Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математического анализа

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к проведению практических занятий

по математическому анализу

Часть 3

Задача на локальный экстремум
функции нескольких переменных

М. Г. Голузина, Т. П. Дубова, А. Г. Савельева

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

2016

Р е ц е н з е н т ы:

д.ф.-м.н., профессор *Ю. Н. Бибиков,* СПбГУ

к.ф.-м.н., профессор *В. Л. Файншмидт,* БГТУ “Военмех” им. Д. Ф. Устинова

Авторы выражают благодарность А. Н. Подкорытову
за советы и ценные замечания.

Методические указания к проведению практических занятий по математическому анализу. Часть 3. Задача на локальный экстремум функции нескольких переменных / М. Г. Голузина, Т. П. Дубова, А. Г. Савельева — СПб., 2016. — 10 с.

Пособие предназначено как дополнительное для преподавателей, ведущих практические занятия по математическому анализу для студентов, обучающихся по направлению “Прикладная математика и информатика”.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$. Точка $a \in X$ называется точкой локального экстремума функции f, если существует окрестность точки a в которой разность $f(x) - f(a)$ сохраняет знак ($x \neq a$). Есла она положительна, то a — точка строгого локального минимума, если отрицательна — строгого локального максимума. Если разность не бывает положительной, но бывет нулевой, то максимум нестрогий. Аналогично определяются точки нестрогого локального минимума.

Необходимое условие экстремума

Если дифференцируемая в точке a функция f имеет во внутренней точке a локальный экстремум, то $\operatorname{grad} f(a) = 0$.

Достаточное условие экстремума

Пусть a — внутренняя точка множества X, f имеет вторые частные производные в точке a и $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Второй дифференциал

$$d_a^2 f(h) = \sum_{j,\,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) h_j h_k$$

является квадратичной формой от переменных $h_1, \ldots, h_n$.

1) Если квадратичная форма положительно определенная, то a — точка локального минимума.

2) Если квадратичная форма отрицательного определенная, то a — точка локального максимума.

3) Если форма знакопеременная, то локального экстремума в точке a нет.

Для форм, не являющихся знакоопределенными или знакопеременными, возможны разные варианты.

В точке $(0,\,0)$ функция $f_k(x,\,y) = x^2 + ky^4$ имеет $d^2_{(0,\,0)}f_k(h) = 2h_1^2$. При $k \geq 0$ f_k имеет в точке $(0,\,0)$ минимум, при $k < 0$ в этой точке функция f_k не имеет локального экстремума.

Иногда решать задачу помогает

Теорема Вейштрасса. Функция f, непрерывная на компакте X, достигает наибольшего и наименьшего значений: существуют такие две точки a и b в множестве X, что при $x \in X$ $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Примеры

1. $f(x,\,y) = x\left(x^2 + y^2 - 1\right)$.

Найдем точки с нулевыми производными:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 1 = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy = 0,$$

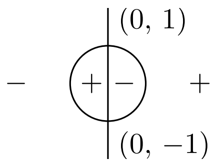
a) $x = 0$ и $y \in \{1,\,-1\}$

b) $y = 0$ и $x \in \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Только в точках $(0,\,1)$, $(0,\,-1)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)$ функция f может иметь локальный экстремум.

Функция f нечетна по x и четна по y, поэтому подробно изучать придется только точки $(0,\,1)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)$.

Рассмотрим первую точку: $f(0,\,1)=0$. Если найдется окрестность, в которой f сохраняет знак, то $(0,\,1)$ — точка локального экстремума. Нарисуем на $X=\mathbb{R}^2$ знаки значений $f(x,\,y)$.



В любой окрестности точки $(0,\,1)$ есть точки с положительными значениями и точки с отрицательными значениями. Поэтому $(0,\,1)$ не является точкой локального экстремума для f. По четности относительно переменной y точка $(0,\,-1)$ также не будет точкой локального экстремума.

В точке $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)$ сосчитаем d^2f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x,\;\;\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x,\;\;\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=2y.$$

$d^2_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)}f(h)=2\sqrt{3}h_1^2+\frac{2}{\sqrt{3}}h_2^2$ — положительно определенная квадратичная форма. Поэтому $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)$ — точка локального минимум. По нечетности $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)$ — точка локального максимума.

2. $f(x,\,y)=x^2\left|x^2+y^2-1\right|$.

Функция f не дифференцируема на окружности $x^2+y^2=1$, кроме точек $(0,\,1)$ и $(0,\,-1)$, так как функция $\tilde{f}(x,\,y)=x^2\left(x^2+y^2-1\right)$ имеет в этих точках 0 первого порядка:

$$a^2+b^2=1,\;\;(a,\,b)\notin\left\{(0,\,1),\,(0,\,-1)\right\},$$

$$\tilde{f}(a,\,b) = 0,\ \operatorname{grad}\tilde{f}(a,\,b) \neq 0.$$

Эти точки придется изучать, используя определение. Функция неотрицательна всюду и поэтому все точки окружности $x^2+y^2 = 1$ (в которых она обращается в нуль) — это точки её минимума (нестрогого).

Для поиска других точек экстремума используем частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(4x^3 + 2xy^2 - 2x\right)\operatorname{sign}\left(x^2+y^2-1\right) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\operatorname{sign}\left(x^2+y^2-1\right) = 0.$$

Получаем точки $(0,\,b)$, где $b \neq \pm 1$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)$. Функция f четна по каждой из переменных x и y. Поэтому изучать подробно надо $b \in (-\infty,\,-1) \cup (-1,\,0]$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)$.

Первый случай: $f(0,\,b) = 0$, $f(x,\,y) \geq 0$. Поэтому в $(0,\,b)$ нестрогий минимум при всех возможных b.

Второй случай: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)$. Сосчитаем $d^2_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)}f(h)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\left(12x^2+2y^2-2\right) = -4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x^2 = -1,\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = -4xy = 0;$$

$$d^2_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)}f(h) = -4h_1^2 - h_2^2.$$

Следовательно, в этой точке второй дифференциал — отрицательно определенная квадратичная форма. Поэтому $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)$ точка локального максимума и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)$ тоже.

Ответ: две точки локального максимума $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\,0\right)$, а также бесконечно много точек локального минимума, образующих прямую $x=0$ и окружность $x^2+y^2=1$.

3. $f(x,\,y) = x\left(x^2+y^3-1\right)$.

Решим систему

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^3+y^3-1=0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 = 0. \end{cases}$$

Получим точки $(0,\,1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right)$. Найдем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} 3y^2.$$

$d^2_{(0,\,1)}f(h) = 6h_1h_2$ — знакопеременная квадратичная форма. В точке $(0,\,1)$ локального экстремума нет.

$d^2_{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},0\right)}f(h) = 2\sqrt{3}h_1^2$ — вырожденный случай.

Рассмотрим $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,y\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y^3-\frac{2}{3}\right)$ — возрастающая функция от y

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,y\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right) \text{ при } y<0 \text{ и}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,0\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\,y\right) \text{ при } y>0.$$

Нет экстремума. Функция f нечетна по x, поэтому в точке

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\, 0\right)$ тоже нет экстремума.

4. На прямоугольнике $[-2,\, 2] \times [0,\, 1] = X$ задана функция $f(x,\, y) = x(x + 2y)$. X — компакт и существование максимума и минимума гарантирует теорема Вейрштрасса. Сначала поищем экстремумы во внутренних точках прямоугольника: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + + 2y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x = 0$. Решение системы $(0,\, 0)$ не лежит внутри X. Точки локального экстремума могут быть только на границе X. При уменьшении множества задания функции точки, которые были экстремумами для f, будут экстремумами для сужения, если они попали в уменьшенное множество.

Рассмотрим сужение f на отрезок $\left\{(x,\, 0)\middle|x \in [-2,\, 2]\right\}$ (нижняя сторона прямоугольника X) $f(x,\, 0) = x^2$. Эта функция имеет точку локального минимума $(0,\, 0)$ и две точки локального максимума $(-2,\, 0)$ и $(2,\, 0)$. Три кандидата на локальный экстремум начальной функции.

Рассмотрим сужение f на отрезок $\left\{(x,\, 1)\middle|x \in [-2,\, 2]\right\}$ (верхняя сторона прямоугольника): $f(x,\, 1) = x(x+2)$. Оно имеет точку локального минимума $(-1,\, 1)$ и две точки локального максимума на концах $(-2,\, 1)$ м $(2,\, 1)$ — еще три кандидата на точки локального экстремума.

Сужение f на левую сторону прямоугольника $f(-2,\, y) = = -2(-2 + 2y) = 4 - 2y$ имеет при $y \in [0,\, 1]$ максимум в точке $(-2,\, 0)$ и минимум в точке $(-2,\, 1)$. В точке $(-2,\, 0)$ максимум уже был на нижней стороне. В точке $(-2,\, 1)$ на верхней стороне был максимум, то есть эта точка не будет точкой экстремума для f на X.

Сужение на правую сторону $f(2, y) = 2(2+2y) = 4+4y$. Максимум в точке $(2, 1)$ и минимум в точке $(2, 0)$. В $(2, 0)$ функция f имела локальный максимум при сужении на нижнюю сторону, значит $(2, 0)$ точкой локального экстремума f на X не будет.

Остались для проверки $(0, 0)$ и $(-1, 1)$ — кандидаты на точку локального минимума и $(-2, 0)$ и $(2, 1)$ — кандидаты на точку локального максимума.

Сосчитаем значения:

$$f(0, 0) = 0,\ f(-1, 1) = -1,\ f(-2, 0) = 4,\ f(2, 1) = 8.$$

Очевидно, $\max_X f = 8$, поэтому точка $(2, 1)$ — точка максимума; $\min_X f = -1$, поэтому точка $(-1, 1)$ — точка минимума f.

Разберемся с точками $(0, 0)$ и $(-2, 0)$.

$f(0, 0) = 0$, $f(x, y) = x(x + 2y)$. Если $-2y < x < 0$, то $f(x, y) < 0$, то есть в любой окрестности есть отрицательные значения f, если $x, y > 0$, то f положительная (более наглядно факт смены знака функцией $f(x, y)$ демонстрирует расстановка знаков произведения $x(x+2y)$ около начала координат). Поэтому точка $(0, 0)$ не экстремальная для f.

Точка $(-2, 0)$ кандидат на точку локального максимума $\frac{\partial f}{\partial y}(-2, 0) = -4$. Из непрерывности $\frac{\partial f}{\partial y}$ следует, что $\frac{\partial f}{\partial y} < -1$ в некоторой окрестности V точки $(-2, 0)$. Можно считать, что V — круг, $V \cap X$ — четверть круга. Для $x \in V$ $f(x,y) - f(-2,0) =$

$= x^2 - 4 + 2xy$. Так как $x^2 - 4 \leqslant 0$ и $2xy \leqslant 0$ в точках множества X близких к точке $(-2,\, 0)$, то там $f(x, y) \leqslant f(-2, 0)$, так что в ней у функции f локальный максимум.

Ответ: $(-1,\, 1)$ точка минимума, $(-2,\, 0)$ и $(2,\, 1)$ точки локального максимума (строгого).

Задачи для читателя

Найдите точки локального экстремума следующих функций:

1. $f(x,\, y) = y(y - x\ln x)$.
2. $f(x,\, y) = x\left(\sqrt{x} + y^2 - 1\right)$.
3. $f(x,\, y) = x(x + y)e^{x-y}$ на $X = [0,\, 1] \times [-2,\, 2]$.

Ответы

1. $\left(\frac{1}{e},\, -\frac{1}{2e}\right)$ — точка локального минимума.
2. В точке $(0,\, b)$ при $|b| > 1$ у функции f нестрогий локальный минимум, при $|b| < 1$ — нестрогий локальный максимум. В точке $\left(\frac{4}{9},\, 0\right)$ у функции f локальный минимум.
3. В точке $(1,\, -2)$ у функции минимум, в точке $(1,\, 0)$ — максимум, в точках $(0,\, b)$ при $-2 \leqslant b < 0$ — нестрогий локальный максимум, при $0 < b \leqslant 2$ — нестрогий локальный минимум.