Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математического анализа

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий

по математическому анализу
Часть 4

Многозначные функции

М. Г. Голузина, Т. П. Дубова

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2016

Р е ц е н з е н т ы:

д.ф.-м.н., профессор *Ю. Н. Бибиков,* СПбГУ

к.ф.-м.н., профессор *В. Л. Файншмидт,* БГТУ “Военмех” им. Д. Ф. Устинова

Авторы выражают благодарность А. Н. Подкорытову за советы и ценные замечания.

Методические указания к проведению практических занятий по математическому анализу. Часть 4. Многозначные функции / М. Г. Голузина, Т. П. Дубова — СПб., 2016. — 9 с.

Пособие предназначено как дополнительное для преподавателей, ведущих практические занятия по математическому анализу для студентов, обучающихся по направлению “Прикладная математика и информатика”.

Используемое в теории функций комплексного переменного понятие "многозначной функции", заданной в области D, противоречит принятому в математическом анализу требованию, чтобы каждому x соответствовало только одно значение $y = f(x)$. Многозначности можно избежать следующим образом. Пусть X и Y множества и $\mathcal{P}(Y) = \{C : C \subset Y\}$. Рассмотрим отображение $T : X \to \mathcal{P}(Y)$, которое точке x сопоставляет подмножество $T(x) \in \mathcal{P}(Y)$.

Отображение $f : E \to Y$ называется ветвью отображения T, если $E \subset X$ и $\forall x \in E \ f(x) \in T(x)$.

Примеры

1. $T : \mathbb{C} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$. $T(z) = \left\{t \in \mathbb{R} : z = |z|e^{it}\right\}$. Это отображение называется аргументом z и обозначается $T(z) = \operatorname{Arg} z$. Среди ветвей Arg выделяют одну, которую называют главным аргументом: $f_0(z) = \arg z \in \operatorname{Arg} z \cap (-\pi, \pi]$. Она задана на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, а непрерывна только на $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, так как при $a < 0$

$$\lim_{y \to +0} \arg(a + iy) = f_0(a + 0i) = \pi,$$

$$\text{а} \lim_{y \to +0} \arg(a - iy) = f_0(a - 0i) = -\pi.$$

Множество $\operatorname{Arg} z = \left\{\arg z + 2\pi k \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$. Поэтому другие ветви Arg получим, выбирая k: $f(z) = \arg z + 2\pi k(z)$. Обычно стараются подобрать функцию k так, чтобы f была на E непрерывна. Так на $E = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ получим непрерывную ветвь, если $k(z) =$

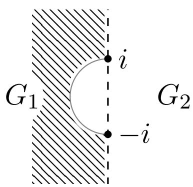
$= \begin{cases} 0 \text{ при } \Im z \geq 0, \\ 1 \text{ при } \Im z < 0. \end{cases}$ Если $E \setminus (-\infty,\, 0]$ состоит из компонент связности E_α, то на каждом E_α функция k непрерывна и принимает только целочисленные значения, поэтому сужение $k|_{E_\alpha} = c_\alpha = const$. Две разные непрерывные ветви аргумента, заданные в области D отличаются на константу вида $2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2. Логарифм. $T(z) = \operatorname{Ln} z = \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}$. При $z \neq 0$

$$\operatorname{Ln} z = \left\{\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k)\middle| k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Если f — непрерывная ветвь аргумента, то $h(z) = \ln|z| + if(z)$ непрерывная ветвь $\operatorname{Ln} z$. По теореме о дифференцировании обратной функции $h'(z) = \frac{1}{z}$. Если для $\alpha \in \mathbb{C}$ и $A,\, B \subset \mathbb{C}$ ввести обозначение $\alpha A = \{\alpha \cdot a \big| a \in A\}$, $A + B = \{(a+b) \big| a \in A,\, b \in B\}$, то $\operatorname{Ln} \frac{1}{z} = -\operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.

3. $\operatorname{Arctg} z = \{w : \operatorname{tg} w = z\} = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$. Построим непрерывную ветвь Arctg в $\mathbb{C}$ с разрезом по левой половине единичной окружности.



$$f(z) = -\frac{i}{2} \ln\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right| + \frac{1}{2} \arg\frac{1+iz}{1-iz} + \pi k(z).$$

Первое слагаемое непрерывно, второе разрывно, если $\frac{1+iz}{1-iz}$ отрицательно. Это возможно только, если $z = iy$ и $\frac{1-y}{1+y} < 0$, то есть при $y \in (-\infty,\, -1) \cup (1,\, +\infty)$. Эти лучи разрезают нашу область на две области:

$$G_1 = \left\{ z \middle| |z| > 1,\ \Re z < 0 \right\},$$

$$G_2 = \left\{ z \middle| \Re z > 0 \right\} \cup \left\{ z \middle| |z| < 1 \right\}.$$

На каждой из них k постоянна: $k|_{G_j} = c_j$, $j \in \{1, 2\}$. Выберем c_1 и c_2 так, чтобы получилась непрерывная функция. Пусть $b \in \mathbb{R}$ и $|b| > 1$. Точка ib — предельная для G_1 и G_2.

$$\lim_{ib} f|_{G_1} = -\frac{i}{2} \ln \left| \frac{1-b}{1+b} \right| + \lim_{\substack{y \to b \\ x \to -0}} \frac{1}{2} \arg \frac{1 - y^2 - x^2 + 2xi}{(1+y)^2 + x^2} + \pi c_1 =$$

$$= -\frac{i}{2} \ln \left| \frac{1-b}{1+b} \right| - \frac{\pi}{2} + \pi c_1,$$

так как при $z \in G_1$ и $z = x + iy$ $|z| > 1$, а $\Re z = x < 0$. Следовательно, $\Re \frac{1-y^2-x^2+2xi}{x^2+(1+y)^2} < 0$ и $\Im \frac{1-y^2-x^2+2xi}{(1+y)^2+x^2} < 0$ и $\lim \arg = -\pi$. Аналогично,

$$\lim_{ib} f|_{G_2} = -\frac{i}{2} \ln \left| \frac{1-b}{1+b} \right| + \frac{\pi}{2} + \pi c_2,$$

так как вблизи ib ($|b| > 1$) в G_2 $\Im \left(\frac{1-y^2-x^2+2xi}{x^2+(1+y)^2} \right) = \frac{2x}{x^2+(1+y)^2} > 0$, а $|z| > 1$. Пределы совпадут, если $c_1 = c_2 + 1$.

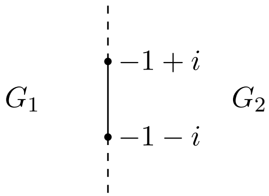
4. Степенное отображение. Для $p \in \mathbb{C}$

$$z^p = e^{p \operatorname{Ln} z} = \left\{ e^{p(\ln|z| + i \arg z + i2\pi k)} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Если p — рациональное и $p = \frac{m}{n}$, m, n взаимно простые, то в множестве z^p n точек.

Построим непрерывную ветвь отображения $(z^2 + 2z + 2)^{1/2}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1-i,\,-1+i]$:

$$f(z)=\sqrt{|z^2+2z+2|}\,e^{i\frac{1}{2}\arg\left(z^2+2z+2\right)+i\pi k(z)}.$$



$\arg\left(z^2+2z+2\right)$ разрывен при $z^2+2z+2=$ $=t<0$; $z_1=-1+i\sqrt{1-t}$, $z_2=-1-i\sqrt{1-t}$. При $t<0$ эти точки заполняют вертикальные лучи — продолжение отрезка. На полуплоскостях $G_1=\{z\big|\Re z<-1\}$ и $G_2=$ $=\{z\big|\Re z>-1\}$ можно выбрать $k(z)=c_j$, $j\in\{1,\,2\}$. Посчитаем предел в точке $-1+ib$, $b>1$:

$$\lim_{\substack{z\to-1+ib\\ z\in G_1}}\arg\left(z^2+2z+2\right)=$$

$$=\lim_{\substack{x\to-1-0\\ y\to b}}\arg\big((x+1)^2+1-y^2+i2y(x+1)\big)=-\pi;$$

$$\lim_{\substack{z\to-1+ib\\ z\in G_2}}\arg\left(z^2+2z+2\right)=\pi.$$

Если $c_1=c_2+1$, то показатель у экспоненты непрерывен в точках $-1+ib$, $b>1$, и f тоже непрерывна. Если $b<-1$, то

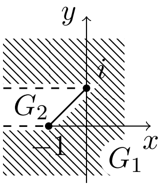
$$\lim_{-1+ib}f|_{G_1}=\sqrt{|1-b^2|}\,e^{i\frac{\pi}{2}+i\pi(c_2+1)},$$

$$\lim_{-1+ib}f|_{G_2}=\sqrt{|1-b^2|}\,e^{-\frac{i\pi}{2}+i\pi\cdot c_2}=$$

$$=\sqrt{|1-b^2|}\,e^{i\pi\left(c_2+\frac{3}{2}\right)-2\pi i},\ e^{-2\pi i}=1,$$

пределы совпадают и задают непрерывную функцию f в этих точках.

5. Если под знаком Ln стоит рациональная функция $R(z)$, то от решения неравенства $R(z) < 0$ можно уклониться, разложив числитель и знаменатель функции R на линейные множители $z-a$, а $\operatorname{Ln} R$ в алгебраическую сумму $\operatorname{Ln}(z-a)$. Постройте непрерывную ветвь $f(z) \in \operatorname{Ln}\frac{z-i}{z+1}$ в $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[i, -1]$ такую, что $f(0) = \frac{3\pi i}{2}$, используя формулу



$$f(z) = \ln|z-i| + i\arg(z-i) - \ln|z+1| - $$
$$-i\arg(z+1) + 2\pi i k(z).$$

Ответ: $k(z) = \begin{cases} 1, & z \in G_1, \\ 2, & z \in G_2. \end{cases}$

6. Ряд Тейлора. В вещественном анализе при $x \in (0,\, 2)$

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}.$$

Используя теорему единственности для аналитических функций, получим ветвь $\operatorname{Ln} z$ в круге $\{z : |z-1| < 1\}$:

$$l_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-1)^k}{k}.$$

Тогда для функции $f(z) \in \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}\frac{z}{a} + \operatorname{Ln} a$, непрерывной в круге $\{z : |z-a| < |a|\}$, верно равенство $f(z) = f(a) + l_0\left(\frac{z}{a}\right)$ (справа ветвь $\operatorname{Ln} z$, которая совпадает с f в точке a). Получим разложение $f(z) = f(a) + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(z-a)^k}{ka^k}$. Для $p \in \mathbb{R}$

$$x^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k!}(x-1)^k$$

при $x \in (0,\,2)$. Снова по теореме единственности функция

$$s_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)(z-1)^k}{k!}$$

является аналитической в единичном круге ветвью отображения z^p с нормировкой $s_p(1) = 1$. Для непрерывной $f(z) \in z^p = \exp(p \operatorname{Ln} a) \cdot \exp\left(p \operatorname{Ln} \frac{z}{a}\right)$, заданной в круге $\{z : |z-a| < |a|\}$, верно равенство

$$f(z) = f(a) s_p\left(\frac{z}{a}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f(a) \frac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{k! a^k}(z-a)^k.$$

Для $p \notin \mathbb{R}$ такие же формулы коэффициентов ряда Тейлора можно получить с помощью дифференцирования. Локально функцию $f(z) \in z^p$ можно задать с помощью ветви $h(z) \in \operatorname{Ln} z$: $f(z) = \exp\bigl(ph(z)\bigr)$.

$$h'_z = \frac{1}{z},\ f'(z) = f(z) \cdot p\,\frac{1}{z} = p \exp\bigl((p-1)h(z)\bigr),$$
$$\exp\, h(z) = z,\ \exp\bigl(-h(z)\bigr) = z^{-1}$$

и можно дифференцировать дальше:

$$f''(z) = p(p-1) \exp\bigl((p-2)h(z)\bigr),\ \dots,$$

$$f^{(k)}(z) = p(p-1)\dots(p-k+1)\exp\bigl(ph(z)\bigr)\frac{1}{z^k},$$
$$f^{(k)}(a) = f(a)\frac{1}{a^k}p(p-1)\dots(p-k+1).$$

Рассмотрим примеры.

1. В кольце $\{z : |z| > 2\}$ разложим в ряд Лорана непрерывную ветвь $f_0(z) \in \operatorname{Ln}\frac{z-1}{z+2}$, заданую условием $f_0(-3) > 0$. Построим f_0 с помощью l_0:

$$\operatorname{Ln}\frac{z-1}{z+2} = \operatorname{Ln}\left(1-\frac{1}{z}\right) - \operatorname{Ln}\left(1+\frac{2}{z}\right) \ni l_0\left(1-\frac{1}{z}\right) - l_0\left(1+\frac{2}{z}\right),$$

$f_0(z) = l_0\left(1-\frac{1}{z}\right) - l_0\left(1+\frac{2}{z}\right)$ удовлетворяет условию $f_0(-3) > 0$.

$$f_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-1}{kz^k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}2^k}{kz^k} = \sum_{m\le -1}\left(1+\frac{(-1)^{m-1}}{2^m}\right)\frac{z^m}{m}.$$

2. Чтобы получить ряд Лорана для $h_0(z) = \exp\bigl(pf_0(z)\bigr)$ придется перемножать степенные ряды:

$$h_0(z) = c\,s_p\left(1-\frac{1}{z}\right)\cdot s_{-p}\left(1+\frac{2}{z}\right),$$

где $c = \lim\limits_{z\to\infty} h_0(z) = 1$:

$$h_0(z) = \sum_{q\le 0} z^q \sum_{q\le m\le 0}\left[\frac{(-1)^{-m}p(p-1)\dots(p+m+1)}{(-m)!}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{(-p)(-p-1)\dots(-p+(q-m)+1)}{(m-q)!}\cdot 2^{m-q}\right].$$