“Fedina Doska” @ Chair of Mathematical Analysis, St. Petersburg State University

Об одном результате Ф. Л. Назарова

А. Н. Подкорытов

I. Написать эту заметку меня побудило не только желание рассказать красивый результат Ф. Л. Назарова. Дело ещё и в том, что предыстория его возникновения показывает, как полезно для решения конкретной задачи взглянуть на неё с более общей точки зрения. А предыстория эта такова. Хорошо известен признак Дирихле: для сходимости ряда $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n+\ldots$, где $a_n\downarrow 0$, достаточно, чтобы частичные суммы $b_1+b_2+\ldots+b_n$ были ограничены. В частности, это так, если $b_n=\sin nx$ (сумму $\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$ легко подсчитать). А. А. Флоринский задал такой вопрос: а как поведут себя эти суммы, если вместо синуса взять “повторный синус”? Иначе говоря, ограничены ли суммы $\sin(\sin x)+\sin(\sin 2x)+\ldots+\sin(\sin nx)$? Конечно, особый интерес вызывают значения x не соизмеримые с π.

Для “большинства” значений x ответ на этот вопрос утвердительный, но получить его не просто. Рассуждения, приведённые в решении задач IV.1.8 и IX.4.11 книги [1], показывают, что суммы $\sin(\sin x)+\sin(\sin 2x)+\ldots+\sin(\sin nx)$ ограничены, если дробь $\frac{x}{\pi}$ есть нелиувиллево число (т.е. если она “плохо” приближается дробями: $\left|\frac{x}{\pi}-\frac{p}{q}\right|>\frac{c}{q^{\sigma}}$ для всех $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$; положительные параметры c и σ зависят лишь от x). Все иррациональные алгебраические числа нелиувиллевы (в этом и состоит открытие Лиувилля). Таковы и некоторые конкретные трансцендентные числа, например, e, $\ln 2$ и π. Известно, что почти все вещественные числа нелиувиллевы (см. задачу VIII.1.7 в [1]). Таким образом, “типична” ограниченность частичных сумм $\sin(\sin x)+\sin(\sin 2x)+\ldots+\sin(\sin nx)$ (константой, зависящей от x). Возникает естественный вопрос: а бывают ли они неограниченными? Я задал его Ф. Л. Назарову и получил такой ответ:

Если непрерывная периодическая функция f такова, что суммы $S_n(x)=f(x)+\ldots+f(nx)$ ограничены для любого x не соизмеримого с периодом, то f — тригонометрический многочлен.

Упражнение 1. Когда справедливо обратное утверждение (иначе говоря, для каких тригонометрических многочленов f последовательность $\{S_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ ограничена для каждого x не соизмеримого с периодом)?

II. Прежде чем перейти к доказательству утверждения Ф. Л. Назарова, поясним, каким именно свойством отличаются тригонометрические многочлены от других непрерывных периодических функций. Очевидно, в обсуждаемой задаче значение периода не играет существенной роли. Не умаляя общности будем считать его равным единице, так что всюду далее периодичность означает 1-периодичность.

Простейшими примерами непрерывных периодических функций являются гармоники — функции 1, $\cos 2\pi x$, $\sin 2\pi x$, $\ldots$, $\cos 2\pi nx$, $\sin 2\pi nx, \ldots$ и их конечные линейные комбинации, т.е. 1-периодические тригонометрические многочлены. С помощью формул Эйлера такой многочлен T можно записать в виде $T(x) = \sum\limits_{m=-M}^{M} c_m e^{2\pi imx}$. Замечательное свойство экспонент позволяет просто вычислить коэффициенты c_m: так как $\int\limits_0^1 e^{2\pi ijx} dx = 0$ для всех целых $j \neq 0$, то

$$\int\limits_0^1 T(x)\, e^{-2\pi imx} dx = \sum_{k=-M}^{M} c_k \int\limits_0^1 e^{2\pi i(k-m)x} dx = c_m \int\limits_0^1 1\, dx = c_m, \ |m| \leqslant M.$$

Ясно, что левая часть этого равенства равна нулю при $|m| > M$. Естественно считать, что $c_m = 0$ для таких m. Поэтому для всех $m \in \mathbb{Z}$ мы имеем

$$c_m = \int\limits_0^1 T(x)\, e^{-2\pi imx} dx.$$

Интеграл в правой части этого равенства имеет смысл не только для тригонометрических многочленов, но и для любой непрерывной периодической функции f. Он называется её m-м коэффициентом Фурье и обозначается символом $\widehat{f}(m)$:

$$\widehat{f}(m) = \int\limits_0^1 f(x)\, e^{-2\pi imx} dx \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

В простом случае, когда $f = T$ — тригонометрический многочлен, коэффициенты $c_m = \widehat{T}(m)$ (среди них лишь конечное число отличных от нуля) однозначно восстанавливают функцию T. В общем случае с произвольной непрерывной периодической функцией f ситуация значительно сложнее (заменить конечную сумму, соответствующую многочлену, аналогичной бесконечной суммой, вообще говоря, нельзя — ряд $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(m)\, e^{2\pi imx}$ может расходиться). Отказываясь здесь от непростой задачи — восстановить функцию f по её коэффициентам Фурье*, укажем на более слабое, но чрезвычайно важное утверждение (теорема единственности для коэффициентов Фурье): *если непрерывные периодические функции f, g таковы, что $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m)$ для всех $m \in \mathbb{Z}$, то $f = g$.* В частности, среди таких функций только у тригонометрических многочленов набор ненулевых коэффициентов Фурье конечен. Доказательство этого (неочевидного!) утверждения известно из теории рядов Фурье и здесь мы не будем его касаться.

У п р а ж н е н и е 2. Докажите, что функция $f(x) = \sin(\sin 2\pi x)$ не является тригонометрическим многочленом и, следовательно, суммы

$$\sin(\sin 2\pi x) + \ldots + \sin(\sin 2\pi nx)$$

не ограничены для некоторых (исключительно редких!) значений x.

*Она решается, например, теоремой Фейера.

III. Нам потребуются два свойства, характеризующих взаимное расположение решёток $\mathbb{Z}$ и $x\mathbb{Z}$ на вещественной оси. Первое из них хорошо известно.

ЛЕММА 1. *Пусть $Q \in \mathbb{N}$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда существует такая дробь $\frac{p}{q}$, $q \leqslant Q$, что $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}$.*

Это утверждение часто называют теоремой Дирихле, так как в наиболее простом его доказательстве (см. далее) используется “принцип ящиков” Дирихле. Оно, несомненно, было известно и до Дирихле, поскольку это одно из свойств цепных дробей, установленных ещё в XVIII веке.

Доказательство. Дробные доли чисел 0, x, $2x$, $\ldots$, Qx принадлежат промежутку $[0,1)$, т.е. объединению Q меньших промежутков $\left[0, \frac{1}{Q}\right)$, $\left[\frac{1}{Q}, \frac{2}{Q}\right)$, $\ldots$, $\left[\frac{Q-1}{Q}, 1\right)$. Так как чисел больше чем промежутков, то хотя бы один из них содержит дробные доли двух различных чисел. Поэтому эти дробные доли различаются меньше, чем на $\frac{1}{Q}$. Иначе говоря, для некоторых целых j, k, $0 \leqslant j < k \leqslant Q$, справедливо неравенство $\bigl|kx - [kx] - jx + [jx]\bigr| < \frac{1}{Q}$. Взяв $p = [kx] - [jx]$, $p \in \mathbb{Z}$, и $q = k - j$, $q \in \{1, 2, \ldots, Q\}$, мы получим $|qx - p| < \frac{1}{Q}$, что и требовалось.

Для иррационального числа x левая часть неравенства $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qQ}$ положительна, в то время как правая бесконечно мала при $Q \to +\infty$. Поэтому получающиеся при $Q = 1$, 2, 3, $\ldots$ дроби $\frac{p}{q}$ (не умаляя общности считаем p и q взаимно простыми) не могут иметь ограниченные знаменатели. Таким образом, для любого иррационального числа x существуют дроби $\frac{p}{q}$ со сколь угодно большими знаменателями, удовлетворяющие неравенству $\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$. Следовательно, $\left|kx - k\frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q}$ для всех $k = 1$, 2, $\ldots$, q. Поскольку числа p и q взаимно простые, дроби $k\frac{p}{q}$, взятые по модулю 1, образуют множество $\{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}\}$. Как мы убедились, каждый его элемент можно с точностью $\frac{1}{q}$ приблизить (по модулю 1) числами kx, $k = 1$, 2, $\ldots$, q. Отсюда сразу вытекает, что

любое вещественное число можно сколь угодно точно приблизить по модулю 1 числами, кратными данному иррациональному числу.

Именно это следствие нам и потребуется в дальнейшем.

ЛЕММА 2. *Пусть A — бесконечное множество натуральных чисел и $\varepsilon_m \to 0$, $\varepsilon_m > 0$ для всех $m \in A$. Тогда найдётся такое иррациональное число x, что $mx - [mx] \leqslant \varepsilon_m$ для бесконечного числа номеров m из A.*

Доказательство. Занумеровав произвольным образом множество рациональных чисел, построим с помощью индукции такую последовательность вложенных промежутков вида $\Delta_j = \left[\frac{k_j}{m_j}, \frac{k_j + \varepsilon_{m_j}}{m_j}\right]$, что $k_j \in \mathbb{Z}$, $m_j \in A$ и Δ_j не содержит первых j рациональных чисел. Тогда число x из пересечения $\cap_j \Delta_j$ требуемое.

Ясно, что точки x с указанным свойством образуют всюду плотное множество.

IV. Всюду дальше f — непрерывная 1-периодическая функция. Наша цель — доказать, что ограниченность сумм $S_n(x) = f(x) + f(2x) + \ldots + f(nx)$ при каждом $x \notin \mathbb{Q}$ возможна лишь в случае, когда $\widehat{f}(m) = 0$ при достаточно большом $|m|$. Как отмечено в конце пункта II, это означает, что f — тригонометрический многочлен.

Пусть x — иррациональное число, выбор которого уточним позже. Заметим, что из неравенств $|S_n(x)| < C_x < \infty$ благодаря непрерывности f вытекают неравенства $|f(x+y) + \ldots + f(nx+y)| < 2C_x$ при любом $y \in (0,1)$. Для доказательства следует достаточно точно аппроксимировать y по модулю 1 числом, кратным x (надо воспользоваться следствием из леммы 1).

Вычислим теперь интеграл

$$I = \int_0^1 \big(f(x+y) + \ldots + f(nx+y)\big)\, e^{-2\pi imy}\, dy = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 f(jx+y)\, e^{-2\pi imy}\, dy.$$

После замены переменной $jx+y \mapsto y$ (периодичность подынтегральной функции позволяет не менять пределы интегрирования) мы приходим к равенству

$$I = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 f(y)\, e^{-2\pi im(y-jx)}\, dy = \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi imjx} \int_0^1 f(y)\, e^{-2\pi imy}\, dy =$$
$$= \widehat{f}(m) \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi imjx} = \widehat{f}(m)\, \frac{\sin \pi nmx}{\sin \pi mx}\, e^{\pi i(n+1)mx}.$$

Так как в интеграле I подынтегральная функция по абсолютной величине не превосходит $2C_x$, то $|I| \leqslant 2C_x$. Поэтому каждый коэффициент Фурье $\widehat{f}(m)$ при всех n удовлетворяет неравенству

$$|\widehat{f}(m)| \left|\frac{\sin \pi nmx}{\sin \pi mx}\right| \leqslant 2C_x.$$

Убедимся, что это возможно только в тривиальном случае, когда среди коэффициентов $\widehat{f}(m)$ лишь конечное число отличных от нуля. Действительно, если это не так, то найдётся такой бесконечный набор номеров A, что вдоль них $|\widehat{f}(m)|\, n_m \to +\infty$ для достаточно быстро растущей последовательности $\{n_m\}$. Как следует из леммы 2, существует такое иррациональное число x, что дробные доли δ_m произведений mx не больше $\frac{1}{2n_m}$ для бесконечного числа номеров m из A. Пользуясь двойным неравенством $\frac{2}{\pi}\varphi < \sin\varphi < \varphi$ $(0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$, для таких m и $n = n_m$ мы получаем

$$2C_x \geqslant |\widehat{f}(m)| \left|\frac{\sin \pi n_m mx}{\sin \pi mx}\right| = |\widehat{f}(m)|\, \frac{\sin \pi n_m \delta_m}{\sin \pi \delta_m} \geqslant |\widehat{f}(m)| \frac{2n_m\delta_m}{\pi\delta_m} = \frac{2}{\pi}\, |\widehat{f}(m)|\, n_m,$$

что несовместимо со стремлением (вдоль A) произведений $|\widehat{f}(m)|\, n_m$ к бесконечности.

Литература

[1] Макаров Б. М., Голузина М. Г., Лодкин А. А., Подкорытов А. Н. *Избранные задачи по вещественному анализу.* Изд-во Невский Диалект. С.-Петербург. 2004 г.