Теорема Морса – Сарда

Б.М.Макаров, А.Н.Подкорытов

Теорема, о которой мы хотим рассказать, связана с вопросом о массивности f-образа множества, образованного точками, в которых градиент гладкой функции f равен нулю. Прежде чем обсуждать этот вопрос по существу введём необходимые определения.

Всюду далее $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Символ $C^r(\mathcal{O})$ обозначает класс r раз непрерывно дифференцируемых функций (r-гладких на $\mathcal{O}$ функций), а $C^{r,\alpha}(\mathcal{O})$ — класс, состоящий из тех r-гладких функций, у которых производные порядка r удовлетворяют условию Липшица с показателем α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ на любом компактном подмножестве $\mathcal{O}$. Будем считать, что $C^{r,0}(\mathcal{O}) \equiv C^r(\mathcal{O})$.

Определение. Пусть $f \in C^1(\mathcal{O})$. Точка $x \in \mathcal{O}$ называется *критической точкой* функции f, если $\operatorname{grad} f(x) = 0$, а её образ, т.е. точка $f(x)$, — *критическим значением* функции f. Множества критических точек и критических значений функции f будем обозначать символами $\mathcal{N}_f$ и C_f соответственно.

Вопрос о том, каково множество критических значений функции, интересен по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, он возникает при изучении множеств уровня функции f, т.е. множеств вида

$$M_t = \{x \in \mathcal{O} \mid f(x) = t\}.$$

При каких t можно гарантировать, что это множество окажется гладкой поверхностью? Как следует из теоремы о неявной функции, если $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ на M_t, т.е. если $t \notin C_f$, то локально M_t представляет собой график гладкой функции и, следовательно, является гладким многообразием. Если C_f имеет нулевую меру, то почти все множества уровня функции f представляют собой гладкие поверхности (к каковым, во избежание оговорок, причисляется и пустое множество).

Ответ на поставленный вопрос даёт теорема, согласно которой множество критических значений имеет нулевую меру, если функция “достаточно гладкая”. Степень гладкости уточнялась на протяжении довольно долгого времени. Сейчас известно, что для функции m переменных достаточно потребовать, что $f \in C^m$ или даже что $f \in C^{m-1,1}$. Этот результат точен: у функции класса C^{m-1} множество критических значений может иметь положительную меру, даже если она входит в любой класс $C^{m-1,\alpha}$ при $0 \leqslant \alpha < 1$.

Для функций класса C^m сформулированная теорема была доказана Э.Морсом в 1939 году. Впоследствии она была обобщена на произвольные отображения А.Сардом (1942) и неоднократно переоткрывалась и дополнялась. В настоящее время на теоремы этого рода, относящиеся как к функциям, так и к отображениям$^{*)}$, обычно ссылаются как на теорему Сарда.

Второй вопрос естественно связан с первым. Предварительным образом его можно поставить так: будет ли множество C_f иметь нулевую меру, если множество $\mathcal{N}_f$ связно? В этом случае C_f есть промежуток, и нулевую меру он может иметь, лишь если C_f вырождается в точку, говоря иными словами, только если функция f постоянна на $\mathcal{N}_f$.

Очевидно, f постоянна на всякой содержащейся в $\mathcal{N}_f$ гладкой дуге, так что если любые две точки из $\mathcal{N}_f$ можно соединить такой дугой, то f постоянна на $\mathcal{N}_f$, т.е. имеется лишь одно критическое значение (этот вывод сохраняется и в более общей ситуации, когда любые две точки из $\mathcal{N}_f$ можно соединить спрямляемым путём). Таким образом, утвердительный ответ на наш вопрос представляется вполне вероятным. Ведь в силу связности множества $\mathcal{N}_f$ его образ не вырождается в точку, лишь если гладкая функция f не постоянна на связном множестве $\mathcal{N}_f$, на котором все её частные производные равны нулю! Однако, в общем случае ответ на поставленный вопрос всё-таки оказывается отрицательным — связность множества $\mathcal{N}_f$ не гарантирует постоянства на нём функции f. Соответствующий пример был построен американским математиком Х.Уитни в 1935 году.

В связи со сказанным наш второй вопрос следует уточнить и сформулировать следующим образом:

какие дополнительные ограничения следует наложить на множество критических точек с тем, чтобы множество критических значений имело нулевую меру (и, в частности, сводилось к одной точке в случае, когда $\mathcal{N}_f$ связно)?

Один из вариантов ответа на этот вопрос даёт теорема, доказанная в 1986 году А.Нортоном. Мы приведём её лишь частично, и для этого нам понадобится понятие хаусдорфовой размерности.

Определение. Хаусдорфовой размерностью ограниченного множества A, содержащегося в пространстве $\mathbb{R}^m$, называется точная нижняя граница чисел $p > 0$, удовлетворяющих условию: *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое*

$^{*)}$Результаты, относящиеся к отображениям, мы обсудим в следующем сообщении.

разбиение множества A: $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, *что*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(A_k))^p < \varepsilon^p.$$

Упражнение. Проверьте, что хаусдорфовы размерности не пустого открытого подмножества в $\mathbb{R}^m$, спрямляемой жордановой дуги и канторова множества равны m, 1 и $\log_3 2$ соответственно.

Из теоремы Нортона, в частности, следует, что

Если $f \in C^{r,\alpha}(\mathcal{O})$ и A — подмножество в $\mathcal{N}_f$, хаусдорфова размерность которого меньше $r + \alpha$, то его образ имеет нулевую меру. Если A — спрямляемая дуга, то это справедливо также при $r = 1$, $\alpha = 0$, т.е. для любых гладких функций.

Как указано без доказательства в работе Нортона, этот результат точен в следующим смысле: для всякого $\alpha \in (0, 1)$ существует связное компактное множество хаусдорфовой размерности $1+\alpha$, состоящее из критических точек функции f класса $C^{1,\alpha}$, на котором она не постоянна.

———————

Для доказательства теоремы Морса – Сарда нам потребуются некоторые вспомогательные понятия и связанные с ними результаты. Далее λ_m — мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ (в одномерном случае будем писать кратко: λ), $B(x, r)$ — открытый шар радиуса r с центром в точке x.

Лемма 1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ и $f: X \to \mathbb{R}$. Если в каждой не изолированной точке x из X выполняется соотношение*

$$f(y) - f(x) = o(\|y - x\|^m) \quad \text{при} \;\; y \to x, \quad y \in X, \tag{1}$$

то $\lambda(f(X)) = 0$.

Доказательство опирается на такое полезное утверждение о покрытиях шарами:

если семейство открытых шаров $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$, радиусы которых ограничены, образует покрытие ограниченного множества E, $E \subset \mathbb{R}^m$, то из этих шаров можно выделить такую (возможно, конечную) последовательность попарно непересекающихся шаров B_{α_j}, что шары $B^*_{\alpha_j}$ с теми же центрами и увеличенными в 5 раз радиусами образуют покрытие множества E: $E \subset \bigcup_j B^*_{\alpha_j}$.

В этом можно убедиться, если последовательно выбирать шары, придерживаясь правила: на каждом шаге очередной шар выбирается "достаточно большим" из множества шаров, не пересекающихся с уже выбранными, точнее, он берётся таким, что его радиус не меньше половины радиуса любого из них.

Доказательство леммы. Не умаляя общности будем считать множество X ограниченным. Пусть ε — произвольное положительное число. По условию для любой точки x из X существует такой радиус $r = r(x) < 1$, что множество $f\big(X \cap B(x, 5r)\big)$ содержится в интервале I длины $\varepsilon\, r^m$. В силу приведённого утверждения о покрытиях из совокупности шаров $B(x, r)$, $x \in X$, можно выделить такую последовательность попарно непересекающихся шаров $B_j = B(x_j, r_j)$, что шары $B_j^* = B(x_j, 5r_j)$ покрывают множество X. Тогда $X = \bigcup_j X \cap B_j^*$, причём каждое множество $f(X \cap B_j^*)$ содержится в интервале I_j длины εr_j^m. Поэтому $\lambda(I_j) \leqslant C\varepsilon\lambda_m(B_j)$, откуда следует, что $f(X)$ покрывается интервалами I_j, суммарная длина которых мала. Действительно, так как шары B_j попарно не пересекаются и лежат в ограниченном множестве $\widetilde{X} = \bigcup_{x\in X} B(x, 1)$, то

$$\sum\nolimits_j \lambda(I_j) \leqslant C\varepsilon \sum\nolimits_j \lambda_m\big(B_j\big) \leqslant C\varepsilon\lambda_m(\widetilde{X}) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Итак, $f(X)$ содержится в множестве $\bigcup_j I_j$ сколь угодно малой меры, что равносильно утверждению леммы. ►

Говоря далее о функции, гладкой на каком-то множестве, будем, как обычно, считать её определённой и непрерывно дифференцируемой в некоторой его окрестности.

Лемма 2. *Пусть M — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$ и f — гладкая на M функция. Если в точке $x \in M$ при некотором $r \geqslant 1$ выполняется соотношение*

$$\|\mathrm{grad}\, f(y)\| = o(\|y - x\|^{r-1}) \ \textit{при} \ \ y \to x, \ y \in M, \tag{2}$$

то

$$f(y) - f(x) = o(\|y - x\|^{r}) \ \textit{при} \ \ y \to x, \ y \in M. \tag{3}$$

Для $r = 1$ условие (2) означает просто, что $\mathrm{grad}\, f(x) = 0$.

Доказательство следует из неравенства Лагранжа, применённого к функции $\widetilde{f} = f \circ \Phi$, где Φ – параметризация многообразия M около точки x.

Переходя к основной, более трудной части наших рассуждений, заметим, что равенство $\lambda\big(C_f\big) = 0$ вытекало бы из леммы 1, если бы соотношение (1) выполнялось в каждой точке множества $X = \mathcal{N}_f$. Но оно, очевидно, может и нарушаться вдоль каких-то направлений.

В то же время для применимости леммы 1 достаточно, чтобы соотношение (1) было справедливо только на частях множества $\mathcal{N}_f$, образующих его счётное разбиение. Чтобы иметь возможность применять лемму 2, удобно считать их погруженными в какие-то гладкие многообразия (произвольных размерностей). Основная трудность заключается в том, чтобы убедиться в возможности такими частями исчерпать множество $\mathcal{N}_f$ (с точностью до не более чем счётного остатка). Описанный подход, как и способ преодоления указанной трудности, принадлежит Э.Морсу. Для реализации его идеи нам будет удобно использовать следующее

Определение. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^m$. Назовём *r-представлением* множества A равенство

$$A = e \cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots ,$$

где e не более чем счётно, а каждое множество E_j (набор этих множеств может быть конечным и даже пустым) содержится в таком гладком многообразии $M_j \subset \mathbb{R}^m$, что всякая равная нулю на A функция f класса $C^r(\mathcal{O})$ в любой точке $x \in E_j$ удовлетворяет соотношению

$$f(y) = o(\|y-x\|^r) \;\; \text{при} \;\; y \to x, \; y \in M_j \cap \mathcal{O}. \tag{3$'$}$$

Размерности многообразий M_j могут быть произвольными натуральными числами между 1 и m.

Под 0-представлением A будем понимать равенство $A = e \cup E_1$, где e — совокупность изолированных точек множества A и $E_1 = A \setminus e \subset M_1 = \mathbb{R}^m$.

Существование r-представления множества A означает (если пренебречь не более чем счётным подмножеством), что всякая r-гладкая функция равная на нём нулю при приближении к точкам из A по “достаточно многим” направлениям ведёт себя так, как будто её r-й полином Тейлора сводится к постоянной. Для функции одной переменной и множества A, не содержащего изолированных точек, это так и есть: если функция класса C^r постоянна на множестве без изолированных точек, то не только её первая производная, но и производные всех порядков до r-го включительно равны нулю на A, так что r-й полином Тейлора для f равен нулю во всех точках из A.

Замечание. Если каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots$ имеет r-представление, то их объединение также имеет r-представление.

Лемма 3. *При любых натуральных m и r каждое множество $A \subset \mathbb{R}^m$ имеет r-представление.*

Доказательство проведём индукцией по параметру $p = m+r$. Случай $m = 1$ по существу разобран перед замечанием: $A = e \cup E_1$, где e образовано изолированными точками множества A, $E_1 = A \setminus e \subset M_1 = \mathbb{R}$. Это не только обеспечивает базу индукции при $p = 2$, но и позволяет считать далее $m \geqslant 2$.

Пусть $p = m + r \geqslant 3$. Докажем утверждение леммы для пары m, r, предполагая, что оно верно для пар $m-1, r$ и $m, r-1$. Для этого разобьём точки из A на два класса, которые рассмотрим по отдельности. Точку из A назовём r-правильной, если у неё существует такая окрестность U, что пересечение $A \cap U$ содержится в некоторой r-гладкой простой поверхности M (т.е. в многообразии размерности $m-1$). Совокупность всех r-правильных точек обозначим P и положим $Q = A \setminus P$. Очевидно, изолированные точки множества A принадлежат P.

Сначала убедимся, что множество P имеет r-представление. Предварительно докажем это "в малом": у каждой точки из P есть такая окрестность U, что пересечение $P \cap U$ имеет r-представление. Пусть U, M — из определения r-правильной точки, Φ ($\Phi \in C^r$) — параметризация поверхности M и пусть $H = \Phi^{-1}(P \cap U)$ ($H \subset \mathbb{R}^{m-1}$). По индукционному предположению существует r-представление $e \cup \bigcup_j E_j$ множества H. Пусть M_j — многообразие, соответствующее множеству E_j. Проверим, что $\Phi(e) \cup \bigcup_j \Phi(E_j)$ — r-представление пересечения $P \cap U$. В самом деле, пусть $x \in \Phi(E_j)$, $x = \Phi(s)$, где $s \in E_j$. Если функция φ ($\varphi \in C^r$) равна нулю на $P \cap U$, то функция $\psi = \varphi \circ \Phi$ равна нулю на H. Следовательно,

$$\psi(t) = o(\|t - s\|^r) \ \text{ при } t \to s, \ t \in M_j.$$

Так как не умаляя общности мы можем считать, что отображения Φ и Φ^{-1} удовлетворяют условию Липшица, последнее соотношение равносильно тому, что

$$\varphi(y) = o(\|y - x\|^r) \ \text{ при } \ y \to x \in \Phi(E_j), \ y \in \Phi(M_j).$$

Это и доказывает, что $\Phi(e)\cup\bigcup_j \Phi(E_j)$ — r-представление пересечения $P\cap U$. Поскольку согласно теореме Линделёфа множество P можно покрыть счётным семейством окрестностей подобных U, мы получаем благодаря замечанию к определению, что и всё P имеет r-представление.

Покажем теперь, что дополнив его $(r-1)$-представлением $\widetilde{e}\cup\bigcup_j \widetilde{E}_j$ множества Q (оно существует по индукционному предположению), мы получим требуемое r-представление множества A. Пусть $\widetilde{M}_j$ — соответствующее множеству $\widetilde{E}_j$ многообразие. Осталось проверить, что всякая функция f класса $C^r(\mathcal{O})$, $\mathcal{O}\supset A$, равная нулю на A, удовлетворяет в каждой точке $x\in\widetilde{E}_j\subset Q$ соотношению: $f(y)=o\big(\|y-x\|^r\big)$ при $y\to x$, $y\in\widetilde{M}_j\cap\mathcal{O}$. Для этого заметим, что $\operatorname{grad} f(x)=0$ (в противном случае по теореме о неявной функции множество постоянства f локально совпадает с графиком r-гладкой функции и поэтому $x\in P$, что невозможно).

Согласно определению $(r-1)$-представления мы имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(y),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_m}(y)=o(\|y-x\|^{r-1})\ \text{ при }\ y\to x,\ y\in\widetilde{M}_j\cap\mathcal{O},$$

т.е. выполнено условие (2) леммы 2. Из неё следует нужное соотношение $f(y)=o(\|y-x\|^r)$ при $y\to x$, $y\in\widetilde{M}_j\cap\mathcal{O}$, что завершает индукционный переход. ▶

———

Теперь мы можем доказать интересующий нас результат.

Теорема. *Если* $f\in C^m(\mathcal{O})$, *то* $\lambda\big(C_f\big)=0$.

Доказательство. Пусть $e\cup\bigcup_j E_j$ — $(m-1)$-представление множества $\mathcal{N}_f$, причём каждое множество E_j содержится в некотором многообразии M_j. Поскольку e не более чем счётно, достаточно проверить равенства $\lambda\big(f(E_j)\big)=0$. Так как каждая частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ равна нулю на $\mathcal{N}_f$, то по определению $(m-1)$-представления для всякой точки x из E_j мы имеем: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)=o(\|x-y\|^{m-1})$ при $y\to x$, $y\in M_j$, т.е. выполнено условие (2) леммы 2: $\operatorname{grad} f(y)=o(\|x-y\|^{m-1})$ при $y\to x$, $y\in M_j$. Следовательно, $f(y)-f(x)=o\big(\|y-x\|^m\big)$ при $y\to x$, $y\in M_j$. Поэтому применяя лемму 1 к множеству $X=E_j$, мы получаем искомый результат: $\lambda\big(f(E_j)\big)=0$. ▶