УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БАНАХА И ДОПОЛНЯЕМОСТЬ

Продолжение (2)

Другой путь завершить решение задачи II.1 — использование некоторых замечательных свойств канторова множества $\mathcal{C}$. Мы рассматриваем канторово множество как компакт, получаемый из отрезка $[0,1]$ при помощи стандартной процедуры "выбрасывание внутренней (открытой) трети отрезков", однако стоит напомнить, что канторово множество гомеоморфно счетному произведению двуточий, например, пространству $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \beta^{\mathbb{N}})$, где топология $\beta^{\mathbb{N}}$ представляет собой произведение дискретных топологий β на каждом экземпляре $\{0,1\}$.

Используя представление канторова множества как подмножества в $[0,1]$, можно показать, что

Задача II.1.6. *$C(\mathcal{C})$ изометрично подпространству пространства $C[0,1]$.*

Конечно, $\mathcal{C}$ не является непрерывным образом интервала $[0,1]$, поскольку $[0,1]$ есть связное пространство, а канторово множество — нет. Так что задача II.1.6 не решается простым применением утверждения из задачи II.1.5.

Теперь, если мы считаем, что решены все предыдущие подзадачи, завершение всех наших проблем, связанных с задачей II.1, дает

Задача II.1.7. *Каждый метрический компакт есть непрерывный образ канторова множества $\mathcal{C}$.*

Один из возможных подходов к решению этой задачи (да и ее решение) можно найти в [ЛюС], с. 172. Другой подход состоит в реализации рассматриваемого метрического компакта K как пространства нулей и единиц, т.е. как подмножества в $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, следующим способом. Компакт K имеет счетную базу, скажем $\{G_n\}$, открытых множеств, как и всякое сепарабельное метрическое пространство. Сопоставим каждой точке k из K точку $g_k \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, полагая $g_k(n) = 1$, если $k \in G_n$, и $g_k(n) = 0$ в противном случае. Пусть $G = \{g_k : k \in K\}$. Отображение $k \mapsto g_k$, естественно, не является гомеоморфизмом из K на G, если рассматривать G как топологическое подпространство канторова множества. Однако, если обозначить через τ топологию (не хаусдорфову!) $\{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ на двуточии $\{0,1\}$, то соответствие $k \mapsto g_k$ уже будет гомеоморфизмом из K на $(G, \tau^{\mathbb{N}}) \subset (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \tau^{\mathbb{N}})$.

Ясно, что тождественное отображение $i : (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \beta^{\mathbb{N}}) \to (\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \tau^{\mathbb{N}})$ непрерывно; следовательно. таково и его сужение $i : (G, \beta^{\mathbb{N}}) \to (G, \tau^{\mathbb{N}})$. Таким образом у нас есть непрерывное отображение из подмножества $(G, \beta^{\mathbb{N}})$ канторова множества на пространство $(G, \tau^{\mathbb{N}})$, которое, в свою очередь, гомеоморфно нашему компакту K. К сожалению, G, вообще говоря, не замкнуто в канторовом пространстве

$(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \beta^{\mathbb{N}})$, так что нам необходимо продолжить $i : (G, \beta^{\mathbb{N}}) \to (G, \tau^{\mathbb{N}})$ до непрерывного отображения $i : (\overline{G}, \beta^{\mathbb{N}}) \to (G, \tau^{\mathbb{N}})$, где черта над G обозначает замыкание G в топологии $\beta^{\mathbb{N}}$, т.е. в пространстве $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \beta^{\mathbb{N}})$. Можно показать, что если L_1 и L_2 — непересекающиеся $\tau^{\mathbb{N}}$-замкнутые подмножества в G, то их $\beta^{\mathbb{N}}$-замыкания $\overline{L}_1$ и $\overline{L}_2$ также не пересекаются. Используя последний факт, мы продолжаем i следующим образом. Для $g \in \overline{G}$ пусть $\{U_n\}$ — последовательность $\beta^{\mathbb{N}}$-открытых окрестностей точки g, стягивающаяся к g. Пересечение $\bigcap_n \overline{i(U_n \cap G)}^{\tau^{\mathbb{N}}}$ состоит в точности из одной точки, которую мы обозначим через $i(g)$. Полученное отображение $g \mapsto i(g)$ представляет собой непрерывное отображение из $(\overline{G}, \beta^{\mathbb{N}})$ на $(G, \tau^{\mathbb{N}})$.

Наконец, завершить доказательство существования непрерывного отображения из $\mathcal{C}$ на K можно, показав, что каждое замкнутое подмножество в $\mathcal{C}$ есть ретракт канторова множества $\mathcal{C}$, т.е. что для каждого замкнутого $F \subset \mathcal{C}$ существует непрерывное отображение из $\mathcal{C}$ на F, тождественное на F (проще всего это проверить, рассматривая $\mathcal{C}$ как подмножество отрезка $[0,1]$).

* * *

Перед тем, как перейти к обсуждению проблем вокруг "базисно–универсальных" пространств (и к построению одного из них[1]), нам необходимо вспомнить (или привести) некоторые понятия и факты, связанные с теорией базисов в банаховых пространствах. Стандартная терминология в этой теории такова.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов банахова пространства X называется *базисной,* если для каждого элемента $x \in \overline{\mathrm{span}}(x_n)$ (замыкание линейной оболочки семейства $\{x_n\}$) существует *единственное* его представление в виде сходящегося ряда $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$; т.е. существует единственная числовая последовательность $\{\alpha_n\}$, для которой $\|x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n\| \to 0$ при $N \to \infty$. В случае, когда $\overline{\mathrm{span}}(x_n) = X$, базисную последовательность $\{x_n\}$ называют *базисом* (Шаудера) этого пространства[2]. Ясно, что всякое банахово пространство, имеющее базис, сепарабельно.

Пусть $\{x_n\}$ — базисная последовательность в X. В этом случае на подпространстве $\overline{\mathrm{span}}(x_n)$ можно определить функционалы x_n', полагая $\langle x_n', x\rangle = \alpha_n$, если

[1]На самом деле такое пространство U единственно в том смысле, что если V — какое–либо другое сепарабельное банахово пространство с тем свойством, что всякое пространство с базисом изоморфно и дополняемо вкладывается в V, то пространства U и V изоморфны между собой.

[2]Это понятие в своей полной общности впервые было введено М.Шаудером в его работе *Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktinalräumen,* Math. Zeitschr. 26 (1927), p. 47–65. В этой же работе М.Шаудер построил свой знаменитый базис в пространстве $C[0,1]$, состоящий из "проинтегрированной системы Хаара". Годом позже он же показал, что сама система Хаара образует базис в каждом из пространств $L^p[0,1]$ при $1 \leqslant p < +\infty$: *Eine Eigenschaft des Haarschen Orthogonalsystems,* Math. Zeitschr. 28 (1928), p. 317–320. А.Хаар ввел свою систему в докторской диссертации 1909 года, где установил, что эта ортогональная система образует "почти базис" в $C[0,1]$: всякая непрерывная на $[0,1]$ функция разлагается по элементам системы Хаара в равномерно сходящийся ряд (функции Хаара разрывны, — поэтому система не образует настоящего базиса). Базисы в других классических пространствах (например, в пространствах аналитических функций) были построены намного позднее. См. монографию [KaCa], в которой содержится и много других любопытных фактов. Отметим, что не каждое сепарабельное банахово пространство имеет хотя бы один базис, о чем подробнее будет сказано в своем месте.

$x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. Единственность представления элемента x в указанном виде гарантирует корректность этого определения и то, что эти функционалы линейны, а также выполнение следующего условия *биортогональности:*

$$\langle x'_n, x_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Мы будем называть функционалы x'_n биортогональными функционалами (для $\{x_n\}$). Совсем не очевиден тот факт (установленный С.Банахом[3]), что эти линейные функционалы непрерывны (достаточно посмотреть на рассуждения из [ЛюС] на с. 127–131, где, в частности, устанавливается и непрерывность "координатных" функционалов для данного базиса). Мы не станем здесь входить в детали доказательства непрерывности x'_n, а просто включим ее в определение: итак, для нас базисная последовательность — это последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X, для которой существует последовательность функционалов $\{x'_n\} \subset (\overline{\operatorname{span}}(x_n))^*$, биортогональная с $\{x_n\}$, причем для любого $x \in \overline{\operatorname{span}}(x_n)$ выполняется соотношение $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x'_n, x \rangle x_n$; если $\overline{\operatorname{span}}(x_n) = X$, то мы говорим, что $\{x_n\}$ — базис для X.

Если имеется базис $\{x_n\} \subset X$ с биортогональной системой $\{x'_n\}$, то вполне корректно определены так называемые операторы частичных сумм $S_n : X \to X$, $n = 1, 2, \cdots$:

$$S_n x = \sum_{i=1}^{n} \langle x'_i, x \rangle \, x_i.$$

Эти конечномерные операторы, в силу сказанного выше, линейны и непрерывны (поскольку таковы все x'_n) на X, причем, как нетрудно видеть, последовательность $\{S_n\}$ поточечно в X сходится к тождественному оператору, т.е. $S_n x \to x$ для каждого x из X.

Отметим некоторые простейшие (но важнейшие) свойства операторов частичных сумм:

$$\text{(II.1)} \qquad S_n x \to x \quad \text{для всех} \ \ x \in X;$$

$$\text{(II.2)} \qquad S_n S_m = S_{\min(n,m)} \quad \text{для всех} \ \ n, m = 1, 2, \ldots;$$

$$\text{(II.3)} \qquad \dim S_n X = n;$$

$$\text{(II.4)} \qquad \sup \|S_n\| = \lambda < \infty.$$

Соотношение (II.1) есть непосредственное следствие определения базиса; соотношение (II.2) вытекает из самого определения операторов частичных сумм; (II.3) очевидно (ясно, что всякий базис представляет собой линейно независимую систему). Наконец, (II.4) следует из (II.1) (принцип равномерной ограниченности!). Число λ из (II.4) принято называть *базисной постоянной* базиса $\{x_n\}$.[4]

[3]S.Banach, *Théorie des opérations linèaires,* Monografje matematyczne, Warsaw, 1932.

[4]Это понятие имеет смысл и в случае конечномерных пространств X, которые всегда имеют базис. Для каждого алгебраического базиса в конечномерном пространстве базисная постоянная этого базиса дает количественную его характеристику и показывает, насколько с этой точки зрения хорош или плох базис. Но это — тема отдельного очень интересного разговора.

Пусть теперь дана некоторая последовательность операторов на X, удовлетворяющая соотношениям (II.1)–(II.3) (и, следовательно, условию (II.4) с некоторой константой $\lambda \geqslant 1$). Выбирая по точке x_n из каждой разности $(S_n - S_{n-1})X$ (где $S_0 = 0$), мы получаем базис $\{x_n\}$ пространства X, для которого операторами частичных сумм являются операторы S_n. Как нетрудно видеть, базисная постоянная получаемого таким образом базиса есть наименьшая постоянная для которой неравенство

$$\text{(II.4a)} \qquad \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Big\| \leqslant \lambda \Big\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i \Big\|$$

выполняется для всех конечных числовых наборов $\{\alpha_n\}$ и всех натуральных $n \leqslant m$. Действительно, наименьшая постоянная λ в (II.4a) — это просто супремум по n норм сужений операторов S_n, на линейную оболочку $\operatorname{span}(x_n)$, а норма $\|S_n\|_X$ равна норме сужения этого оператора на любое плотное линейное подмногообразие пространства X.[5]

Теперь "на повестке дня" — обсуждение некоторых вопросов, связанных с понятием эквивалентности базисов в различных банаховых пространствах (мы приближаемся к формулировке теоремы А.Пелчинского о существовании универсального "базисно–дополняемого" пространства, а точнее, о существовании "универсального базиса" для базисов в сепарабельных банаховых пространствах, и потому нам не избежать подобного обсуждения). Базисы $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ двух банаховых пространств X и Y называются *эквивалентными,* если естественное отображение "базис в базис": $x_n \mapsto y_n$ продолжается до линейного изоморфизма пространства X на пространство Y (конечно же, если такое продолжение существует, то оно единственно). Если указанные два базиса эквивалентны, то (по теореме о замкнутом графике, либо по теореме об открытом отображении) необходимо найдутся положительные постоянные a и b, для которых при всех конечных наборах скаляров $\{\alpha_i\}$ справедливы соотношения

$$\text{(II.5)} \qquad a \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \Big\| \leqslant b \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Big\|.$$

Обратно, если условие (II.5) выполняется для всех $\{\alpha_i\}$, то естественным образом определяется (линейный) изоморфизм $S : \operatorname{span}(x_n) \to \operatorname{span}(y_n)$:

$$S\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i.$$

Этот оператор допускает непрерывное продолжение до изоморфизма пространств $X = \overline{\operatorname{span}}(x_n)$ и $Y = \overline{\operatorname{span}}(y_n)$, причем для любого элемента $x \in X$ значение оператора S на нем допускает разложение в сходящийся в пространстве Y ряд $Sx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x'_n, x \rangle y_n$, где $\{x'_n\}$ — последовательность биортогональных с семейством $\{x_n\}$ функционалов из X^*.

[5]Задача для читателя: любая последовательность $\{x_n\}$ ненулевых векторов пространства X, удовлетворяющая соотношению (II.4a), является базисом этого пространства.

Теперь, после всех этих предварительных рассуждений, мы готовы сформулировать теорему о существовании универсального базиса среди всех базисов Шаудера в (сепарабельных) банаховых пространствах. Формулировка утверждения, которое мы приводим ниже, принадлежит Г.Шехтману [Sch] и представляет собой небольшую модификацию (и некоторое усиление) оригинальной теоремы А.Пелчинского [Pel2].

Задача II.2. *Существует пространство U, "дополняемо–универсальное" в классе всех банаховых пространств с базисами. Более точно, существует базис $\{e_n\}$ в некотором пространстве U, который "дополняемо–универсален" в классе всех базисов в следующем смысле. Каково бы ни было банахово пространство X с базисом $\{x_n\}$, существует подпоследовательность $\{e_{n_i}\}$ последовательности $\{e_n\}$, которая эквивалентна базису $\{x_i\}$. Более того, существует проектор P из U на $\overline{\operatorname{span}}(e_{n_i})$. Если $\{e'_n\} \subset U^*$ — биортогональная с $\{e_n\}$ последовательность, то проектор P определяется соотношением*

$$Pu = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e'_{n_i}, u \rangle e_{n_i},$$

т.е. P есть проектор на $\overline{\operatorname{span}}(e_{n_i})$ с ядром $\overline{\operatorname{span}}\{e_j : j \notin \{n_i\}\}$.

Прежде чем пройтись по дороге, ведущей к решению задачи (II.2), сделаем пару важных замечаний.

Во–первых, всякая подпоследовательность базисной последовательности сама является базисной (соответствующее условие единственности для этой подпоследовательности вытекает из непрерывности биортогональных функционалов). Во–вторых, *не верно,* что если $\{x_n\}$ — базис для X и $\{x_{n_i}\}$ — некоторая его подпоследовательность, то подпространство $\overline{\operatorname{span}}(x_{n_i})$ обязательно дополняемо в X. К примеру, в пространстве $C[0,1]$ имеются базисы, для которых некоторые их "подбазисы" (т.е. их подпоследовательности) порождают рефлексивные подпространства, а, как мы, надо надеяться, помним, бесконечномерные рефлексивные подпространства пространства $C[0,1]$ не могут быть в нем дополняемы.

Теперь мы готовы приступить к обсуждению одного из возможных вариантов решения нашей задачи.

.... 2 To be cntd 3 ....

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[Бурб] Бурбаки Н., *Общая топология: Основные структуры*, Наука, Москва, 1968. 272 с.

[Курт] Куратовский К., *Топология*, том 2, Мир, Москва, 1969. 624 с.

[LiTs] J.Lindenstrauss and L.Tzafriri, *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. **9** (1971), 263–269, *MR*43#2474.

[ЛюС] Люстерник Л.А., Соболев В.И., *Краткий курс функционального анализа*, Высш. Школа, Москва, 1982. 271 с.

[Pel1] A.Pełczyński, *Projectons in certain Banach spaces*, Studia Math. **19** (1960), 209–228.

[Pel2] A.Pełczyński, *Universal bases*, Studia Math. (1969), no. 32, 247–268.

[Sch] G.Schechtman, *On Pełczyński's paper "Universal bases"*, Israel J. Math. **22** (1975), 181–194.

[Rose] H.P.Rosenthal, *On factors of $C[0,1]$ with non-separable dual*, Israel J. Math. **13** (1972), 361–378.

[LeSt] D.R.Lewis, C.Stegall, *Banach spaces whose duals are isomorphic to* $l_1(\Gamma)$, J. Functional Analysis **12** (1973), 177–187, *MR*49#7731.

[KaCa] Кашин Б.С., Саакян А.А., *Ортогональные ряды*, Наука, Москва, 1984. 496 с.

Санкт–Петербургский государственный университет,
математико–механический факультет
E-mail address: orein@orein.usr.pu.ru (для вопросов)