ПРИМЕР СВОБОДНОЙ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ $SO(3, \mathbb{R})$.

Б.М.Макаров

Наше цель — привести пример свободной подгруппы с двумя образующими группы вращений пространства $\mathbb{R}^3$. Одно из возможных доказательств существования такой подгруппы (довольно сложное) содержится в книге [1] (стр. 18-21). Наличие свободных подгрупп с двумя образующими доказывает неаменабельность группы вращений трехмерного пространства и, в частности, позволяет установить отсутствие на сфере S^2 ненулевого конечного объёма, определенного на всех подмножествах и инвариантного относительно вращений. Более эффектным образом последний результат может быть получен с помощью знаменитого примера Хаусдорфа (см., например, [2]), однако, мы не будем рассматривать эту тему подробно.

Вращения мы будем отождествлять с их матрицами (в каноническом базисе).

Будем исходить из двух вращений. Первое вращение — поворот по часовой стрелке на угол φ вокруг оси Oz. Это вращение обозначим буквой U. Его матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Второе вращение — назовем его V — это поворот (также по часовой стрелке, если смотреть из полупространства $y > 0$) на угол φ вокруг оси Oy. Матрица этого вращения такова:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что угол φ выбран таким образом, что выполняется условие

$$\cos\varphi \quad \text{— } \textit{трансцендентное число} \tag{1}$$

(можно, например, взять $\varphi = 1$, однако, мы ни в какой мере не будем использовать этот факт). Мы докажем, что при выполнении условия (1) вращения U и V порождают свободную подгруппу. Таким образом, при выполнении условия (1) вращения на угол φ вокруг любых двух взаимно перпендикулярных осей порождают свободную группу.

Введем еще одно, вспомогательное, вращение — поворот на 180 градусов вокруг биссектрисы координатного угла yOz. Это вращение обозначим буквой ω. Под действием ω оси Oy и Oz меняются местами, а ось Ox переходит в себя, меняя ориентацию. Матрица ω имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\omega^2 = I$, где I — тождественное отображение. Важно заметить, что $V = \omega U \omega$.

Положим $W_n = \omega\, U^n$. Как легко подсчитать, матрица W_n имеет вид

$$W_n = \begin{pmatrix} -\cos n\varphi & -\sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Решающее значение для нас имеет следующая лемма.

ЛЕММА. *Произведение $A \equiv W_{n_1} W_{n_2} \cdots W_{n_k}$, где $k \in \mathbb{N}$ и все n_j отличны от нуля ($n_j \in \mathbb{Z}$), не совпадает при выполнении условия (1) ни с I, ни с ω.*

Считая, что лемма доказана, покажем, что вращения U и V являются образующими свободной группы.

Отсутствие определяющих соотношений означает, что слова 4-х видов

$$\begin{aligned} &U^{n_1} V^{m_2} U^{n_2} \cdots V^{m_k} U^{n_k}, \qquad &&U^{n_1} V^{m_2} U^{n_2} \cdots V^{m_k}, \\ &V^{m_1} U^{n_1} V^{m_2} U^{n_2} \cdots V^{m_k} U^{n_k}, &&V^{m_1} U^{n_1} V^{m_2} U^{n_2} \cdots V^{m_k} \end{aligned}$$

не совпадают с единицей группы при условии, что $m_j \neq 0,\ n_j \neq 0$ при любом j ($j = 1, 2, \ldots, k;\ k \in \mathbb{N}$). В нашем случае это равносильно тому, что преобразования

$$\begin{aligned} &U^{n_1} \omega U^{m_2} \omega U^{n_2} \cdots \omega U^{m_k} \omega U^{n_k}, \qquad &&U^{n_1} \omega U^{m_2} \omega U^{n_2} \cdots \omega U^{m_k} \omega, \\ &\omega U^{m_1} \omega U^{n_1} \omega U^{m_2} \omega U^{n_2} \cdots \omega U^{m_k} \omega U^{n_k}, &&\omega U^{m_1} \omega U^{n_1} \omega U^{m_2} \omega U^{n_2} \cdots \omega U^{m_k} \omega \end{aligned}$$

не совпадают с I. Как легко увидеть, домножая в случае необходимости эти преобразования слева или справа на ω, последний факт немедленно следует из леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Учитывая вид матриц I и ω, нам достаточно убедиться, что при выполнении условий леммы элемент a_{11} матрицы A не равен ± 1. Для оператора W_n при $n \neq 0$ это утверждение очевидно ввиду (1).

Отметим, что при $k = 0, 1, \ldots$

$$\begin{array}{c} \text{функции} \ \ \cos(k\varphi) \ \ \text{и} \ \ (\sin(k+1)\varphi)/\sin\varphi \ \ \text{суть полиномы} \\ \text{от} \ \cos\varphi \ \ \text{степени} \ \ k \ \ \text{с рациональными коэффициентами} \end{array} \tag{2}$$

(как известно, это полиномы Чебышева первого и второго рода).

С помощью индукции разберемся более детально в строении матрицы оператора $W_{n_1} W_{n_2} \cdots W_{n_k}$. Предположим, что при $k \geqslant 2$ она имеет вид

$$\begin{pmatrix} P_k^{11}(t) & sP_k^{12}(t) & sP_k^{13}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

где $t = \cos\varphi,\ s = \sin\varphi$, а P_k^{1j} — полиномы*) с рациональными коэффициентами, степени которых удовлетворяют условиям:

$$\deg(P_k^{11}) = N \equiv |n_1| + \cdots + |n_k|, \quad \deg(P_k^{12}) \leqslant N - 1, \quad \deg(P_k^{13}) \leqslant N - 2.$$

*) Отметим, что мы пользуемся неполными обозначениями P_k^{1j}, которые не отражают зависимости этих полиномов от величин $n_1, \ldots, n_k$.

При $k = 2$ эти свойства проверяются прямыми вычислениями с помощью замечания (2). Проведем индукционный переход (для упрощения обозначений мы пишем не n_{k+1}, а n). Матрица, соответствующая произведению $W_{n_1}W_{n_2}\cdots W_{n_k}W_n$, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} P_k^{11}(t) & sP_k^{12}(t) & sP_k^{13}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos n\varphi & -\sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin n\varphi & \cos n\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому

$$P_{k+1}^{11}(t) = -\cos n\varphi P_k^{11}(t) + \frac{\cos(n+1)\varphi - \cos(n-1)\varphi}{2} P_k^{13}(t).$$

Ввиду ограничения на степень P_k^{13} мы видим, что $\deg(P_{k+1}^{11}) = \deg(P_k^{11}) + |n|$. Очевидно также, что коэффициенты полинома P_{k+1}^{11} рациональны.

Аналогично,

$$\begin{aligned} (\sin\varphi)P_{k+1}^{12}(t) &= -\sin(n\varphi)P_k^{11}(t) + \cos(n\varphi)\,\sin\varphi\, P_k^{13}(t), \\ P_{k+1}^{13}(t) &= P_k^{12}(t), \end{aligned}$$

откуда видно, что коэффициенты полиномов P_{k+1}^{12} и P_{k+1}^{13} рациональны, а степени удовлетворяют требуемым ограничениям. Тем самым индукционный переход завершен. Итак, $a_{11} = P_k^{11}(t)$, причем $\deg(P_k^{11}) > 0$.

Так как полином P_k^{11} имеет ненулевую степень и рациональные коэффициенты, то ни одно из равенств

$$P_k^{11}(t) = 1, \qquad P_k^{11}(t) = -1.$$

невозможно, поскольку число $t = \cos\varphi$ трансцендентно. Следовательно, $|a_{11}| = |P_k^{11}(t)| \neq 1$.

Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Ф.Гринлиф. Инвариантные средние на топологических группах. "Мир", М., 1973.

2. И.П.Натансон. Теория функций вещественной переменной. Издание 3-е. "Лань", СПб., 1999.