О НУЛЯХ ПРОИЗВОДНОЙ

Б.М.Макаров, А.Н.Подкорытов, А.А.Флоринский

Может ли производная всюду дифференцируемой и не постоянной на интервале функции обратиться в нуль

а) во всех иррациональных точках этого интервала?

б) во всех рациональных точках этого интервала?

Изменится ли ответ, если дополнительно потребовать ограниченности производной?

Разумеется, для гладких функций это невозможно — из обращения *непрерывной* производной в нуль на плотном множестве следует, что она всюду равна нулю и, следовательно, функция постоянна.

При внешней схожести поставленные вопросы имеют разные ответы. Более того, первый из них совсем простой, а во втором случае не так-то легко догадаться, каков ответ, и для его обоснования нужны довольно аккуратные рассуждения.

Итак, пусть не постоянная функция f дифференцируема на интервале I. Если $f'(x) = 0$ для любой точки $x \in I \setminus \mathbb{Q}$, то

$$f'(I) = f'(I \setminus \mathbb{Q}) \cup f'(I \cap \mathbb{Q}) = \{0\} \cup f'(I \cap \mathbb{Q}).$$

Пересечение $I \cap \mathbb{Q}$ счётно. Поэтому множество $f'(I \cap \mathbb{Q})$, а следовательно, и $f'(I)$ не более чем счётно. В то же время по теореме Дарбу (см. Г.М.Фихтенгольц *Курс дифференциального и интегрального исчисления* т.I, п.110) производная (даже разрывная) обладает свойством Коши — она любой промежуток переводит в промежуток. В частности, $f'(I)$ — промежуток. Так как всякий невырожденный промежуток несчётен, то $f'(I)$ состоит лишь из одной точки: $f'(I) = \{0\}$. Таким образом, $f'(x) \equiv 0$ и, следовательно, f постоянна на I, а это противоречит условию.

Перейдём теперь к основной теме заметки — ответу на второй вопрос. Он утвердительный — такие функции существуют. При этом можно добиться и ограниченности производной. Построение проведём в два этапа. Сначала решим более простую задачу, показав, что производная может обратиться в нуль на *некотором* счётном плотном подмножестве интервала I (вместо требуемого множества $I \cap \mathbb{Q}$). На втором шаге покажем, что это верно и для *любого* счётного плотного подмножества.

1^0. Достаточно построить непрерывную строго возрастающую на $(0,1)$ функцию g, у которой производная существует и положительна в каждой точке, причём $g'(x) = +\infty$ во всех рациональных точках. Тогда функция f, обратная к g, будет искомой — она задана на интервале $I = g((0,1))$, а её производная обращается в нуль на плотном в I счётном множестве $g((0,1) \cap \mathbb{Q})$.

Пусть $\{r_n\}$ — какая-то нумерация множества $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ и

$$g(x) = \sum_n \frac{1}{n^2} \sqrt[3]{x - r_n}, \qquad x \in (0,1).$$

Все слагаемые — непрерывные строго возрастающие функции. По признаку Вейерштрасса ряд сходится равномерно на $(0,1)$ (мажорантный ряд — $\sum \frac{1}{n^2}$). Поэтому g —

непрерывная строго возрастающая функция. Изучим её производную. Для этого рассмотрим множество E, на котором сходится ряд, полученный формальным почленным дифференцированием:

$$E = \Big\{ x \in (0,1) \,\Big|\, \sum_n \frac{1}{n^2}(x - r_n)^{-2/3} < \infty \Big\}.$$

Очевидно, что $r_n \notin E$. Докажем теперь, что функция g дифференцируема на E, а вне этого множества $g' = +\infty$. В самом деле, при $x \in E$ и $h \neq 0$,

$$(*) \qquad \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \sum_n \frac{1}{n^2} \frac{\sqrt[3]{x - r_n + h} - \sqrt[3]{x - r_n}}{h}.$$

Из неравенства $u^2 + uv + v^2 \geqslant \frac{1}{2}v^2$ при $u = \sqrt[3]{x - r_n + h}$ и $v = \sqrt[3]{x - r_n}$ следует, что для всех h

$$\frac{\sqrt[3]{x-r_n+h} - \sqrt[3]{x-r_n}}{h} = \frac{1}{u^2+uv+v^2} \leqslant \frac{2}{v^2} = \frac{2}{(x-r_n)^{2/3}}.$$

Так как $\sum \frac{1}{n^2}(x - r_n)^{-2/3} < \infty$ (поскольку $x \in E$), то ряд в правой части равенства $(*)$ сходится равномерно относительно h. Поэтому в нём допустим почленный переход к пределу при $h \to 0$, что обеспечивает существование конечной положительной производной $g'(x)$.

Проверим, что $g'(x) = +\infty$, если $x \notin E$, $x \neq r_n$ (равенство $g'(r_n) = +\infty$ очевидно). Из определения множества E следует, что для сколь угодно большого числа M можно подобрать такой номер N, что

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}(x - r_n)^{-2/3} > M.$$

Так как при $h \neq 0$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \frac{\sqrt[3]{x - r_n + h} - \sqrt[3]{x - r_n}}{h},$$

то для достаточно малых h мы имеем $\frac{1}{h}(g(x+h) - g(x)) > M$. Это по определению означает, что

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} +\infty,$$

то есть производная функции g в точке x существует и равна $+\infty$.

Полезно иметь ввиду (хотя формально это и не используется в решении), что множество E всюду плотно на $(0,1)$. Действительно, в противном случае $g'(x) \equiv +\infty$ на некотором непустом интервале, а это невозможно (докажите это).

Функция f, обратная к g, всюду дифференцируема, и её производная ограничена, поскольку

$$g'(x) \geqslant \big(\sqrt[3]{x - r_1}\big)' > \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad x \in (0,1).$$

Рассмотренный нами пример был предложен Помпейю в 1906 г. В книге Bruckner A.M. *Differentiation of real functions*, Berlin: Springer, 1978, можно найти интересное обсуждение этого и других примеров функций с необычными свойствами.

2⁰. Используя функцию с производной, обращающейся в нуль на некотором счётном плотном множестве, построим функцию, у которой производная равна нулю на заданном счётном плотном множестве (например, $I \cap \mathbb{Q}$). Идея такого построения крайне проста — надо сделать замену переменной, переводящую одно из этих множеств в другое. Реализация этой идеи затрудняется ограничением — такая замена должна быть дифференцируемой. Итак, нам достаточно доказать следующее

Утверждение. *Пусть $X, Y \subset (0,1)$ — счётные всюду плотные в $[0,1]$ множества. Тогда существует диффеоморфизм отрезка $[0,1]$ (отображение на себя непрерывно дифференцируемое вместе с обратным отображением), переводящий X на Y.*

Построим возрастающий диффеоморфизм отрезка $[0,1]$, переводящий X на Y, то есть функцию f, удовлетворяющую условиям

1) $f \in C^1([0,1])$, 2) $\min\limits_{[0,1]} f' > 0$, 3) $f(0)=0,\ f(1)=1$,

для которой $f(X)=Y$.

Нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма. *Пусть $\varepsilon > 0$, f — функция, удовлетворяющая условиям 1)–3), Y — плотное подмножество интервала $(0,1)$, E — конечное подмножество $(0,1)$, $x^* \in (0,1) \setminus E$. Тогда существует такая функция f_ε, удовлетворяющая условиям 1)–3), что*
а) $|f_\varepsilon'(x) - f'(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [0,1]$;
б) $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для всех $x \in E$;
в) $f_\varepsilon(x^*) \in Y$.

Из условия а) следует (так как $f(0) = f_\varepsilon(0) = 0$), что

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \text{для всех} \ \ x \in [0,1].$$

Таким образом, любой возрастающий диффеоморфизм отрезка $[0,1]$ можно за счёт сколь угодно малого изменения так «подправить», что новый диффеоморфизм будет переводить заданную точку в некоторую точку заданного плотного множества, сохраняя при этом значения исходного диффеоморфизма на заданном конечном множестве.

Доказывая лемму, будем искать функцию $f_\varepsilon(x)$ в виде

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \delta P_E(x)\,,$$

где $\delta > 0$, P_E — полином, обращающийся в нуль на множестве E и в точках 0 и 1, но не равный нулю в точке x^*. Очевидно, функция f_ε удовлетворяет условиям 1), 3) и б). Условия а) и 2) выполнены для всех достаточно малых δ. Легко видеть, что при этом можно добиться и выполнения условия в). Отметим, что если $f(x^*) \in Y$, то никакого исправления функции f не требуется. В этом случае $f_\varepsilon = f$.

Аналогично устанавливается и такая модификация этой леммы.

Пусть $\varepsilon > 0$, f — функция, удовлетворяющая условиям 1)–3), X — плотное подмножество интервала $(0,1)$, E — конечное подмножество $(0,1)$, $y^* \in (0,1) \setminus f(E)$. Тогда существует такая функция f_ε, удовлетворяющая условиям 1)–3), что
а) $|f'_\varepsilon(x) - f'(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [0,1]$;
б) $f_\varepsilon(x) = f(x)$ для всех $x \in E$;
в) $f_\varepsilon^{-1}(y^*) \in X$.

Требуемый диффеоморфизм f будем искать в виде $f = \lim f_n$, где $\{f_n\}$ — последовательность полиномов, удовлетворяющих условиям 1)–3), которую мы построим по индукции. Для этого занумеруем множества X и Y: $X = \{x_n\}$, $Y = \{y_n\}$, и положим $\varepsilon_n = 3^{-n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Пусть $f_0(x) = x$ для всех $x \in [0,1]$. Каждый полином f_{n+1} получается ε-«исправлением» (при $\varepsilon = \varepsilon_{n+1}$) полинома f_n с помощью леммы, если $n = 2k$, или с помощью её модификации, если $n = 2k+1$. При этом $x^* = x_{k+1}$, соответственно $y^* = y_{k+1}$, и

$$E = \begin{cases} \{x_1, \dots, x_k\} \cup \{f^{-1}(y_1), \dots, f^{-1}(y_k)\}, & \text{если } n = 2k, \\ \{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}\} \cup \{f^{-1}(y_1), \dots, f^{-1}(y_k)\}, & \text{если } n = 2k+1 \end{cases}$$

($E = \varnothing$ при $n = 0$ и $E = \{x_1\}$ при $n = 1$).

Так как $f_n(0) = 0$ и $\max\limits_{[0,1]} |f'_{n+1} - f'_n| < 3^{-(n+1)}$, то предельная функция $f = \lim f_n$ существует и непрерывно дифференцируема на $[0,1]$. Кроме того,

$$f'(x) = f'_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \big(f'_n(x) - f'_{n-1}(x)\big) \geqslant 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\,.$$

Поэтому f удовлетворяет условиям 1) и 2), а так как $f_n(1) = 1$ и $f_n(0) = 0$ для всех n, то выполнено и условие 3).

По построению $f_n(x_k) = f_{n+1}(x_k) = f_{n+2}(x_k) = \dots$ — элемент множества Y, если $n \geqslant 2k$. Поэтому $f(x_k) \in Y$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то есть $f(X) \subset Y$. Аналогично, $f_n^{-1}(y_k) = f_{n+1}^{-1}(y_k) = f_{n+2}^{-1}(y_k) = \dots$, если $n \geqslant 2k$. Следовательно, $f^{-1}(y_k) \in X$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то есть $f^{-1}(Y) \subset X$. Итак, $f(X) = Y$.

Отметим дополнительно, что на каждом шаге при построении многочлена f_n мы за счёт выбора малого параметра δ можем добиться того, что величина

$$\max_{|z| \leqslant n} |f_n(z) - f_{n-1}(z)|$$

будет произвольно мала. Это позволяет получить последовательность полиномов, равномерно сходящуюся на каждом ограниченном подмножестве комплексной плоскости. Тогда из теоремы Вейерштрасса о пределе аналитических функций вытекает, что построенный диффеоморфизм является сужением целой функции.

Итак, существуют такие непостоянные и дифференцируемые на интервале I функции f, что множество $\mathcal{E} = \{x \mid f'(x) = 0\}$ содержит все рациональные точки этого интервала. Возникает естественный вопрос: можно ли добиться равенства $\mathcal{E} = I \cap \mathbb{Q}$? Оказывается, нет. Дело в том, что из плотности $\mathcal{E}$ в I следует несчётность $\mathcal{E}$.

Действительно, для любой последовательности $\{x_n\} \subset S$ можно, пользуясь плотностью S, построить такую последовательность вложенных промежутков $\{[a_n, b_n]\}$, что

$$x_n \notin [a_n, b_n] \quad \text{и} \quad \frac{|f(b_n) - f(a_n)|}{b_n - a_n} < \frac{1}{n} \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}\,.$$

Пусть $c \in \bigcap_n [a_n, b_n]$. Так как f дифференцируема в точке c и $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, то

$$f'(c) = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = 0\,.$$

Таким образом, $c \in S$. В то же время $c \neq x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, занумеровать множество S, если оно плотно в I, невозможно.

В дополнение к сказанному предлагаем две задачи.

1) *Докажите, что если множество нулей всюду дифференцируемой функции плотно в некотором невырожденном интервале, то оно имеет мощность континуума.*

2) *Существует ли всюду дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, не монотонная ни на каком непустом интервале?*