

# Сумма обратных квадратов

Кохась К.

В этой заметке рассказываем о том, как можно разными способами найти значение суммы

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

Вероятно, все изложенные здесь способы являются известными. Да и попытки устроить ревизию в этом хозяйстве уже тоже предпринимались.

Толчком к написанию этого текста послужило наблюдение, изложенное в параграфе 7, пополнению коллекции доказательств сильно помогли статья [12] и дискуссии в [18].

## 1 Метод Абеля

Вспользуемся стандартным способом нахождения сумм — методом Абеля. Его проходят в конце первого курса. Способ состоит в следующем. Чтобы найти сумму сходящегося ряда  $\sum a_k$ , рассматривают степенной ряд  $f(x) = \sum a_k x^k$ . По теореме Абеля радиус сходимости этого ряда не меньше 1. Есть много различных приемов работы со степенными рядами и если мы каким-нибудь образом сумеем найти явную формулу для функции  $f(x)$ , то тогда  $\sum a_k = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x)$ . Итак, положим

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

Тогда

$$x f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx. \quad (1)$$

К сожалению, интеграл “не берется”. Думаем, с этой трудностью сталкивались многие первокурсники.

Придется идти другим путем. Впрочем, чуть позже мы все-таки вычислим этот интеграл при помощи комплексного интегрирования (с помощью вычетов).

## 2 Разложим синус или что-нибудь на множители

Вот рассуждение, принадлежащее Эйлеру. Рассмотрим формулу Тейлора для функции  $\sin x$ :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (2)$$

Выражение в правой части (ряд) представляет собой “многочлен бесконечной степени”. Естественно, что раз степень этого “многочлена” бесконечна, то у него должно быть бесконечно много корней. Это замечание прекрасно соответствует нашим знаниям о функции  $\sin x$ : действительно эта функция имеет бесконечно много корней, а именно, все точки вида  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  (и кстати, других комплексных корней нет). Попробуем разложить эту функцию на множители. Здесь нужно действовать аккуратно: например, разложение

$$\sin x = x(x - \pi)(x + \pi)(x - 2\pi)(x + 2\pi) \dots$$

вряд ли может быть верным, сомножители при фиксированном  $x$  стремятся к бесконечности, да и все коэффициенты при раскрытии скобок получаются целочисленными кратными  $\pi$ , что не соответствует формуле (2). Для того чтобы получить более “правильное” разложение, давайте перенормируем скобки: вместо скобки  $(x - k\pi)$ , обращаемой в нуль при  $x = k\pi$ , возьмем  $(1 - \frac{x}{k\pi})$ . Кроме того сгруппируем вместе скобки, соответствующие корням  $\pm k\pi$ . Получим

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \dots \quad (3)$$

Это разложение уже более правдоподобно: произведение в правой части сходится при любом вещественном (и даже комплексном)  $x$ . Да и коэффициент при младшем члене (т. е. при  $x$ ) такой, как надо: если раскрыть все эти скобки в правой части, то, ясное дело, коэффициент при  $x$  будет равен единице.

Давайте тогда вычислим коэффициент при  $x^3$  в формуле (3). В левой части коэффициент при  $x^3$  равен  $-1/6$ , это мы знаем из формулы (2). А в правой части коэффициент равен... поостойте, поостойте... ну да, он равен  $-(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \dots)$ . И мы приходим к замечательному равенству

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}. \quad (4)$$

Разумеется, рассуждения, которыми получена эта формула, не претендуют на звание “доказательство”. Но по большому счету они верны. Теорема о разложении функции  $\sin x$  в бесконечное произведение (т. е. формула (3)) доказывается в курсе анализа или ТФКП (см. [8, 5]).

Вариацией на эту же тему является вот какой подход: давайте подберем какую-нибудь разумную последовательность многочленов, у которых корнями являются не то чтобы сами дроби  $1/n^2$ , а какие-то асимптотически близкие к ним выражения, после чего выполним предельный переход.

Например, сделаем так ([12]). Возьмем нечетное число  $n = 2m + 1$ . Нетрудно проверить, что тогда

$$\sin nx = P_n(\sin x),$$

где  $P_n$  — многочлен степени  $n$ . Подставляя  $x = k\pi/n$ , мы видим, что числа  $\sin(k\pi/n)$ ,  $-m \leq k \leq m$ , являются корнями этого многочлена, а так как их здесь ровно  $n$ , то других корней нет, следовательно,

$$P_n(y) = ny \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{y^2}{\sin^2(k\pi/n)}\right).$$

Здесь нормировочный коэффициент  $n$  в правой части подобран из тех соображений, что  $\lim_{y \rightarrow 0} P_n(y)/y = n$ . Таким образом,

$$\sin nx = n \sin x \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2(k\pi/n)}\right).$$

Приравнявая коэффициенты при  $x^3$  разложений Тейлора в нуле левой и правой частей, получаем

$$-\frac{n^3}{6} = -\frac{n}{6} - n \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sin^2(k\pi/n)},$$

и следовательно,

$$\frac{1}{6} - \sum_{k=1}^m \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)} = \frac{1}{6n^2}. \quad (5)$$

Теперь зафиксируем натуральное число  $M$  и будем полагать, что число  $m$ , которое мы выбрали с самого начала, больше чем  $M$ . Тогда последнее равенство можно переписать в виде

$$\frac{1}{6} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)} = \frac{1}{6n^2} + \sum_{k=M+1}^m \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)}.$$

В правой части воспользуемся неравенством  $\sin x > \frac{2}{\pi}x$ , верным при  $0 < x < \pi/2$ :

$$0 < \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{n^2 \sin^2(k\pi/n)} < \frac{1}{6n^2} + \sum_{k=M+1}^m \frac{1}{4k^2}.$$

Пусть теперь  $m \rightarrow +\infty$  (и вместе с ним  $n = 2m + 1$  тоже стремится к бесконечности), в пределе получим

$$0 < \frac{1}{6} - \sum_{k=1}^M \frac{1}{k^2 \pi^2} \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}.$$

Наконец, устремим и  $M$  к бесконечности. Поскольку в правой части написан хвост сходящегося ряда, мы сразу получаем (4). Первоисточник этого рассуждения — [14].

А теперь чуть менее техническое рассуждение. Вероятно, читатель учил когда-то в школе формулу

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Знаете, что за двойка стоит в числителе? Это на самом деле коэффициент  $C_2^1$ . А знаете, что за минус единица стоит в знаменателе? Это, конечно же  $(-1)^{k+1} C_2^k$  при  $k = 2$ . Общая же формула, которую читатель, вероятно, в школе не проходил, выглядит так (мы ее к тому же запишем для котангенсов, а не для тангенсов):

$$\operatorname{ctg} n\alpha = \frac{1 - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2} \alpha + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4} \alpha - \dots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1} \alpha - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} \alpha + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5} \alpha - \dots}. \quad (6)$$

На самом деле эта формула очевидна: подставьте

$$\cos nx = \operatorname{Re}(\cos x + i \sin x)^n, \quad \sin nx = \operatorname{Im}(\cos x + i \sin x)^n$$

и все получится. Для наших целей эта формула хороша тем, что она сразу же позволяет указать корни многочлена

$$C_{2m+1}^1 x^m - C_{2m+1}^3 x^{m-1} + C_{2m+1}^5 x^{m-2} - \dots$$

Вот эти корни:

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1}, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2m+1}, \quad \dots, \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1}.$$

Действительно, подставляя  $n = 2m + 1$ ,  $\alpha = k\pi/(2m + 1)$  в (6), мы видим, что левая часть бесконечна и при этом все котангенсы в правой части конечны; это может быть только если знаменатель обращается в нуль.

Теперь мы можем подсчитать сумму этих корней по теореме Виета

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{2m+1} + \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{2m+1} + \dots + \operatorname{ctg}^2 \frac{m\pi}{2m+1} = \frac{C_{2m+1}^3}{C_{2m+1}^1} = \frac{m(2m-1)}{3}.$$

А заодно, поскольку  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1$ , мы можем установить и такое равенство

$$\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi}{2m+1}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{2\pi}{2m+1}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{3\pi}{2m+1}} + \dots + \frac{1}{\sin^2 \frac{m\pi}{2m+1}} = \frac{m(2m-1)}{3} + m = \frac{m(2m+2)}{3}.$$

(Кстати, это в точности равенство (5).)

Ну вот, а сейчас мы вытащим из шляпы зайца. Поскольку  $\operatorname{ctg} \alpha < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\sin \alpha}$  при  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , мы можем заключить из предыдущих двух формул, что

$$\frac{m(2m-1)}{3} < \left(\frac{2m+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{2m+1}{3\pi}\right)^2 + \dots + \left(\frac{2m+1}{m\pi}\right)^2 < \frac{m(2m+2)}{3}.$$

Сокращая на  $\frac{(2m+1)^2}{\pi^2}$  и переходя к пределу при  $n \rightarrow +\infty$ , получаем равенство (4). Это рассуждение мы взяли из [10, задача 143].

### 3 Котангенс

Вот еще одно рассуждение от Эйлера. Прологарифмируем равенство (3), после чего возьмем производную, получится

$$\operatorname{ctg} x = \dots + \frac{1}{x+2\pi} + \frac{1}{x+\pi} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} + \frac{1}{x-2\pi} + \dots \quad (7)$$

Дифференцирование законно, поскольку ряд  $\frac{1}{x} + \sum \frac{2x}{x^2 - \pi^2 k^2}$  сходится равномерно в окрестности любой точки  $x \neq \pi k$ . Между прочим, получилось довольно разумное равенство, типичное разложение на простейшие, сравните с разложениями

$$\frac{1}{x^3 - x} = \frac{1/2}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1/2}{x+1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{P(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{P'(x_k)}{x - x_k}$$

(в последнем равенстве  $P(x)$  — многочлен степени  $n$ ,  $x_k$  — его (комплексные) корни). В курсе ТФКП, это так и называется: “разложение мероморфной функции на элементарные дроби”.

Теперь будем пожинать плоды. Разложим каждую из дробей  $\frac{1}{x+\pi k}$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  по формуле суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{x+\pi k} = \frac{1}{\pi k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{\pi k}} = \frac{1}{\pi k} \left( 1 - \frac{x}{\pi k} + \frac{x^2}{\pi^2 k^2} + \dots \right).$$

Суммируя такие разложения по всем  $k$ , получаем формулу

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{2x}{\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots \right) - \frac{2x^3}{\pi^4} \left( 1 + \frac{1}{24} + \frac{1}{34} + \dots \right) - \dots$$

Чтобы в очередной раз узнать, чему же, собственно, равна сумма  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$ , осталось только подсчитать коэффициент при  $x$  в тейлоровском разложении в окрестности точки  $x_0 = 0$  функции  $\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$ . Эта функция только с виду ведет себя в нуле не очень хорошо, но если положить  $f(0) = 0$ , то она окажется в нуле и непрерывна, и дифференцируема, и даже аналитична; искомый коэффициент равен

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)' = \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{3}. \quad (8)$$

И мы снова получаем (4). Кстати, аналогично можно узнать, что сумма обратных четвертых степеней равна  $\pi^4/90$  (это можно было также узнать, пользуясь всеми остальными изложенными здесь способами или их обобщениями).

В книге [4], из которой мы взяли это рассуждение, предлагается еще и такой вариант:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 - \sin x} &= \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) = \\ &= -2 \left( \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{x + \frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{x - \frac{5\pi}{2}} + \frac{1}{x + \frac{7\pi}{2}} + \dots \right) = \\ &= \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots \right) + \\ &\quad + \frac{8x}{\pi^2} \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots \right) + \frac{16x^2}{\pi^3} \left( 1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \dots \right) + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Приравнявая коэффициенты при  $x$  в левой и правой частях, получаем равенство

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \dots = \frac{\pi^2}{8}. \quad (10)$$

Но сумма обратных квадратов нечетных чисел легко выражается через сумму обратных квадратов всех натуральных чисел:

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right) - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \dots \right) = \frac{3}{4} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right).$$

## 4 Арктангенс

Вам ничего не напоминает, уважаемый читатель, выражение (9)?

Ну конечно же, это “кусочек” знаменитой формулы Грегори–Лейбница, первого в истории математики ряда, задающего разложение числа  $\pi$ :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Возведем это равенство в квадрат! Точнее говоря, сначала запишем его в виде  $\pi = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}}$ , а уж потом возведем в квадрат

$$\begin{aligned} \pi^2 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{m+\frac{1}{2}} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^r}{r+\frac{1}{2}} \stackrel{n:=r-m}{=} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(m+\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2})} = \end{aligned} \quad (11)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(m+\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2})} \quad (12)$$

Законность перемены порядка суммирования (переход от (11) к (12)) здесь нетривиальна, мы не будем это доказывать (у нас популярная статья), доказательство можно прочесть в [5, § 1.66], а пока закончим вычисление. Заметим, что в последних суммах при  $n \neq 0$  мы имеем

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(m+\frac{1}{2})(m+n+\frac{1}{2})} = \frac{1}{n} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{m+\frac{1}{2}} - \frac{1}{m+n+\frac{1}{2}} \right) = 0.$$

Поэтому двойная сумма (12) равна

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m+\frac{1}{2})^2} = 8 \left( 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots \right).$$

Мы опять доказали формулу (10).

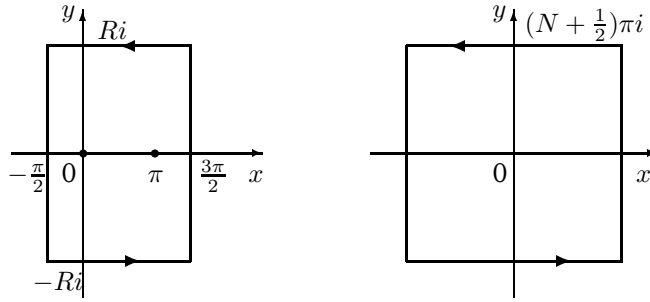


Рис. 1: К вопросу о том, чему равно  $2+2$

## 5 Теорема о вычетах

Еще один подход к вычислению интересующей нас суммы, родственный использованию формулы (7), основан на применении теоремы о вычетах. Хотите вычислить некоторую сумму? Есть фирменный способ! Подберите такую мероморфную функцию, вычеты которой в особых точках равны слагаемым этой суммы, и вычислите интеграл по контуру, охватывающему все особые точки!

Например, вычислим-ка, чему равно  $2+2$ . Разложение (7) подсказывает, что есть довольно удобная функция, у которой много особых точек и все вычеты в особых точках равны единице. Эта функция — котангенс! Рассмотрим тогда интеграл

$$\int_{C_R} 2 \operatorname{ctg} z \, dz,$$

где контур  $C_R$  изображен на рис. 1 слева. Внутри контура две особые точки, по теореме о вычетах интеграл равен  $2\pi i(2+2)$ . С другой стороны, в силу  $\pi$ -периодичности котангенса интегралы по вертикальным сторонам прямоугольника сокращаются, а в силу нечетности сумма интегралов по горизонтальным сторонам равна удвоенному интегралу по верхней стороне. Итак,

$$2\pi i(2+2) = 2 \int_{\frac{3\pi}{2}+Ri}^{-\frac{\pi}{2}+Ri} 2 \operatorname{ctg} z \, dz = 2 \int_{\frac{3\pi}{2}+Ri}^{-\frac{\pi}{2}+Ri} \frac{2 \cos z}{\sin z} \, dz = 4i \int_{\frac{3\pi}{2}+Ri}^{-\frac{\pi}{2}+Ri} \frac{1 + e^{-2iz}}{1 - e^{-2iz}} \, dz.$$

Левая часть не зависит от  $R$ , а в правой части подынтегральное выражение при  $R \rightarrow +\infty$  стремится к  $-1$ , а сам интеграл — к  $2\pi$ . Переходя к пределу, заключаем, что

$$2+2=4. \quad (13)$$

Как вы понимаете, теперь вычисление суммы  $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$  для нас не проблема. Правда, удобнее вычислять удвоенную сумму

$$\sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (14)$$

где штрих обозначает, что в сумме пропущено слагаемое для  $n=0$ . Рассмотрим интеграл

$$\int_{C_N} \frac{\pi^2}{z^2} \operatorname{ctg} z \, dz,$$

где контур  $C_N$  изображен на рис. 1 справа (здесь  $N$  — натуральное число). Мы добавили в подынтегральное выражение множитель  $\pi^2/z^2$ , чтобы вычеты подынтегральной функции стали равны слагаемым нашей суммы. Аналогично предыдущему вычислению интегралы по вертикальным сторонам квадрата сокращаются, а интегралы по горизонтальным сторонам квадрата стремятся к нулю, кстати, тоже из-за множителя  $1/z^2$ . Кроме того, при  $N \rightarrow +\infty$  в контур попадает все больше особых точек котангенса. Переходя к пределу, мы получаем, что

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\pi^2}{z^2} \operatorname{ctg} z + \sum'_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

Сам вычет мы уже фактически подсчитали в (8). И это дает нам еще одно доказательство формулы (4).

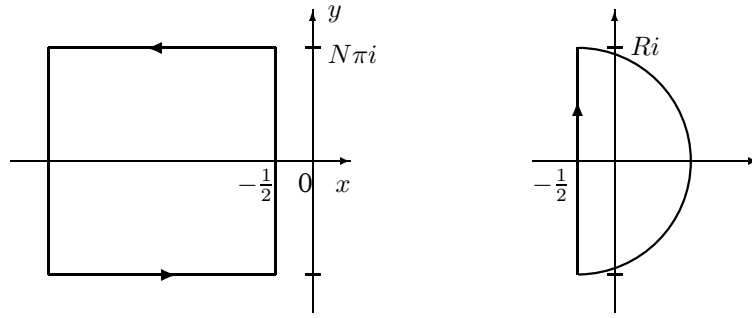


Рис. 2:

## 6 Г-функция

Приведенное вычисление, несомненно, оставит неприятный осадок в душе настоящего эстета. Прозрачная идея, краткость, несложные или хорошо замаскированные технические подробности, — все это прекрасно, но один штрих (а именно: штрих в формуле (14)) сводит на нет все наши усилия: с самого начала вычисления нам пришлось удвоить количество слагаемых!

— Нет ли у Вас такого же халата, но с перламутровыми пуговицами? — спросит нас этот читатель. — Т.е. нет ли у Вас такой функции, особые точки которой находятся в точках  $n \in \mathbb{N}$ , а вычеты по-прежнему равны единице?

Есть. Есть такая функция! Это логарифмическая производная Г-функции Эйлера! Ну. . . , почти.

Саму Г-функцию можно определить выражением

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx,$$

которое задает ее при  $\operatorname{Re} z > 0$ . На остальные комплексные значения  $z$  ее можно распространить, пользуясь формулой понижения

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (15)$$

Имеет место следующая замечательная формула, которую получают, отталкиваясь от определений и простых свойств Г-функции, довольно замысловатыми манипуляциями с интегралами (см., например [8, §535–537]):

$$\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} + C = \int_0^1 \frac{1-t^z}{1-t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{z+n} \right). \quad (16)$$

Здесь  $C$  — это не какая попало константа, а постоянная Эйлера. Эта формула показывает, что функция  $\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}$  действительно обладает нужными нам свойствами: ее особые точки расположены, правда, не в натуральных, а в отрицательных целых точках, ну так и вычеты равны не единице, а минус единице.

Между прочим, все три части равенства (16) можно продифференцировать по  $z$ , а потом подставить  $z = 0$ , получится перспективная для наших целей формула

$$\left. \frac{d}{dz} \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} \right|_{z=0} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad (17)$$

которая выражает интересующую нас сумму, впрочем, не вполне понятно через что (и кстати, интеграл в средней части формулы мы уже встречали в параграфе 1). Не будем пока думать об этом, мы поглощены другой идеей. Рассмотрим интеграл

$$\int_{S_N} \frac{\Gamma'(z+1)}{z^2 \Gamma(z+1)} dz,$$

где  $S_N$  — квадратный контур, изображенный на рис. 2 слева.

Как ведут себя интегралы по сторонам этого квадрата, когда  $N$  растет? Интегралы по горизонтальным сторонам и по левой вертикальной стороне стремятся к нулю, благодаря множителю  $z^2$  в знаменателе, поскольку

по формуле (16) подынтегральная функция в этих местах невелика. Переходя к пределу при  $N \rightarrow +\infty$ , получаем равенство

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}} \frac{\Gamma'(z+1)}{z^2 \Gamma(z+1)} dz.$$

Отметим еще одно достижение человеческой мысли, формулу Вейерштрасса (см. [8])

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{Cz} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq -1, -2, -3 \dots$$

(здесь  $C$  — по-прежнему постоянная Эйлера). Из этой формулы в частности следует, что  $\Gamma(z+1) \neq 0$  при  $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$  и поэтому в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$  определена однозначная ветвь функции  $\log \Gamma(z+1)$ . Тогда проинтегрируем по частям

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}} \frac{\Gamma'(z+1)}{z^2 \Gamma(z+1)} dz = \frac{1}{\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}} \frac{\log \Gamma(z+1)}{z^3} dz,$$

и чтобы вычислить интеграл в правой части, изобретем подходящий контур (рис. 2 справа):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_{\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}} \frac{\log \Gamma(z+1)}{z^3} dz &= -\frac{1}{\pi i} \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \int_{-\frac{1}{2}-Ri}^{-\frac{1}{2}+Ri} \frac{\log \Gamma(z+1)}{z^3} dz + \int_{\substack{\operatorname{Re} z \geq -\frac{1}{2} \\ |z| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{4}}} } \frac{\log \Gamma(z+1)}{z^3} dz \right) = \\ &= -2 \operatorname{res}_{z=0} \frac{\log \Gamma(z+1)}{z^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Второе слагаемое под пределом — интеграл по полуокружности — стремится к нулю при  $R \rightarrow +\infty$  опять в силу оценок, которые следуют из формулы (16), а минус перед пределом стоит из-за неправильной ориентации контура. Таким образом, под пределом стоит интеграл по границе полукруга, который мы вычислили по теореме о вычетах.

Осталось подсчитать вычет (18) и тут наша наезженная магистраль упирается в тупик: стандартный способ вычисления вычетов приводит к необходимости найти значение выражения  $\left(\frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)}\right)'$  при  $z = 0$ , т. е. к проигнорированной нами чуть раньше формуле (17)!



## 7 Немного здравого смысла, везения и комплексного интегрирования

Мы его все-таки вычислим, этот вычет. Вернемся к интегралу (1). Сделаем замену переменных  $x = e^{-t}$ :

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x - 1}.$$

Рассмотрим контур  $C_{r,R}$ , изображенный на рис. 3. Проинтегрируем функцию  $\frac{z^2}{-e^z - 1}$  по этому контуру.

В точках  $\pm\pi i$  подынтегральная функция имеет простой полюс с главной частью ряда Лорана  $\frac{-\pi^2}{x \mp \pi i}$ . Поэтому сумма пределов интегралов по дугам, обходящим особые точки  $\pm\pi i$ , равна  $\pi^3 i$ . По теореме о вычетах имеем

$$0 = \pi^3 i + \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_{C_{r,R}} \frac{z^2 dz}{-e^{-z} - 1} = \pi^3 i + \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left( \int_{\leftarrow} + \int_{\uparrow} + \int_{\leftarrow} + \int_{\downarrow} \right) \frac{z^2 dz}{-e^{-z} - 1}$$

Рассмотрим сумму интегралов по горизонтальным сторонам контура:

$$\lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \left( \int_{\leftarrow} + \int_{\leftarrow} \right) \frac{z^2 dz}{-e^{-z} - 1} = \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{(t - \pi i)^2 dt}{-e^{t - \pi i} - 1} - \lim_{\substack{r \rightarrow +0 \\ R \rightarrow +\infty}} \int_r^R \frac{(t + \pi i)^2 dt}{-e^{t + \pi i} - 1} = \int_0^{+\infty} \frac{-4\pi i t dt}{e^t - 1}.$$

Интеграл по правой вертикальной стороне контура  $C_{r,R}$  стремится к нулю из-за экспоненты в знаменателе. Таким образом, получаем равенство

$$0 = \pi^3 i - 4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} - \lim_{r \rightarrow +0} \int_{(-\pi+r)i}^{(\pi-r)i} \frac{z^2 dz}{e^z + 1}. \quad (19)$$

Теперь заметим, что

$$\frac{z^2}{e^z + 1} = -\frac{z^2}{2} \cdot \frac{e^z - 1}{e^z + 1} + \frac{z^2}{2},$$

причем функция  $-\frac{z^2}{2} \cdot \frac{e^z - 1}{e^z + 1}$  — нечетна, и следовательно, интеграл от нее по промежутку  $[(-\pi + r)i, (\pi - r)i]$  равен нулю. Значит, мы можем переписать равенство (19) в виде

$$4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} = \pi^3 i - \int_{-\pi i}^{\pi i} \frac{z^2}{2} dz.$$

Таким образом, мы находим, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{e^t - 1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Это вычисление нам подсказал Е. Горячко.

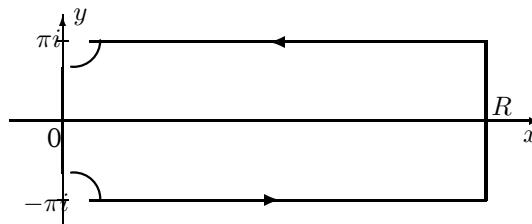


Рис. 3:

Заканчивая тему комплексных вычислений, мы приведем еще одно вычисление, связанное с интегралом  $\int \frac{\ln(1-x)}{x} dx$ , при помощи которого можно совсем легко найти сумму обратных квадратов нечетных чисел (мы почерпнули это вычисление в [16]).

Заметим, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-1}^1 \frac{z^k}{k} dz = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k} dz = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\log(1-z)}{z} dz = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{\log(1+z)}{z} dz.$$

Можно считать, что в правой части мы интегрируем не по отрезку  $[-1, 1]$ , а по полуокружности  $|z| = 1$ ,  $\text{Im } z \geq 0$ . Тогда введем параметризацию  $z = e^{2it}$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  и, избегая не очень содержательных в данном случае замечаний о выборе ветви логарифма, учтем, что  $\log(1 + e^{2it}) = \ln |1 + e^{2it}| + i \arg(1 + e^{2it}) = \ln 2 \cos t + it$ . Тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{2} \int_1^{-1} \frac{\log(1+z)}{z} dz = -i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + e^{2it}) dt = -i \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln 2 \cos t dt + \frac{\pi^2}{8}.$$

Сравнивая вещественные части самого левого и самого правого выражения, мы опять находим нашу сумму, а сравнивая мнимые части, получаем равенство  $\int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ , которое, впрочем, нам не потребуется.

## 8 Функциональное уравнение для дзета-функции

До сих пор мы старательно обходили еще один подход, чуть ли не самый важный, к вычислению нашей суммы. Обозначим

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Эта формула задает функцию комплексной переменной  $\zeta(s)$  — дзета-функцию Римана — при  $\operatorname{Re} z > 1$ . Доказательство того, что эта функция аналитична в указанной области является несложным упражнением для второкурсника. Функция допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость. Получается функция, имеющая единственный простой полюс в нуле. Нас интересует значение  $\zeta(2)$ . Кстати, вопрос, чему равно  $\zeta(3)$ , интересует все прогрессивное человечество.

Известно функциональное уравнение для дзета-функции:

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos \frac{1}{2} \pi s \Gamma(s) \zeta(s).$$

Уравнение, эквивалентное написанному, встречается (без доказательства) в одной работе Эйлера 1749 г. Два доказательства этой формулы можно прочесть в [5, §4.44–4.45]. Выразив  $\zeta(s)$  из правой части и подставив  $s = 2$ , мы находим, что

$$\zeta(2) = \frac{\zeta(-1)}{2^{-1} \pi^{-2} \cos \pi \Gamma(2)} = -2\pi^2 \zeta(-1).$$

Нам осталось найти, чему же равно  $\zeta(-1)$ . А поскольку ответ мы уже знаем, то достаточно проверить формулу

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}. \quad (20)$$

Появление здесь расходящегося ряда, да еще *такого*, не должно шокировать читателя. Работа с расходящимися рядами и вообще с *сомнительными* объектами — это одна из постоянных черт работы математика. Вспомните, например, о производящих функциях, при работе с которыми далеко не всегда задаются вопросом, а определена ли эта функция хотя бы в одной точке (кроме нуля; впрочем, значение производящей функции в нуле мало кого интересует).

Сама формула (20) была известна еще Эйлеру. В книге Харди [9, §13.10] дано доказательство этой формулы, состоящее в том, что предлагается специальный способ суммирования рядов — метод суммирования Рамануджана, который для сходящихся рядов дает их обычную сумму, но кроме того дает конечную сумму для целого класса расходящихся рядов, в том числе для ряда (20). Кроме того при этом не остается сомнений, что мы вычисляем в точности  $\zeta(-1)$ .

Мы же ограничимся красивым, но трудно формализуемым выводом формулы (20), фактически в стиле [9, §13.12], который принадлежит D. Риппи (мы прочли об этом в заметке J. Ваез в [18]).

Рассмотрим дифференциальный оператор  $D = \frac{d}{dx}$ . Формальное вычисление экспоненты дает нам формулу Тейлора

$$(e^{cD} f)(x) = f(x) + cf'(x) + \frac{c^2}{2} f''(x) + \dots = f(x + c).$$

Эта формула хорошо знакома тем, кто слышал о представлениях группы Гейзенберга и ее алгебры Ли. Суммируя найденные выражения по  $c$  и подставляя  $x = 0$ , получаем

$$f(0) + f(1) + f(2) + \dots = ((1 + e^D + e^{2D} + \dots) f)(0) = \left( \frac{1}{1 - e^D} f \right)(0).$$

Пусть  $f(x) = x$ ,  $F(x) = x^2/2$  — первообразная функции  $f(x)$ . Тогда мы имеем соотношение

$$1 + 2 + 3 + \dots = \left( \frac{D}{1 - e^D} F \right)(0).$$

Для вычисления правой части осталось воспользоваться обычным разложением Тейлора

$$\frac{t}{1 - e^t} = -1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \dots$$

и тем соображением, что более чем двукратное дифференцирование функции  $F(x) = x^2/2$  дает нуль. Формула (20) “доказана”.

## 9 Интегрирование по частям

Следующее рассуждение мы почерпнули в [3], первоисточник — [15]. Пусть

$$I_k = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2k} x \, dx.$$

Обычное интегрирование по частям дает равенство

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2k-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= \frac{2k}{2k-1} I_{k-1} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \cdot (\cos^{2k-2} x \sin x) \, dx = \\ &= \frac{2k}{2k-1} I_{k-1} - \frac{1}{2k-1} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int_0^{\pi/2} \cos^{2k-1} x (2x \sin x + x^2 \cos x) \, dx = \dots = \\ &= \frac{2k}{2k-1} I_{k-1} - \frac{1}{2k-1} I_k - \frac{2}{2k(2k-1)} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x \, dx. \end{aligned}$$

Пользуясь известным равенством

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}, \quad (21)$$

мы получаем соотношение

$$I_{k-1} - I_k = \frac{1}{k^2}.$$

Суммируя эти соотношения по  $k$ , мы получаем, что

$$I_0 - I_N = 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N^2}.$$

Поскольку  $I_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow +\infty$ , мы окончательно получаем, что

$$1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N^2} + \dots = I_0 = \frac{\pi^2}{6}.$$

## 10 Арксинус

Знаете, как раскладывают в ряд Тейлора  $\arcsin x$  в нуле? Очень просто. Сначала его дифференцируют, получается  $(1 - x^2)^{-1/2}$ . Это выражение раскладывают по биному:

$$(1 - x^2)^{-1/2} = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)x^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^4 - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^6 + \dots,$$

а потом интегрируют, получается

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots$$

Ну хорошо, подставим в обе части  $x = \sin t$  и проинтегрируем по  $t$  от 0 до  $\pi/2$ :

$$\int_0^{\pi/2} t dt = \int_0^{\pi/2} \sin t dt + \frac{1}{2 \cdot 3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \int_0^{\pi/2} \sin^5 t dt + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \int_0^{\pi/2} \sin^7 t dt + \dots$$

Вычисление интеграла в левой части оставим читателю в качестве упражнения, а для интегралов в правой части сходится формула (21). Итого

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$$

Фантастика! Мы взяли это рассуждение в [4] (также как и рассуждения с формулой (3)).

## 11 Двойной интеграл

Следующее рассуждение, принадлежащее Калаби, мы приводим по [13]. Рассмотрим сумму  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$ . Запишем каждое слагаемое  $(2k+1)^{-2}$  в виде  $\int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k} dx dy$ , тогда сумму можно преобразовать следующим образом

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \int_0^1 (xy)^{2k} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (xy)^{2k} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1 - (xy)^2}$$

(сумму и интегралы можно поменять местами, например, в силу положительности). Теперь сделаем замену переменных

$$x = \frac{\sin u}{\cos v}, \quad y = \frac{\sin v}{\cos u}.$$

Загадочным образом выражение под интегралом превратится в  $1 dudv$ , а область, по которой происходит интегрирование, — в треугольник  $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u, v > 0, u + v < \frac{\pi}{2}\}$ . Таким образом, полученный интеграл равен  $\pi^2/8$ .

Следующее рассуждение взято из работы [11] со скромным названием: “Доказательство которое упустил Эйлер: вычисление  $\zeta(2)$ ”. На самом деле, Эйлер упустил предыдущее доказательство.

Запишем сумму нашего ряда в виде двойного интеграла:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \left( \sum_{n=1}^{+\infty} (xy)^{n-1} \right) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{1 - xy}.$$

Мы не будем проследивать судьбу полученного многострадального интеграла в деталях, об этом можно прочесть не только в цитированной работе, но и в интернете, на страничке

<http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunctionZeta2.html>,

в [12] и в других местах. Скажем только, что после замены переменных  $x = u - v$ ,  $y = u + v$  и интегрирования по  $v$ , получается интеграл

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du,$$

который, э-э-э, берется.

## 12 Ряды Фурье

Сразу несколько способов подсчета суммы обратных квадратов дает теория рядов Фурье. Рассмотрим разложения

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot (-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi]; \\|x| &= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}, \quad x \in [-\pi, \pi]; \\ \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

и т. д. Из них можно сразу найти значение нашей суммы, подставляя подходящее значение  $x$ .

А из разложений

$$\begin{aligned}\frac{\pi - x}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad x \in (0, 2\pi); \\ \frac{\pi}{4} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}, \quad x \in (-\pi, \pi)\end{aligned}$$

и т. д., можно получить значение нашей суммы, если применить равенство Парсеваля.

Следующее рассуждение (из [12]) принадлежит Е. Старку. Из определения ядра Фейера следует, что

$$\left( \frac{\sin nx/2}{\sin x/2} \right)^2 = \sum_{k=-n}^n (n - |k|) e^{ikx} = n + 2 \sum_{k=1}^n (n - k) \cos kx.$$

Пользуясь этой формулой, проинтегрируем по промежутку  $[0, \pi]$  функцию  $x \left( \frac{\sin nx/2}{\sin x/2} \right)^2$ , для этого удобнее взять в качестве  $n$  четное число,  $n = 2N$ , тогда получаем

$$\int_0^{\pi} x \left( \frac{\sin Nx}{\sin x/2} \right)^2 dx = N\pi^2 - 8N \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{(2r+1)^2} + 4 \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{2r+1}.$$

Или

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{8N} \left( \frac{\sin Nx}{\sin x/2} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{8} - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{(2r+1)^2} + O\left(\frac{\log N}{N}\right). \quad (22)$$

Поскольку  $\sin \frac{x}{2} > x/\pi$  при  $0 < x < \pi$ , мы можем оценить интеграл в правой части

$$\int_0^{\pi} \frac{x}{8N} \left( \frac{\sin Nx}{\sin x/2} \right)^2 dx < \frac{\pi^2}{8N} \int_0^{\pi} \sin^2 Nx \frac{dx}{x} = \frac{\pi^2}{8N} \int_0^{N\pi} \sin^2 y \frac{dy}{y} = O\left(\frac{\log N}{N}\right).$$

Переходя в (22) к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , получаем равенство (10).

Другое рассуждение Старка, ничуть не более изящное, можно прочесть в [17].

## 13 Формула суммирования Пуассона

Эта формула утверждает, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{2\pi n i x} dx, \quad (23)$$

если функция удовлетворяет разумным условиям аналитичности (в этом случае ее доказывают комплексной техникой, напоминающей рассуждения § 5; см. [2]) или суммируемости (тогда используют преобразование Фурье; см. [6]).

Функция  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  ни тому, ни другому условию не удовлетворяет, поэтому применим формулу (23) к функции  $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ ,  $a > 0$ , а потом перейдем к пределу при  $a \rightarrow 0$ . Имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi n i x} dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi|n|a}$$

(опять вычисление по вычетам). Следовательно, сумма в правой части (23) равна

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{a} e^{-2\pi|n|a} = \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2\pi n a} = \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}.$$

Таким образом, в нашем случае формула (23) превращается в равенство

$$\frac{1}{a^2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} + \frac{2\pi}{a} \cdot \frac{e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}.$$

Что же получится, если мы теперь перейдем к пределу? Думаем, читатель, ни секунды не сомневаясь, ответит: “ $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ ”. Правильно!

## 14 Теория чисел

Следующее рассуждение — опять из [12]. Обозначим через  $r(n)$  количество целочисленных решений уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = n.$$

Хорошо известна формула для  $r(n)$  (см., например, [1, предложение 17.7.2]):

$$r(0) = 1, \quad r(n) = 8 \sum_{\substack{m|n, \\ 4 \nmid n}} m.$$

Положим  $R(N) = \sum_{n=0}^N r(n)$ . Тогда

$$R(N) = 1 + 8 \sum_{n=0}^N \sum_{\substack{m|n, \\ 4 \nmid n}} m = 1 + 8 \sum_{\substack{m \leq N, \\ 4 \nmid m}} m \left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor = 1 + 8(\theta(N) - 4\theta(N/4)), \quad (24)$$

где

$$\theta(N) = \sum_{m \leq N} \left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor = \sum_{mr \leq N} m = \sum_{r \leq N} \sum_{m=1}^{\lfloor N/r \rfloor} m = \frac{1}{2} \sum_{r \leq N} \left( \left\lfloor \frac{N}{r} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{N}{r} \right\rfloor \right) \quad (25)$$

Найдем асимптотику левой и правой частей (24) при  $N \rightarrow \infty$ . Очевидно,  $R(N)$  — это количество точек с целочисленными координатами в четырехмерном шаре радиуса  $\sqrt{N}$ , эта величина асимптотически равна объему шара, т. е.  $\pi^2 N^2/2$ . Асимптотика  $\theta(N)$  видна из формулы (25):  $\theta(N) \sim \zeta(2)N^2/2$ . Подставляя эти величины в (24), получаем, что  $\zeta(2) = \pi^2/6$ .

## Список литературы

- [1] Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М.: Мир, 1987.
- [2] Евграфов М.А. Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.
- [3] Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. М.: Наука, 1992.
- [4] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.
- [5] Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980.
- [6] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.-Л.: Гостехиздат, 1948.
- [7] Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Часть вторая. М.: Физматлит, 1963.
- [8] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб: Невский Диалект, 2002.
- [9] Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951.
- [10] Яглом А.М., Яглом И.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М.: ГИТТЛ, 1954.
- [11] Apostol T.M. A proof that Euler missed: evaluating  $\zeta(2)$ . Math. Intel. V. 60. 1983.
- [12] Chapman R. Evaluating  $\zeta(2)$ .
- [13] Elkies N. On the sums  $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(4k+1)^{-n}}$ .
- [14] Kortram R.A. Simple proofs for  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$  and  $\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2})$ . Math. Mag. V. 69. 1996. P. 122–125.
- [15] Matsuoka Y. An elementary proof of the formula  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Amer. Math. Monthly. V. 68. 1961. P. 486–487.
- [16] Russel D. Another Eulerian-type proof. Math. Mag., V. 60. 1991. P. 349.
- [17] Stark E.L. The series  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$   $s = 2, 3, 4, \dots$ , once more. Math. Mag. V. 47. 1974. P. 197–202.
- [18] newsgroup: sci.math.research