

**ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ**  
(1-й семестр, 2024/25 г.)

А. А. Лодкин

1. ! Инъективность, сюръективность, биективность отображения. Обратное отображение, композиция отображений.
2. !!! Аксиома полноты.  $\sup$  и  $\inf$ . Свойства.
3. ! Определение множества  $\mathbb{N}$ . Его неограниченность. Принцип Архимеда.
4. Плотность  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$ .
5. ! Теорема о вложенных отрезках.
6. ! Эквивалентные множества. Конечные, счётные и несчётные множества. Примеры.
7. Счётность  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  и  $\mathbb{Q}$ .
8. Несчётность множества  $\mathbb{R}$ .
9. !!! Окрестности. Точки сгущения. Различные определения предела.
10. Расширенная числовая прямая. Пределы в  $\overline{\mathbb{R}}$ .
11. !! Предел последовательности.
12. Свойства предела (единственность, ограниченность, локальность).
13. Свойства предела (предельный переход в неравенстве, стабилизация знака, принцип двух полицейских).
14. ! Бесконечно малые и их свойства. Бесконечно большие. Арифметические операции над пределами.
15. ! Предел монотонной функции и последовательности.
16. ! Число  $e$ .
17. Определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей).
18. ! Принцип выбора Больцано – Вейерштрасса.
19. ! Сходимость в себе, принцип сходимости Больцано – Коши.
20. !!! Непрерывность функции, виды разрывов.
21. ! Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях. Примеры.
22. Разрывы монотонной функции.
23. ! Теоремы о монотонной функции на промежутке.
24. Определение и свойства функции «корень».
25. Показательная функция (экспонента).
26. Логарифмическая и степенная функции.
27. ! Символы  $O$ ,  $o$ ,  $\sim$ . Различные формы записи замечательных пределов.
28. ! Теорема Вейерштрасса.
29. ! Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

30. Задачи, приводящие к понятию производной.
31. ! Дифференцируемость функции, связь с наличием производной и непрерывностью. Дифференциал. Примеры.
32. Свойства дифференцируемых функций. Дифференцируемость суммы, произведения, частного.
33. ! Дифференцируемость суперпозиции и обратной функции.
34. ! Таблица производных.
35. ! Теоремы Ферма и Ролля.
36. ! Теоремы Коши и Лагранжа.
37. ! Производные и монотонность.
38. Признак строгой монотонности.
39. Доказательство неравенств.
40. ! Правила Лопиталя.
41. ! Многочлен Тейлора. Формула Тейлора для многочлена.
42. !!! Асимптотическая формула Тейлора.
43. ! Разложение по Тейлору элементарных функций.
44. ! Условия экстремума (с применением производных первого порядка).
45. Условия экстремума (с применением производных высшего порядка).
46. ! Теорема об остатке в форме Лагранжа.
47. Выпуклость функции (геометрические факты и характеристика в терминах неравенств).
48. Неравенство Енсена.
49. ! Дифференциальные условия выпуклости.
50. ! Неравенство Гёльдера.

**Примечание.** Кроме того, необходимо разбираться в следующих вопросах, не вошедших в билеты:

Операции с высказываниями, множества и операции над ними, образ и прообраз, понятие вещественного, натурального и рационального числа, индукция, неполнота  $\mathbb{Q}$ , представимость вещественных чисел бесконечными дробями по основанию  $p$ .

Знание формулировок в вопросах, помеченных восклицательным знаком, необходимо (но не достаточно) для получения положительной оценки.

Интернет-адрес этой программы: <http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/pm/2024-26/pm1-24.pdf>