О ВЛОЖЕННЫХ КОРНЯХ

Ф.Л.Назаров, А.Н.Подкорытов

Среди задач студенческого конкурса на мат–мехе была следующая:

Пусть $p_n \geqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$x_n = \sqrt[p_1]{1 + \sqrt[p_2]{1 + \ldots + \sqrt[p_{n-1}]{1 + \sqrt[p_n]{1}}}}.$$

(n вложенных корней). Для каких последовательностей $\{p_n\}$ последовательность $\{x_n\}$ сходится? Укажите необходимое или/и достаточное условие сходимости.

Полного решения не предложил никто, хотя ответ довольно прост:

$$\exists\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \exists C > 0 : \; p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \geqslant C \ln n \quad \text{для всех} \;\; n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства необходимости этого условия воспользуемся неравенством (проверьте его самостоятельно)

$$\sqrt[p]{x + \sqrt[q]{y}} \geqslant \sqrt[pq]{x + y} \qquad \text{для всех} \;\; x, y \geqslant 0 \;\; \text{и} \;\; p, q \geqslant 1.$$

Последовательно применяя его, получаем, что

$$n^{\frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}} \leqslant x_n.$$

Поэтому из сходимости последовательности $\{x_n\}$ вытекает неравенство

$$\ln n \leqslant \operatorname{const} p_1 \cdot p_2 \cdots p_n.$$

Докажем теперь, что неравенство $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \geqslant C \ln n$ достаточно для ограниченности $\{x_n\}$ (так как последовательность $\{x_n\}$ возрастает, то отсюда вытекает и её сходимость). Положим $A = e^{2/C}$. Тогда $A^{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n} \geqslant A^{C \ln n} = n^2$. Следовательно,

$$\frac{x_n}{A} = \sqrt[p_1]{\frac{1}{A^{p_1}} + \sqrt[p_2]{\frac{1}{A^{p_1 p_2}} + \ldots + \sqrt[p_n]{\frac{1}{A^{p_1 \cdots p_n}}}}} \leqslant \sqrt[p_1]{1 + \sqrt[p_2]{\frac{1}{4} + \sqrt[p_3]{\frac{1}{9} + \ldots + \sqrt[p_n]{\frac{1}{n^2}}}}}.$$

Проверим, что правая часть этого неравенства не превосходит трёх, то есть $x_n \leqslant 3A$. Так как $p_1 \geqslant 1$, то достаточно проверить, что

$$\sqrt[p_2]{\frac{1}{4} + \sqrt[p_3]{\frac{1}{9} + \ldots + \sqrt[p_n]{\frac{1}{n^2}}}} \leqslant 2.$$

Если левая часть этого неравенства меньше 1, то нечего доказывать. В противном случае достаточно (так как $p_2 \geqslant 1$) проверить, что

$$\sqrt[p_3]{\frac{1}{9} + \sqrt[p_4]{\frac{1}{16} + \ldots + \sqrt[p_n]{\frac{1}{n^2}}}} \leqslant 2 - \frac{1}{4}.$$

Если левая часть меньше 1, то нечего доказывать, а в противном случае проверяем неравенство

$$\sqrt[p_4]{\frac{1}{16} + \ldots + \sqrt[p_n]{\frac{1}{n^2}}} \leqslant 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9}.$$

Повторяя эти рассуждения, мы когда-то получим левую часть меньшую 1 (например, “сняв” все корни), в то время как правая часть всегда больше, чем

$$2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \ldots - \frac{1}{n^2} > 2 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} > 2 - \sum_{k=2}^{\infty} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \Big) = 2 - 1 = 1.$$