М.Г. Голузина

Замена переменных в дифференциальных уравнениях
(в чётком изложении)

Нам нужны два экземпляра пространства $\mathbb{R}^n$. Они будут отличаться названиями координат: $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$ и $\mathbb{R}^2_{(u,v)}$, $\mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ и $\mathbb{R}^3_{(u,v,w)}$.

График функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}_y$ — $\Gamma_f = \{(x,y) \mid x \in [a,b],\ y = f(x)\}$.

Пусть в открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ задано дифференцируемое и обратимое отображение $T : D \to \mathbb{R}^2_{(u,v)}$. Предположим, что $\Gamma_f \subset G$ и образ $T(\Gamma_f)$ является графиком функции $g : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}_v$. Запишем эту информацию с помощью равенства связи между f и g: точка x переходит в точку графика $\bigl(x, f(x)\bigr)$. Отображение T с координатными функциями T_1 и T_2 переводит точку $\bigl(x, f(x)\bigr)$ в точку $\bigl(T_1(x,f(x)), T_2(x,f(x))\bigr) \in \Gamma_g$, т. е.

$$T_2\bigl(x, f(x)\bigr) = g\bigl(T_1\bigl(x, f(x)\bigr)\bigr) \quad \bigl(v = g(u)\bigr).$$

Слева и справа стоят одинаковые функции. В дальнейшем это подробное описание будет сокращено до

$$\bigl(x, f(x)\bigr) \xrightarrow{T} \bigl(T_1\bigl(x, f(x)\bigr), T_2\bigl(x, f(x)\bigr)\bigr)$$

и равенства связи между f и g:

$$T_2\bigl(x, f(x)\bigr) = g\bigl(T_1\bigl(x, f(x)\bigr)\bigr).$$

Задача. Если f — решение дифференциального уравнения

$$\Phi\bigl(x, f(x), \dots, f^{(n)}(x)\bigr) = 0,$$

найдите соответствующее дифференциальное уравнение для функции g.

Если использовать ту же идею для обратного отображения $Q = T^{-1}$, получим:

$$\bigl(u, g(u)\bigr) \xrightarrow{Q} \bigl(Q_1\bigl(u, g(u)\bigr), Q_2\bigl(u, g(u)\bigr)\bigr) \in \Gamma_f$$

и

$$Q_2\bigl(u, g(u)\bigr) = f\bigl(Q_1\bigl(u, g(u)\bigr)\bigr).$$

При $Q_2(u,v) = v$ получим равенство $g(u) = f\bigl(Q_1\bigl(u, g(u)\bigr)\bigr)$. В этом случае говорят о замене переменной в дифференциальном уравнении.

Равенства связи можно дифференцировать. При этом получаются линейные относительно $f'(x)$ и $f'\bigl(Q_1\bigl(u, g(u)\bigr)\bigr)$ равенства, т. е. f' выражается через f, g и g'.

В дальнейших вычислениях будет использовано сокращение: функции f, g и их производные будут писаться без аргументов. При этом имеется в виду тот аргумент, который стоит в равенствах связи. Об этом надо помнить при дифференцировании:

$$\frac{df}{du} = \frac{d}{du}\, f\bigl(Q_1\bigl(u, g(u)\bigr)\bigr) = f' \cdot \frac{d}{du}\bigl(Q_1\bigl(u, g(u)\bigr)\bigr).$$

Продемонстрируем этот подход на задачах из задачника Б.П. Демидовича "Сборник задач и упражнений по математическому анализу".

№ 3440. "Преобразовать уравнение $(1+x^2)^2 y'' = y$, если $x = \operatorname{tg} t$, $y = \frac{u}{\cos t}$, где $u = u(t)$."

В наших обозначениях: уравнение $(1+x^2)^2 f''(x) = f(x)$. Отображение, осуществляющее изменения:

$$Q(t,u) = \Big(\operatorname{tg} t, \frac{u}{\cos t}\Big).$$

Уравнение графика $u = g(t)$

$$\big(t, g(t)\big) \xrightarrow{Q} \Big(\operatorname{tg} t, \frac{g(t)}{\cos t}\Big) \in \Gamma_f.$$

Равенство связи между f и g:

$$\frac{g(t)}{\cos t} = f\big(\operatorname{tg} t\big). \qquad (*)$$

Дифференцируем $(*)$ по t и используем сокращение:

$$\frac{g'\cos t + g\sin t}{\cos^2 t} = f' \cdot \frac{1}{\cos^2 t} \quad \text{или} \quad f' = g'\cos t + g\sin t.$$

Дифференцируем это равенство по t:

$$f'' \cdot \frac{1}{\cos^2 t} = g'' \cdot \cos t - g' \cdot \sin t + g' \cdot \sin t + g \cdot \cos t$$

или

$$f'' = (g'' + g)\,\cos^3 t.$$

Вставляем в начальное уравнение:

$$\Big(\frac{1}{\cos^2 t}\Big)^2 \big(g''(t) + g(t)\big)\cos^3 t = f\big(\operatorname{tg}(t)\big) = \frac{g(t)}{\cos t} \quad \text{или} \quad g''(t) = 0.$$

Ответ для Демидовича: $u'' = 0$.

№ 3455. "В системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + kx(x^2+y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2+y^2) \end{cases}$$

перейти к полярным координатам".

$$\begin{cases} \frac{df}{dt}(t) = kf(t)\big(f^2(t) + h^2(t)\big) + h(t) \\ \frac{dh}{dt}(t) = kh(t)\big(f^2(t) + h^2(t)\big) - f(t) \end{cases}.$$

Отображение $t \to \big(f(t), h(t)\big)$, заданное на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}_t$, принимает значения в $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$. Его график лежит в $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^2_{(x,y)}$. Полярная замена в $\mathbb{R}^2_{(x,y)}$

порождает отображение $Q(u,r,v) = (u, r\cos v, r\sin v)$. g и q — новые функции, заданные на открытом подмножестве в $\mathbb{R}_u$: $r = g(u)$ и $v = q(u)$. Получаем

$$\big(u, g(u), q(u)\big) \xrightarrow{Q} \big(u, g(u)\cos q(u), g(u)\sin q(u)\big) \in \Gamma_{(f,h)}.$$

Два числовых равенства связи новых и старых функций:

$$\begin{cases} g(u)\cos q(u) = f(u) \\ g(u)\sin q(u) = h(u) \end{cases}. \tag{$*$}$$

Дифференцируем по u:

$$\begin{cases} g'\cdot\cos q - g\cdot\sin q\cdot q' = f' \\ g'\cdot\sin q + g\cos q\cdot q' = h' \end{cases}.$$

Вставляем в начальную систему:

$$\begin{cases} g'\cos q - g\sin q\cdot q' = k\,g\cos q\cdot g^2 + g\sin q \\ g'\sin q + g\cos q\cdot q' = k\,g\sin q\cdot g^2 - g\cos q \end{cases}.$$

Умножаем первое уравнение на $\cos q$, второе уравнение на $\sin q$ и складываем:

$$g'(u) = kg^3(u).$$

Умножаем первое на $\sin q$, второе на $\cos q$ и вычитаем:

$$-gq' = g \quad \text{или} \quad q'(u) = -1.$$

Ответ для задачника: $r'(u) = kr^3(u)$, $v'(u) = -1$ при замене $x = r\cos v$, $y = r\sin v$.

№ 3479. "Преобразовать выражение: $\frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}$, полагая $u = xe^z$, $v = ye^z$, $w = ze^z$, где $w = w(x,y)$".

В наших обозначениях: преобразовать дробь $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ при отображении $T(x,y,z) = \big(xe^z, ye^z, ze^z\big) \in \mathbb{R}^3_{(u,v,w)}$.

Новая функция $g(u,v)$.

$$\big(x, y, f(x,y)\big) \xrightarrow{T} \big(xe^{f(x,y)}, ye^{f(x,y)}, f(x,y)e^{f(x,y)}\big) \in \Gamma_g.$$

$$f(x,y)e^{f(x,y)} = g\big(xe^{f(x,y)}, ye^{f(x,y)}\big). \tag{$*$}$$

Дифференцируем по x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}e^f + f\,e^f\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\Big(e^f + xe^f\frac{\partial f}{\partial x}\Big) + \frac{\partial g}{\partial v}\Big(ye^f\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\Big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big(1 + f - x\frac{\partial g}{\partial u} - y\frac{\partial g}{\partial v}\Big) = \frac{\partial g}{\partial u}.$$

Дифференцируем $(*)$ по y:

$$\frac{\partial f}{\partial y}e^f + f\,e^f\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\cdot x\cdot e^f\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\Big(e^f + ye^f\frac{\partial f}{\partial y}\Big)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\Big(1 + f - x\frac{\partial g}{\partial u} - y\frac{\partial g}{\partial v}\Big) = \frac{\partial g}{\partial v}$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) : \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}\Big(xe^{f(x,y)}, ye^{f(x,y)}\Big) : \frac{\partial g}{\partial v}\Big(xe^{f(x,y)}, ye^{f(x,y)}\Big) = \frac{\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)}{\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)}.$$

Читателю предлагается потренироваться на задачах из задачника Демидовича. Желаю успеха.