

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ
(1-й семестр, 2020/21 г.)

А. А. Лодкин

1. ! Инъективность, сюръективность, биективность отображения. Обратное отображение, композиция отображений.
2. !!! Аксиома полноты. Supremum и infimum. Свойства.
3. ! Определение множества \mathbb{N} . Его неограниченность. Принцип Архимеда.
4. Плотность \mathbb{Q} в \mathbb{R} .
5. ! Теорема о вложенных отрезках.
6. ! Эквивалентные множества. Конечные, счётные и несчетные множества. Примеры.
7. Счетность $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и \mathbb{Q} .
8. Несчётность множества \mathbb{R} .
9. !!! Окрестности. Точки сгущения. Различные определения предела.
10. Свойства предела (единственность, ограниченность, локальность).
11. Свойства предела (предельный переход в неравенстве, стабилизация знака, принцип двух полицейских).
12. ! Бесконечно малые и их свойства. Арифметические операции над пределами.
13. Расширенная числовая прямая. Пределы в $\overline{\mathbb{R}}$.
14. !! Предел последовательности.
15. Бесконечно большие. Неопределенности.
16. ! Предел монотонной функции и последовательности.
17. Приближенное вычисление \sqrt{A} .
18. ! Число e .
19. Определение предела функции по Гейне (на языке последовательностей).
20. ! Принцип выбора Больцано – Вейерштрасса.
21. ! Сходимость в себе, принцип сходимости Больцано – Коши.
22. !!! Непрерывность функции, виды разрывов.
23. ! Теорема Больцано – Коши о промежуточных значениях. Примеры.
24. Разрывы монотонной функции.
25. ! Теоремы о монотонной функции на промежутке.
26. Определение и свойства функции «корень».
27. Показательная функция (экспонента).
28. Логарифмическая и степенная функции.
29. ! Символы O , o , \sim . Различные формы записи замечательных пределов.
30. ! Теорема Вейерштрасса.
31. ! Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.

32. Задачи, приводящие к понятию производной.
33. ! Дифференцируемость функции, связь с наличием производной и непрерывностью. Дифференциал. Примеры.
34. Свойства дифференцируемых функций. Дифференцируемость суммы, произведения, частного.
35. ! Дифференцируемость суперпозиции и обратной функции.
36. ! Таблица производных.
37. ! Теоремы Ферма и Ролля.
38. ! Теоремы Коши и Лагранжа.
39. ! Производные и монотонность.
40. Признак строгой монотонности.
41. Доказательство неравенств.
42. ! Правила Лопиталя.
43. ! Многочлен Тейлора. Формула Тейлора для многочлена.
44. !!! Асимптотическая формула Тейлора.
45. ! Разложение по Тейлору элементарных функций.
46. ! Условия экстремума (с применением производных первого порядка).
47. Условия экстремума (с применением производных высшего порядка).
48. ! Теорема об остатке в форме Лагранжа.
49. Выпуклость функции (геометрические факты и характеристика в терминах неравенств).
50. Неравенство Енсена.
51. ! Дифференциальные условия выпуклости.
52. ! Неравенство Гёльдера.

53. ! Первообразная и ее простейшие свойства. Неопределенный интеграл.
54. Замена переменной и интегрирование по частям. Примеры.
55. Таблица неопределенных интегралов.
56. «Берущиеся» и «неберущиеся» интегралы.

Примечание. Кроме того, необходимо разбираться в следующих вопросах, не вошедших в билеты:

Операции с высказываниями, множества и операции над ними, образ и прообраз, понятие вещественного, натурального и рационального числа, индукция, неполнота \mathbb{Q} , представимость вещественных чисел бесконечными дробями по основанию p .

Знание формулировок в вопросах, помеченных восклицательным знаком, необходимо (но не достаточно) для получения положительной оценки.

Интернет-адрес этой программы: <http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/astro/ast1-21.pdf>

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ
(астрономия, 2-й семестр, 2021/22 уч. г.)

А. А. Лодкин

1. ! Определенный интеграл Ньютона – Лейбница и его свойства. Теорема Барроу.
2. Среднее значение функции. Теорема о среднем.
3. Интеграл как предел интегральных сумм Римана. Некоторые формулы приближенного вычисления интеграла.
4. Интегральная форма остаточного члена формулы Тейлора.
5. Интегральные неравенства.
6. Формула Валлиса.
7. ! Аддитивная функция промежутка и её плотность. Примеры аддитивных функций.
8. Тесты на плотность.
9. ! Площадь криволинейного сектора.
10. ! Объём тела вращения.
11. Приложения интеграла к задачам механики и физики.
12. Длина пути и кривой. Обсуждение и определение.
13. ! Гладкий путь и вычисление его длины.
14. Геометрический смысл функций arccos и arsh .
15. ! Несобственный интеграл для промежутков различных типов, его общие свойства.
16. Признак Больцано – Коши сходимости интеграла.
17. ! Интегралы $\int_{\rightarrow 0}^1 \frac{dx}{x^p}$ и $\int_1^{\rightarrow \infty} \frac{dx}{x^p}$. Свойства несобственного интеграла от положительных функций. Признаки сравнения.
18. Абсолютная и условная сходимость интеграла.
19. ! Признаки Дирихле и Абеля сходимости несобственного интеграла.
20. ! Числовой ряд, его сумма, сходимость, остаток. Примеры.
21. Общие свойства числовых рядов.
22. ! Положительные ряды и их свойства. Признаки сравнения.
23. Признак Даламбера.
24. ! Признак Коши.
25. ! Интегральный признак сходимости ряда. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.
26. ! Критерий Больцано – Коши. Абсолютная и условная сходимость.
27. Признак Лейбница.
28. ! Преобразование Абеля, признаки Дирихле и Абеля сходимости рядов.
29. Группировка слагаемых. Перестановки положительных рядов.
30. Перестановки абсолютно и условно сходящихся рядов.
31. Понятие о двойных и повторных рядах.
32. Произведение рядов. Пример (экспонента).
33. Асимптотика частичных сумм гармонического ряда. Постоянная Эйлера.
34. Формула Стирлинга (без вычисления константы).

35. Вычисление константы в формуле Стирлинга.
36. Основные структуры в \mathbb{R}^n (скалярное произведение, норма, метрика, топология). Покоординатный характер сходимости.
37. Открытые и замкнутые множества.
38. Компактные множества в \mathbb{R}^n , критерий компактности.
39. ! Понятие полного метрического пространства. Полнота \mathbb{R}^n .
40. Непрерывность отображения и его координатных функций. Соотношение между непрерывностью по каждому аргументу и непрерывностью по совокупности переменных.
41. Теоремы о непрерывных отображениях.
42. Линейное отображение и его норма. Свойства нормы.
43. Теорема об оценке нормы линейного отображения.
44. ! Дифференцируемость отображения и её связь с непрерывностью. Покоординатный характер дифференцируемости.
45. ! Дифференциал. Существование частных производных. Матрица Якоби. Единственность линейной части приращения.
46. Достаточное условие дифференцируемости.
47. Свойства дифференцируемых функций и отображений.
48. Дифференцируемость суперпозиции. Правило цепочки.
49. Признак постоянства функции в области.
50. Производная по вектору, градиент, связь между ними.
51. Оценка приращения дифференцируемого отображения.
52. Теорема о касательных к кривым, лежащим на поверхности $z = f(x, y)$.
53. ! Производные высших порядков. Классы C^p . Равенство смешанных производных.
54. Обобщение биномиальных коэффициентов и формулы бинома.
55. Дифференциал p -го порядка. Различные формы его записи.
56. ! Многомерная формула Тейлора.
57. ! Понятие экстремума. Необходимое условие. Пример.
58. ! Теорема о достаточном условии наличия (отсутствия) экстремума.
59. Применение критерия Сильвестра для исследования второго дифференциала. Пример решения задачи на экстремум.

Адрес этой программы в интернете:
<http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/astro/>

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ
(астрономы, 3-й семестр, 2022/23 уч. г.)

А. А. Лодкин

1. Теорема Банаха о сжимающих отображениях.
2. Метод последовательных приближений Ньютона.
3. Формулировка теоремы об обратимости гладкого отображения (с мотивировкой ответа).
4. * Доказательство теоремы об обратимости.
5. * Теорема о дифференцируемости обратного отображения.
6. * Теорема о гладкости обратного отображения.
7. * Теорема о неявной функции.
8. * Теорема о неявном отображении.
9. * Функциональная зависимость функций.
10. Геометрический смысл ранга матрицы Якоби.
11. Три способа локального задания поверхности.
12. Условные экстремумы. Определение и геометрическая мотивировка ответа.
13. * Теорема об условном экстремуме. Множители Лагранжа.
14. Вывод распределения Гиббса (*по пособию с сайта*).
15. Гладкая зависимость корней многочлена от коэффициентов.

16. Равномерная сходимость последовательности функций. Примеры.
17. Теорема о непрерывности предельной функции.
18. Полнота пространства $C[a, b]$.
19. Предельный переход под знаком производной и интеграла.
20. Равномерная сходимость функциональных рядов. Признак Вейерштрасса. Формулировка признаков равномерной сходимости Абеля и Дирихле.
21. Непрерывность суммы ряда, почленное интегрирование и дифференцирование функциональных рядов.
22. Пределы и ряды в комплексной области.
23. Верхний и нижний пределы последовательности. Теорема о трех пределах.
24. Теорема о множестве частичных пределов.
25. Обобщенный признак Коши.
26. Степенные ряды. Теорема об области сходимости.
27. Равномерная сходимость степенного ряда.
28. Непрерывность и дифференцируемость суммы степенного ряда.
29. Почленное интегрирование степенных рядов.
30. Ряды Тейлора. Две леммы. Разложение функций \exp, \sin, \cos .
31. Разложение логарифмической и степенной функций.
32. Экспонента и тригонометрические функции на комплексной плоскости.
33. Логарифм комплексного аргумента и его главное значение.
34. Понятие непрерывной ветви логарифма и корня.
35. Применения степенных рядов.

36. Интеграл от дифференциальной формы по пути и его свойства.
37. Точные формы и интегралы от них.
38. Замкнутые формы. Дифференциальное условие замкнутости.
39. Первообразная вдоль пути.

40. Неизменность интеграла от замкнутой формы при деформации пути.
41. Интеграл от комплексной формы как предел римановых сумм. Оценка интеграла.
42. Голоморфные функции. Условия Коши – Римана. Свойства, примеры.
43. Расширенная комплексная плоскость и дробно-линейная функция.
44. Теорема Коши для голоморфной функции.
45. Варианты теоремы Коши для ориентированной границы компакта и для почти голоморфной функции.
46. Интегральная формула Коши.
47. Разложение голоморфной функции в ряд Тейлора в круге.
48. Неравенство Коши. Целые функции. Теоремы Лиувилля и Даламбера.
49. Понятие аналитической функции. Теорема Мореры. Свойства функции, эквивалентные голоморфности.
50. Теорема о среднем.
51. Гармонические функции. Восстановление голоморфной функции по ее вещественной/мнимой части.
52. Теорема об исчезновении аналитической функции.
53. Изолированность нулей аналитической функции и продолжение тождеств. Понятие аналитического продолжения.
54. Ряды Лорана: их область сходимости и свойства суммы.
55. Разложение голоморфной функции в ряд Лорана в кольце.
56. Классификация изолированных особых точек.
57. Формулировка Теоремы Пикара. Теорема Сохоцкого.
58. Вычеты. Две теоремы.
 1. На экзамене студенту предлагаются три вопроса: задача и, в случае ее решения, два вопроса по теории. Студенты, отчитавшиеся по контрольным и домашним заданиям, от первого вопроса освобождаются.
 2. Знак * означает, что сдавшие коллоквиум могут сообщить лишь формулировки, относящиеся к соответствующему вопросу, опуская доказательства.

Интернет-адрес этой программы: <http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/students/astro/>

ВОПРОСЫ ПО АНАЛИЗУ
(астрономы, 4-й семестр, 2022/23 уч. г.)

А. А. Лодкин

1. Вычисление интегралов I и II типа по промежутку с помощью вычетов.
2. Лемма Жордана. Вычисление интегралов III типа по промежутку с помощью вычетов.
3. Мероморфные функции. Теорема о функции, мероморфной в $\bar{\mathbb{C}}$.
4. Алгебры и σ -алгебры множеств.
5. Борелевская σ -алгебра.
6. Мера на алгебре. Примеры мер.
7. Свойства меры.
8. Объём в \mathbb{R}^n . Мера Лебега и её свойства.
9. Мера Лебега – Стильеса.
10. Поведение меры Лебега при сдвиге и линейном преобразовании.
11. Измеримость функции относительно σ -алгебры. Свойства измеримых функций.
12. Определение интеграла по мере. Свойства интеграла от неотрицательных функций.
13. Теорема Беппо Лёви.
14. Свойства интеграла от суммируемых функций.
15. Счетная аддитивность интеграла.
16. Абсолютная непрерывность интеграла.
17. Вычисление интеграла от непрерывной функции по мере Лебега.
18. Сравнение подходов Римана и Лебега.
19. Сравнение интеграла по мере с несобственным интегралом.
20. Интеграл по дискретной мере и по мере, задаваемой плотностью.
21. Интеграл по мере Лебега – Стильеса. Интеграл по распределению.
22. Интеграл Эйлера-Пуассона (есть текст на сайте).
23. Вероятностный смысл меры и интеграла.
24. Принцип Кавальери. Геометрический смысл интеграла по мере Лебега (мера подграфика).
25. Сведение кратного интеграла к повторному (теоремы Тонелли и Фубини).
26. Мера образа измеримого множества при гладком отображении.
27. Гладкая замена переменной в интеграле. Пример (полярные и сферические координаты).
28. Теорема Фату.
29. Теорема Лебега об ограниченной сходимости.
30. Равномерная сходимость интеграла, зависящего от параметра. Формулировка признаков Больцано – Коши, Дирихле и Абеля.
31. Формулировки основных теорем о несобственном интеграле с параметром.
32. Вычисление интеграла Дирихле $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.
33. Свёртка суммируемых функций.
34. Γ -функция Эйлера. Её свойства.
35. V -функция, её сведение к Γ -функции.
36. Объём n -мерного шара.
37. Объём k -мерного параллелепипеда. Мера на гладкой поверхности и интеграл по ней.

38. Ориентация кривой, поверхности и пространства.
39. Интеграл второго рода на кривой, на поверхности и в \mathbb{R}^3 как интеграл от векторного поля и как интеграл от дифференциальной формы.
40. Дифференцирование векторных полей (ротатор, дивергенция). Правила дифференцирования и таблица производных (по пособию).
41. Формула Грина.
42. Классическая формула Стокса.
43. Формула Гаусса – Остроградского.
44. Физический смысл дивергенции и ротора.
45. Потенциальное, безвихревое, соленоидальное, несжимаемое (бездивергентное) векторные поля. Характеристика полей в терминах интегралов.
46. Примеры полей с различными свойствами. Центральное несжимаемое поле (по пособию).
47. Гильбертово пространство. Пространство \mathcal{L}_2 .
48. Ортогональные ряды в гильбертовом пространстве. Теорема Пифагора. Ряд Фурье в гильбертовом пространстве.
49. Классические ряды Фурье по тригонометрической и экспоненциальной системам.
50. Ядро Дирихле. Лемма Римана – Лебега.
51. Теорема Дини о поточечной сходимости.
52. Свойства коэффициентов Фурье.
53. Решение уравнения колебания струны.
54. Изопериметрическая задача.
55. Формулировки результатов о сходимости рядов Фурье (включая теорему Фейера о сходимости по Чезаро).
56. Преобразование Фурье и его свойства. Формула восстановления (без доказательства).
57. Решение уравнения теплопроводности.

Примечание.

На экзамене студенту предлагаются три вопроса: задача и два вопроса по теории.

1. Студенты, отчитавшиеся по контрольным и домашним заданиям, от первого вопроса **освобождаются**.
2. Студенты, имеющие небольшую задолженность по контрольным и домашним заданиям, **решают задачу на экзамене**.
3. Студенты, имеющие большую задолженность по контрольным и домашним заданиям, **автоматически получают двойку за экзамен**.

Адрес этой программы в интернете:

<http://analysis.spbu.ru/members/lodkin/students.html>