Об одном интересном множестве

Б.М.Макаров

Недавно М.Г.Голузина сообщила мне о построенном ею примере множества. Считая его весьма интересным, я с разрешения автора хочу рассказать об этом и близких результатах.

Напомню, что подмножество e вещественной оси (или окружности) называется *нуль-множеством*, если оно содержится в объединении последовательности промежутков (соответственно дуг), суммарная длина которых произвольно мала. Иными словами, e $(e \subset \mathbb{R})$ — нуль-множество, если

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \{[a_k, b_k]\}_{k=1}^{\infty}\ :\ e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k],\ \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \varepsilon$$

(для окружности вместо длин промежутков следует рассматривать длины дуг). Под окружностью всюду далее мы будем понимать единичную окружность $S \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Читатель, знакомый с теорией меры, конечно, сразу заметит, что нуль-множества на прямой — это просто множества, у которых мера Лебега равна нулю.

УПРАЖНЕНИЕ. Счетное объединение нуль-множеств снова есть нуль-множество.

Примером нуль-множества может служить множество чисел из отрезка $[0, 1]$, в p-ичном разложении которых отсутствует некоторая “цифра”, скажем, a, $0 \leqslant a < p$. Как легко убедиться, множество чисел $x \in [0, 1]$, представимых в виде $x = \frac{\varepsilon_1}{p} + \frac{\varepsilon_2}{p^2} + \dots \frac{\varepsilon_k}{p^k} + \dots$, где ε_k могут принимать значения $0, 1, \dots, p-1$ и $\varepsilon_1 \neq a$, есть объединение промежутков, суммарная длина которых равна $\frac{p-1}{p}$. Множество чисел, у которых $\varepsilon_1 \neq a$ и $\varepsilon_2 \neq a$, есть объединение промежутков, суммарная длина которых равна (в силу очевидных соображений подобия) $\left(\frac{p-1}{p}\right)^2$ и т.д. После k шагов мы получим, что множество чисел, у которых первые k p-ичных знаков не равны a, есть объединение промежутков, суммарная длина которых равна $\left(\frac{p-1}{p}\right)^k$ и, следовательно, при надлежащем выборе k может быть сделана произвольно малой. Читатель самостоятельно проведет это рассуждение во всех подробностях.

Отметим, что при переходе от точек t на прямой к точкам e^{it} нуль-множества преобразуются в нуль-множества, так как при отображении $t \mapsto e^{it}$ (“обмотке окружности”) промежутки (длиной меньше 2π) переходят в дуги такой же длины.

Два подмножества, лежащие на прямой (окружности), называются *конгруэнтными*, если они могут быть получены друг из друга сдвигом (соответственно поворотом на некоторый угол).

В теории множеств существует много примеров множеств с парадоксальными свойствами, однако я не встречал примера, построенного Марией Геннадиевной. Оказывается, справедливо

Предложение 1. *На окружности существует нуль-множество E, содержащее конгруэнтные “копии” всех конечных подмножеств окружности.*

Иными словами, поворачивая E можно “накрыть” любое конечное множество. Это легко вытекает из следующего утверждения.

Предложение $1'$. *Пусть N — натуральное число, $p = 6N$ и пусть C_p — множество чисел из отрезка $[0, 1]$, в p-ичном разложении которых отсутствует “цифра” $\frac{p}{2}$, а $E_N = \{e^{2\pi is} : s \in C_p\}$. Тогда E_N есть нуль-множество и для любых N чисел $z_k = e^{2\pi it_k}$ ($k = 1, \ldots, N$) найдется такое число $\zeta = e^{2\pi i\alpha}$, что $\zeta z_k \in E_N$ при всех $k = 1, \ldots, N$, т.е. при повороте на угол $2\pi\alpha$ все N точек $z_1, \ldots, z_N$ смещаются в множество E_N.*

Множество E, о котором говорится в предложении 1, можно, очевидно, получить, положив $E = \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$.

Доказательство предложения $1'$. Как мы уже отмечали, C_p и E_N суть нуль-множества.

Укажем, как следует выбирать угол поворота $2\pi\alpha$, при котором точка $z = e^{2\pi it}$ ($t \in [0, 1)$) перейдет в точку, принадлежащую множеству E_N. При этом мы всегда будем предполагать, что знаки p-ичного разложения числа α не превосходят $\frac{p}{3}$.

Пусть p-ичные разложения t и α имеют вид $t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{p^k}$, $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{p^k}$, причем $0 \leqslant \alpha_k \leqslant \frac{p}{3}$ при любом k.

При повороте на угол $2\pi\alpha$ точка $z = e^{2\pi it}$ перейдет в точку $e^{2\pi is}$, где

$$s = t + \alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k + \alpha_k}{p^k}.$$

Конечно, сумма $\tau_k + \alpha_k$ может быть больше, чем $p-1$, однако ввиду наложенного на α_k ограничения, она не превосходит $\frac{4p}{3}$, так что разность $(\tau_k+\alpha_k)-p$ заведомо меньше $\frac{p}{2}$. Мы будем выбирать α_k таким образом, чтобы

$$\tau_k + \alpha_k \neq \frac{p}{2}, \text{ а также чтобы } \tau_k + \alpha_k + 1 \neq \frac{p}{2} \tag{1}$$

— последнее на тот случай, если нам придется перенести в k-й разряд единицу из последующего разряда. При выполнении условий (1) все p-ичные знаки числа $s = t+\alpha$ (они могут не совпадать с суммами $\tau_k + \alpha_k$) не равны $\frac{p}{2}$, и поэтому точка $e^{2\pi i s}$ принадлежит E_N. Таким образом, при выборе α_k мы должны удовлетворить двум условиям (1). Если нам дано N точек $z_j = e^{2\pi i t_j}$ $(j = 1, \ldots, N)$ и мы хотим найти поворот, при котором все они перейдут в точки E_N, то при выборе α_k мы должны удовлетворить $2N$ условиям, имея в своем распоряжении $\frac{p}{3}+1$ возможностей для α_k. Нужную нам "цифру" α_k можно найти, поскольку при выбранном нами значении $p = 6N$ справедливо неравенство $2N < \frac{p}{3} + 1 = 2N+1$. Это доказывает наше предложение.

Несколько модифицируя проведенное рассуждение, можно "перенести" его на прямую. При этом вместо всюду плотного множества (каковым необходимо должно быть множество E) можно построить нигде не плотное множество. Читатель может подумать над следующей задачей.

Задача. На вещественной прямой существует замкнутое нуль-множество, содержащее конгруэнтные копии любых конечных множеств.

Ф.Л.Назаров сообщил иную идею доказательства предложения 1, с помощью которой его можно существенно усилить. Доказательство Назарова опирается на результат, представляющий собой частный случай усиленного закона больших чисел. Чтобы сформулировать его, будем рассматривать двоичные разложения. Для точки t из $[0,1)$ положим $m_n(t)$ равным числу единиц среди первых n знаков разложения t в двоичную дробь (для двоично рациональных чисел произвольно выбирается любое из двух возможных разложений). Доказанный Э.Борелем в 1909 году усиленный закон больших чисел утверждает, что

$$\frac{m_n(t)}{n} \to \frac{1}{2} \text{ почти везде на } [0,1).$$

Здесь термин "почти везде" означает, что $\frac{m_n(t)}{n} \to \frac{1}{2}$ при всех $t \in [0,1)$ за исключением точек некоторого нуль-множества C. Таким образом, в двоичных разложениях "почти всех" чисел нули и единицы встречаются "одинаково часто". Вместе с C нуль-множеством будет и множество $\mathcal{E} \equiv \{z = e^{2\pi i s} : s \in C\}$. Оно не только доставляет требуемый пример, но и позволяет доказать

Предложение 2. *Множество $\mathcal{E}$ содержит конгруэнтные "копии" всех счетных подмножеств окружности.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что если число $s \in [0,1)$ таково, что

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{m_n(s)}{n} = 1 \quad \text{или} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{m_n(s)}{n} = 0, \tag{2}$$

то $s \in C$, а $e^{2\pi i s} \in \mathcal{E}$.

Чтобы из точки $t \in [0,1)$ получить после сдвига точку, принадлежащую C, мы должны в двоичном разложении t "нарушить равновесие" между нулями и единицами для достаточно больших групп знаков. Опишем эту процедуру.

Множество $\Delta(p,q) = \{n \in \mathbb{N} : p \leqslant n \leqslant q\}$, где $p, q \in \mathbb{N}$, будем называть блоком. Рассмотрим последовательность блоков $\Delta_j \equiv \Delta(p_j, q_j)$ $(j \in \mathbb{N})$, удовлетворяющих условиям:

$$jp_j < q_j < p_{j+1} \qquad (j \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

Если условие (3) выполняется и в двоичном разложении числа $s = 0,\sigma_1\sigma_2\ldots$ все знаки σ_k одинаковы при $k \in \Delta_j$, $j = 1, 2, \ldots$, то для s справедливо хотя бы одно из соотношений (2), и, следовательно, $s \in C$. В самом деле, если это единицы, то $m_{q_j}(s) \geqslant q_j - p_j$ и, следовательно, $\frac{m_{q_j}(s)}{q_j} \geqslant 1 - \frac{p_j}{q_j} \geqslant 1 - \frac{1}{j}$; если же $\sigma_k = 0$ при $k \in \Delta_j$, то $\frac{m_{q_j}(s)}{q_j} \leqslant \frac{1}{j}$.

Укажем, как следует выбирать сдвиг α, при котором точка t перейдет в точку, принадлежащую множеству C.

Пусть двоичные разложения t и α имеют вид

$$t = 0,\tau_1\tau_2\ldots, \qquad \alpha = 0,\alpha_1\alpha_2\ldots,$$

и пусть $s = t + \alpha$. Будем выбирать знаки α_k так, чтобы $\tau_k + \alpha_k = 1$ при из $k \in \bigcup_j \Delta_j$. В остальном знаки α_k ($\alpha_k = 0$ или $\alpha_k = 1$) можно брать произвольно. В таком случае знаки двоичного разложения s постоянны на каждом блоке Δ_j (они могут оказаться и нулями, если при сложении в последний разряд блока перейдет единица из следующего разряда), и поэтому, как мы отмечали выше, точка $s = t + \alpha$ попадет в C.

Чтобы с помощью сдвига на α переместить в C последовательность чисел $t_1, \dots, t_i, \dots$, рассмотрим такое семейство попарно дизъюнктных блоков $\Delta_j^i = \Delta(p_j^i, q_j^i)$ $(i, j \in \mathbb{N})$, что при каждом i блоки Δ_j^i удовлетворяют условию (3). С помощью индукции по $n = i + j$ читатель легко докажет существование такого семейства. Используя эти блоки, мы можем повторить описанную процедуру, выбирая для каждой точки t_i двоичные знаки α, исходя из последовательности $\{\Delta_j^i\}_{j=1}^{\infty}$. Тогда, как мы показали выше, сумма $t_i + \alpha$ попадет в C. Поскольку множества $\bigcup_j \Delta_j^i$ не пересекаются при различных i, каждый номер k может принадлежать разве лишь одному из этих множеств, и поэтому на α_k накладывается не более одного условия, что обеспечивает их совместимость. Таким образом, построение требуемого сдвига возможно.

Результат, полученный для окружности, справедлив и для тора. Под тором мы здесь понимаем декартово произведение $S \times S$, а два его подмножества считаем конгруэнтными, если одно является образом другого при вращении по меридиану и по параллели, т.е при отображении $(z, w) \mapsto (az, bw)$, где a, b — фиксированные точки из S.

Рассмотренный пример можно обобщить на сферы. На двумерной сфере можно рассмотреть множество $\widetilde{E}$, образуемое меридианами, проходящими через точки множества $\mathcal{E}$, лежащего на экваториальной окружности. Ясно что площадь множества $\widetilde{E}$ равна нулю и что любое счетное множество можно сместить в него поворотом вокруг полярной оси. Читатель самостоятельно убедится, что аналогичное построение возможно для сферы любой размерности.

Оказывается, аналогичный пример можно построить для произвольной бесконечной метризуемой компактной группы (понимая под нуль-множествами множества с нулевой мерой Хаара).

Идею доказательства следующей теоремы указал Виталий Бергельсон из университета Огайо.

В каждой бесконечной метризуемой компактной группе существует подмножество нулевой меры, содержащее конгруэнтную копию любого счетного множества.

Для доказательства нужно рассмотреть дополнение произвольного множества первой категории, имеющего полную меру (как легко убедиться, такие существуют).

Проверка не составляет труда, поскольку счетное пересечение таких дополнений всегда непусто (и даже второй категории согласно теореме Бэра).

Как нетрудно убедиться, предположение о метризуемости можно опустить.