Задача о биллиардном многоугольнике

А. Назаров

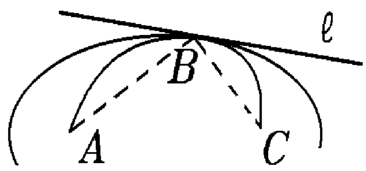
В математике нередко встречаются ситуации, когда, ища решение одной задачи, находишь одновременно решение другой, никак с исходной не связанной. С одной такой несложной, но малоизвестной задачей я хочу познакомить читателей "ФД" (взято из книги Дж.Д.Биркгофа "Динамические системы", ГТИ, 1941).

Пусть M – овал (гладкая выпуклая фигура). Доказать, что среди биллиардных траекторий в M найдется многоугольник с любым заданным числом сторон.

Под биллиардной траекторией здесь понимается ломаная, вписанная в M и удовлетворяющая в каждой вершине условию "Угол падения равен углу отражения".

Доказательство. Рассмотрим множество всех простых вписанных в M n-угольников (включая вырожденные, т.е. такие, у которых некоторые соседние вершины совпадают). Легко убедиться, что это множество компактно. Поскольку периметр многоугольника непрерывно зависит от его вершин, то он достигает на этом множестве наибольшего значения. Из неравенства треугольника очевидно, что многоугольник наибольшего периметра будет невырожденным. А теперь покажем, что он является биллиардной траекторией!

Пусть A, B, C – три соседние вершины многоугольника. Проведем через точку B эллипс с фокусами в точках A и C (см. рис.). Как известно, эллипс есть множество точек X, для которых $|AX| + |XC| = |AB| + |BC|$. Поэтому, если бы в окрестности точки B граница нашего овала выходила за пределы эллипса, то, сдвинув вершину B, мы могли бы увеличить $|AB|+|BC|$, а следовательно, и периметр многоугольника, что невозможно. Таким образом, в окрестности точки B наш овал вписан в эллипс и, в силу гладкости, имеет общую с эллипсом касательную (обозначим ее ℓ).



Но, согласно оптическому свойству эллипса, луч света (и биллиардный шар), выйдя из одного фокуса и отразившись от любой точки эллипса, попадает в другой фокус, т.е. $\angle(AB, \ell) = \angle(BC, \ell)$. Таким образом, AB и BC – соседние отрезки одной биллиардной траектории в M. Поскольку вершина B произвольна, то весь наш многоугольник – биллиардная траектория в M, ч.т.д.

Я весьма признателен профессору В.Г.Осмоловскому, обратившему мое внимание на эту эффектную задачу.