cos x}dx$$

$$=\frac{e^{x^2+\sin x}}{2x+\cos x}\cdot\Bigg|_t^{t^2}$$

$$+\int\limits_t^{t^2}\frac{e^{x^2+\sin x}}{(2x+\cos x)^2}\cdot(2-\sin x)\cdot dx$$

Новый интеграл берется от функции, которая намного (точнее, во много раз) меньше $v(t)$. Чтобы убедиться в этом, применим к нему теорему о среднем:

$$v(t)=\frac{e^{t^4+sint^2}}{2t^2+\cos t^2}-\frac{e^{t^2+sint}}{2t+\cos t}+\frac{2-\sin c(t)}{(2c(t)+\cos c(t))^2}\cdot v(t)$$

Так как $c(t)\to+\infty$, последнее слагаемое будет $o\big(v(t)\big)$ и в эквивалентную не попадет:

$$v(t)=\frac{e^{t^4+sint^2}}{2t^2+\cos t^2}+o\left(\frac{e^{t^4+sint^2}}{2t^2+\cos t^2}\right)$$

$$+o\big(v(t)\big)\sim\frac{e^{t^4+sint^2}}{2t^2+\cos t^2}\text{ при } t\to+\infty$$

7.

$$v(t)=\int\limits_0^t\frac{dx}{x+\cos x}\text{ при } t\to+\infty$$

**Решение:** при $x>1$ используем оценки $\frac{1}{x+1}\le\frac{1}{x+\cos x}\le\frac{1}{x-1}$

$$v(t)=\int\limits_0^2\frac{dx}{x+\cos x}+\int\limits_2^t\frac{dx}{x+\cos x}$$

$$\int_2^t \frac{dx}{x+1} \le \int_2^t \frac{dx}{x+\cos x} \le \int_2^t \frac{dx}{x-1} = \ln(t-1) \sim \ln t$$

$$\int_2^t \frac{dx}{x+1} = \ln(t+1) - \ln 3 \sim \ln t \ \to +\infty$$

Значит $v(t) \to +\infty$, а так как $\int_0^2 \frac{dx}{x+\cos x}$ – число, то

$$v(t) \sim \int_2^t \frac{dx}{x+\cos x} \sim \ln t\,.\ \blacksquare$$

## Задачи для читателя:

Найдите простую эквивалентную функцию для каждой из приведенных ниже в окрестности указанной точки:

$$1.\ v(t) = \int_0^t \sqrt{x^2+\sin x}\cdot dx \quad \text{при} \quad \begin{matrix} a)\ t \to +\infty \\ b) t \to +0 \end{matrix}$$

$$2.\ v(t) = \int_0^t \sqrt{arctg\ x}\cdot dx \text{ при } t \to +\infty$$

$$3.\ v(t) = \int_{2k\pi}^{2k\pi+\pi} \frac{cos\ x}{x}\cdot dx\,, k \in N, k \to +\infty$$

$$4.\ v(t) = \int_t^{t^3} \frac{\ln(e^x-1)}{x^2}\cdot dx \ \text{ при } t \to \infty$$

5. $v(t) = \int\limits_{t}^{t^3} \sqrt{x^6 - 1} \cdot dx$ при $t \to 1, t > 1$

6. $v(t) = \int\limits_{t}^{t^3} \sqrt{\ln x} \cdot dx$ при $\begin{matrix} a)\ t \to +\infty \\ b) t \to 1, t > 1 \end{matrix}$

**Ответы.**

1a. $\frac{t^6}{2}$ 1b. $-\frac{2}{3} t^{3/2}$ 2. $t\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 3. $\frac{1}{2k^2\pi^2}$

4. $2 \ln t$ 5. $\frac{2\sqrt{6}}{3} \left(3^{3/2} - 1\right)(t-1)^{3/2}$

6a. $\sqrt{3 \ln t} \cdot t^3$ 6b. $\frac{2}{3}\left(3^{3/2} - 1\right)(t-1)^{3/2}$