Число $\sqrt[N]{M}$: Хаос и Гаусс

В.А.Малышев

Пусть $a_0, a_1, \dots$ - последовательность элементов, а $r_0, r_1, \dots$ - последовательность остатков непрерывной дроби числа $\sqrt[N]{M}$. Обнаружено, что при $N \geq 3$ элементы могут быть вычислены по рекуррентным целочисленным соотношениям, а остатки приводят к последовательности

$$\xi_n = \log_2(1 + r_n)$$

с равномерным распределением на отрезке $[0, 1]$.

Введение

У Хинчина [1] читаем: "Любопытно отметить, что до настоящего времени неизвестно разложение в цепную дробь ни одного алгебраического числа степени выше 2. Неизвестно, может ли такое разложение иметь ограниченные элементы; неизвестно, может ли оно иметь, наоборот, неограниченный ряд элементов и т.д." Первое издание "Цепных дробей" Хинчина вышло в 1935 году. В предисловии к четвертому изданию 1978 года Гнеденко про решение этих задач ничего не сообщает.

1. Непрерывные дроби

Число $x > 0$ в непрерывную дробь раскладывается так

$$x \;=\; a_0 + r_0 \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + r_1} \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + r_2}} \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + r_3}}} \;=\; \cdots$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0 &= [x] \\ r_0 &= x - [x] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} a_n &= [1/r_{n-1}]\,, \\ r_n &= 1/r_{n-1} - [1/r_{n-1}]\,. \end{aligned}$$

при $n = 1, 2 \dots$. Вещественные числа $r_0, r_1, \dots$ называются остатками, а целые числа $a_0, a_1, \dots$ называются элементами непрерываной дроби числа x.

Непрерывные дроби рациональных чисел конечны

$$\frac{3}{5} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

Непрерывные дроби алгебраических чисел второй степени периодические

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

Непрерывные дроби алгебраических чисел степени выше 2 хаотические

$$\sqrt[3]{2} = 1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cdots}}}}}}}}}}}$$

2. Теорема Гаусса

Пусть x является случайной величиной с равномерным распределением на отрезке $[0,1]$. Тогда для каждого $n = 0,1,2,\dots$ остаток r_n также является случайной величиной на отрезке $[0,1]$. Обозначим через $f_n(t)$ плотность распределения случайной величины r_n. Поскольку $r_0 = x$, имеем $f_0(t) = 1$. Далее имеем

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(t+k)^2} f_{n-1}\left(\frac{1}{t+k}\right).$$

Из соотношения

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(t+k)^2} \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{t+k}}$$

и нормировки

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1$$

Гаусс усмотрел, что

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \frac{1}{\ln 2}\,\frac{1}{1+t}.$$

Поэтому при большом n случайная величина

$$\xi_n = \log_2(1+r_n)$$

близка к равномерному распределению на отрезке $[0,1]$. Это приводит к весьма правдоподобной гипотезе о поведении остатков непрерывной дроби числа $\sqrt[N]{M}$.

3. Остатки непрерывной дроби числа $\sqrt[N]{M}$

Нам потребуется понятие плотности последовательности. Пусть на отрезке $[0,1]$ задана последовательность $x_1, x_2, \ldots$. Допустим, что для любого $0 \le t \le 1$ существует предел

$$F(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n(t)}{n},$$

где через $m_n(t)$ обозначено число таких номеров $1 \le k \le n$, что $0 \le x_k \le t$. Функция

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t)$$

называется плотностью последовательности $x_1, x_2, \ldots$.

Много полезной информации о плотностях последовательностей имеется в "Задачах и теоремах из анализа" Полиа и Сёге [2]. Например, там доказано, что для иррационального x последовательность

$$x_n = nx - [nx]$$

имеет равномерное распределение с плотностью $f(t) = 1$.

Разложим иррациональное алгебраическое число $\sqrt[N]{M}$ в непрерывную дробь

$$\sqrt[N]{M} \;=\; a_0 + r_0 \;=\; a_0 + \frac{1}{a_1 + r_1} \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + r_2}} \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + r_3}}} \;=\; \cdots$$

и рассмотрим последовательность $r_0, r_1, \ldots$ остатков этой непрерывной дроби. Есть гипотеза, что при $N \ge 3$ последовательность

$$\xi_n = \log_2(1+r_n)$$

имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Чтобы проверить гипотезу о равномерном распределении для алгебраического числа $\sqrt[3]{2}$, мы вычислили 1000 элементов последовательности $\xi_0, \xi_1 \ldots$. В результате получены ожидаемые значения

$$\frac{1}{1000}\sum_{k=0}^{999} \xi_k = 0.501912... \approx \frac{1}{2}$$

и

$$\frac{1}{1000}\sum_{k=0}^{999}\xi_k^2 = 0.332463... \approx \frac{1}{3}.$$

В таблице

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
90	98	109	102	101	89	115	96	112	88

указано сколько элементов из числа $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{999}$ попало в отрезки

$$\left[\frac{0}{10}, \frac{1}{10}\right] \quad \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right] \quad \ldots \quad \left[\frac{9}{10}, \frac{10}{10}\right].$$

Отметим, что среди рассмотренных 1000 элементов 500 больше и 500 меньше 1/2.

4. Элементы непрерывной дроби числа $\sqrt[N]{M}$

Хаотичное поведение остатков непрерывной дроби числа $\sqrt[N]{M}$ приводит к хаотичному поведению ее элементов. Удивительно, что элементы $a_0, a_1, \ldots$ могут быть вычислены рекуррентным образом в рамках целочисленной арифметики.

Числитель и знаменатель k-ой подходящей дроби вычисляются по правилам

$$\begin{aligned} P_k &= a_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{matrix} P_{-1} = 1 & & P_0 = a_0 \\ & u & \\ Q_{-1} = 0 & & Q_0 = 1 \end{matrix}$$

Есть гипотеза, что для любого $\sqrt[N]{M}$ существует n такое, что

$$a_k = \left[-\frac{(P_{k-2}^N - MQ_{k-2}^N)P_{k-1}^{N-1}}{(P_{k-1}^N - MQ_{k-1}^N)P_{k-2}^{N-1}}\right].$$

при всех $k \geq n+1$. При $3 \leq N \leq 5$ и $2 \leq M \leq 10$ номера n даны в таблице.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	2	3	3	3	3	$\emptyset$	1	1
4	2	2	2	3	4	3	4	2	5
5	1	2	2	2	3	2	3	3	5

Например, для $\sqrt[3]{2}$ после определения начальных значений

$$\begin{array}{ccc} a_0 = 1 & & a_1 = 3 \\ P_0 = 1 & \textit{и} & P_1 = 4 \\ Q_0 = 1 & & Q_1 = 3 \end{array}$$

все последующие значения определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_k &= \left[-\frac{(P_{k-2}^3 - 2Q_{k-2}^3)P_{k-1}^2}{(P_{k-1}^3 - 2Q_{k-1}^3)P_{k-2}^2} \right], \\ P_k &= a_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}. \end{aligned}$$

В результате получаем последовательность элементов

$$1\ \ 3\ \ 1\ \ 5\ \ 1\ \ 1\ \ 4\ \ 1\ \ 1\ \ 8\ \ 1\ \ 14\ \ 1\ \ 10\ \ 2\ \ 1\ \ 4\ \ 12\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 14\ \ 3\ \ 12\ \ 1\ \ \ldots$$

непрерывной дроби числа $\sqrt[3]{2}$.

Для вычисления $a_0, a_1, \ldots$ есть несколько рекуррентных целочисленных соотношений. Одно из них будет доказано после решения следующей задачи.

Задача. Пусть P_n и Q_n - числитель и знаменатель n-ой подходящей дроби числа $\sqrt[3]{2}$ и

$$P_n^2 \equiv X_n (\operatorname{mod} Q_n),$$

где $0 < X_n < Q_n$. Последовательность $X_0, X_1, \ldots$ имеет вид

$$0\ \ 1\ \ 1\ \ 13\ \ 22\ \ 19\ \ 76\ \ 198\ \ 25\ \ 481\ \ 776\ \ 26443\ \ 185623\ \ \ldots$$

Доказать, что $X_n \geq 4$ при достаточно больших n. Есть гипотеза, что

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \infty.$$

Литература

[1] А.Я. Хинчин. Цепные дроби. М.: Наука, 1978.

[2] Г. Полиа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Часть первая. М.: Наука, 1978.

Владимир Малышев
wmal@ryb.adm.yar.ru