"Fedina Doska" @ Chair of Math. Analysis, SPb. State University

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА И ДОПОЛНЯЕМОСТЬ

Продолжение (3)

Решение, приводимое ниже, использует результат задачи II.1. Так как каждое сепарабельное банахово пространство изометрично некоторому подпространству в $C[0,1]$, то нам достаточно рассмотреть только базисные последовательности в этом одном фиксированном пространстве $C[0,1]$. Конечно же, $C[0,1]$ есть несчетное множество, и в нем находится несчетное число базисных последовательностей; однако, мы можем ограничиться рассмотрением базисных подпоследовательностей лишь одной фиксированной последовательности, плотной в $C[0,1]$, в силу следующей теоремы о возмущениях базисов.

Задача II.2.1. *Пусть (x_n) — базисная последовательность в некотором банаховом пространстве X. Существует такая последовательность (ε_n) положительных чисел, что если $y_n \in X$ и $\|x_n - y_n\| < \varepsilon_n$ для каждого $n = 1, 2, \ldots,$ то (y_n) есть базисная последовательность, эквивалентная последовательности (x_n).*

Предположим теперь, что (z_n) — некоторая фиксированная последовательность ненулевых векторов пространства $C[0,1]$, плотная в $C[0,1]$. Из задач II.1 и II.2.1 вытекает, что всякая базисная последовательность эквивалентна базисной подпоследовательности последовательности (z_n) (однако, сама последовательность (z_n), конечно же, не является базисом). Предположим, однако, что у нас имеется некоторая другая последовательность $(\widetilde{z}_i)$, которая является линейно независимой, в некотором линейном пространстве (например, $\widetilde{z}_i$ может быть i-м ортом в пространстве всех скалярно значных последовательностей), и определим норму $|||\cdot|||$ на линейной оболочке $\operatorname{span}(\widetilde{z}_i)$ следующим образом:

$$\Big|\Big|\Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{z}_i \Big|\Big|\Big| = \sup_{1\leqslant m\leqslant n} \Big\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i z_i \Big\|.$$

Пусть $(Z, |||\cdot|||)$ обозначает пополнение этой линейной оболочки по норме $|||\cdot|||$. В этом случае, нетрудно проверить, что $(\widetilde{z}_i)$ образует базис в Z с базисной постоянной, равной единице. Предположим теперь, что имеется некоторая базисная подпоследовательность (z_{n_k}) последовательности $(z_n) \subset C[0,1]$ и пусть λ будет базисной постоянной для (z_{n_k}). Тогда для любого конечного набора $(\alpha_i)_{i=1}^{n}$ скаляров

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_{n_i} \Big\| \leqslant \Big|\Big|\Big| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \widetilde{z}_{n_i} \Big|\Big|\Big| \leqslant \lambda \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_{n_i} \Big\|,$$

так что $(\widetilde{z}_{n_i})$ эквивалентна (z_{n_i}). Таким образом, $(\widetilde{z}_n)$ представляет собой "универсальную базисную последовательность". Однако, нет никакой причины утверждать, что замкнутая линейная оболочка $\overline{\text{span}}(\widetilde{z}_{n_i})$ дополняема в Z, поэтому пространство Z не решает задачи II.2.

Конструкция Шехтмана дополняемо универсального пространства U использует модифицированную версию пространства Z.

Пусть C — семейство всех строго возрастающих конечных последовательностей натуральных чисел. Для $c = (i_1 < i_2 < \cdots < i_k) \in C$ положим $l(c) = i_k$ (последний элемент c). Нам будет удобнее потом упорядочить искомый универсальный базис в U при помощи счетного множества C вместо использования натуральных чисел $\mathbb{N}$ (но, естественно, позже мы должны будем ввести секвенциальный порядок в построенном "базисе", чтобы превратить его в настоящую базисную последовательность[1])

Итак, пусть $(e(c))_{c\in C}$ есть линейно независимая система в некотором линейном пространстве. Мы сейчас построим норму $|\cdot|$ на $\text{span}\,(e(c))_{c\in C}$ и определим пространство U как пополнение этого пространства. Пространство U будет обладать тем свойством, что если $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ — какая–либо последовательность натуральных чисел, то $e(n_1), e(n_1, n_2), e(n_1, n_2, n_3), \ldots$ — базисная последовательность в U, эквивалентная последовательности (z_{n_i}) в Z, и естественный линейный проектор из U на $\overline{\text{span}}(e(n_1), e(n_1, n_2), e(n_1, n_2, n_3), \ldots)$ непрерывен. Пусть D обозначает семейство всех конечных наборов $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ из C таких, что c_i — начальный кусок c_{i+1} и длина c_i равна i $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Типичный элемент D имеет вид $\{(i_1), (i_1, i_2), \ldots, (i_1, i_2, \ldots, i_k)\}$, где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ — конечный набор натуральных чисел. Теперь определим норму $|\cdot|$ на $\text{span}\,(e(c))_{c\in C}$, полагая

$$\left|\sum \alpha_c e(c)\right| = \sup\left\{\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{k} \alpha_{c_i} \widetilde{z}_{l(c_i)}\right|\right|\right| :\ (c_1, c_2, \ldots, c_k) \in D\right\}.$$

Из построения ясно, что если $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots$ и $c_j = (i_1, i_2, \ldots, i_j)\}$ для $1 \leqslant j < \infty$, то $|||\sum \alpha_j \widetilde{z}_{i_j}||| = |\sum \alpha_j e(c_j)|$ и, следовательно, в пополнении U нормированного пространства $(\text{span}\,(e(c)), |\cdot|)$ последовательность $(e(c_j))$ есть базисная последовательность, эквивалентная $(\widetilde{z}_{i_j})$. Далее, легко также увидеть из определения $|\cdot|$, что для каждого конечного подмножества $L \subset C$ такого, что $L \cap (c_j) = \emptyset$,

$$\left|\sum \alpha_j e(c_j)\right| \leqslant \left|\sum \alpha_j e(c_j) + \sum_{c\in L} \alpha_c e(c).\right|$$

Это означает, что существует проектор единичной нормы из U на $\overline{\text{span}}(e(c_j))$ с ядром $\overline{\text{span}}\{e(c) :\ c \in C, c \notin (c_j)_{j=1}^{\infty}\}$.

Как отмечалось выше, нам необходимо упорядочить множество $(e(c))_{c\in C}$, превратив его в последовательность так, чтобы получился базис. Это довольно просто: надо лишь взять любое взаимно однозначное отображение φ из C на $\mathbb{N}$, для

[1]Базисы банаховых пространств, которые не завися от порядка его членов, т.е. которые остаются базисами при любом порядке их элементов, называются *безусловными базисами;* такие базисы существуют в каждом из пространств $L_p[0,1]$ при $1 < p < \infty$. С другой стороны, в пространствах $C[0,1]$ и $L_1[0,1]$ много базисов, но нет ни одного безусловного. Некторые подробности можно найти в монорграфии [KaCa].

которого $\varphi(c_1) < \varphi(c_2)$, если c_1 — начальный сегмент c_2, и рассмотреть $(e(c))$ как $e(\varphi^{-1}(1)), e(\varphi^{-1}(2)), e(\varphi^{-1}(3)), \ldots$. Нетрудно проверить, что для всех скаляров (α_i) и всех натуральных $n < m$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e(\varphi^{-1}(i))\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e(\varphi^{-1}(i))\right|. \quad \blacksquare$$

* * *

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[Бурб] Бурбаки Н., *Общая топология: Основные структуры*, Наука, Москва, 1968. 272 с.

[Курт] Куратовский К., *Топология*, том 2, Мир, Москва, 1969. 624 с.

[LiTs] J.Lindenstrauss and L.Tzafriri, *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. **9** (1971), 263–269, *MR*43#2474.

[ЛюС] Люстерник Л.А., Соболев В.И., *Краткий курс функционального анализа*, Высш. Школа, Москва, 1982. 271 с.

[Pel1] A.Pełczyński, *Projectons in certain Banach spaces*, Studia Math. **19** (1960), 209–228.

[Pel2] A.Pełczyński, *Universal bases*, Studia Math. (1969), no. 32, 247–268.

[Sch] G.Schechtman, *On Pełczyński's paper "Universal bases"*, Israel J. Math. **22** (1975), 181–194.

[Rose] H.P.Rosenthal, *On factors of* $C[0,1]$ *with non-separable dual*, Israel J. Math. **13** (1972), 361–378.

[LeSt] D.R.Lewis, C.Stegall, *Banach spaces whose duals are isomorphic to* $l_1(\Gamma)$, J. Functional Analysis **12** (1973), 177–187, *MR*49#7731.

[KaCa] Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды*, Наука, Москва, 1984. 496 с.

Санкт–Петербургский государственный университет, математико–механический факультет

E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru (для вопросов)