НЕРАВЕНСТВО ХИНЧИНА

Б.М.Макаров, А.Н.Подкорытов, О.И.Рейнов

Известно, что для любой функции f интегралы $\left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ возрастают с ростом p на интервале $(0,\infty)$. Это немедленно следует из неравенства Гёльдера. Часто оказывается важным знать, что на достаточно широком множестве функций эти интегралы при бо́льших p оцениваются через интегралы с меньшими значениями p (например, L_2-норма оценивается через L_p-норму сверху, если $p \in (0,2)$, и снизу, если $p > 2$) с некоторыми константами, значения которых зависят лишь от p, но не от функций из нашего множества.

Один из первых результатов такого рода – знаменитое неравенство Хинчина. Оно связано с последовательностью функций Радемахера $\{r_n\}_{n\geqslant 1}$, которые определяются с помощью диадических разбиений интервала $(0,1)$.

Опишем построение функции r_n. Рассмотрим промежутки

$$\Delta_{nk} = (k/2^n, (k+1)/2^n) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant k < 2^n$$

и положим

$$r_n(t) = (-1)^k, \quad \text{если} \quad t \in \Delta_{nk}, \quad r_n(k/2^n) = 0, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant k \leqslant 2^n.$$

Это определение можно переформулировать, сказав, что $r_n(t) = = \operatorname{sign}\sin(2^n \pi t)$. Последовательность функций Радемахера обладает замечательным свойством – независимостью. Одно из эквивалентных определений этого свойства состоит в том, что

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^n \varphi_k(r_k(t))\,dt = \prod_{k=1}^n \int_0^1 \varphi_k(r_k(t))\,dt \tag{1}$$

для любых функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, определенных по крайней мере в точках ± 1.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Докажите равенство (1).

Классическое неравенство Хинчина состоит в том, что для всякого $p > 0$ существуют такие положительные числа A_p и B_p, что при любом $n \in \mathbb{N}$ и любых вещественных коэффициентах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$A_p \left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^n a_k r_k(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^n a_k r_k(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant B_p \left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^n a_k r_k(t)|^2\,dt\right)^{1/2}. \tag{2}$$

Чрезвычайно важно, что A_p и B_p зависят только от p, но не от n.

Используя выпуклость функции $\mathcal{I}(p) = \ln\left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)$ при $0 < p < \infty$ (это не что иное, как переформулировка неравенства Гёльдера) нетрудно доказать, что левая часть неравенства Хинчина есть простое следствие его правой части. Точнее, справедливо следующее утверждение.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Пусть $r < 2 < p$. Тогда из L_p-оценки сверху

$$\left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^n a_k\, r_k(t)\,|^p\,dt\right)^{1/p} \leqslant B_p \left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^n a_k\, r_k(t)\,|^2\,dt\right)^{1/2},$$

следует L_r-оценка снизу

$$B_p^\sigma \left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^n a_k\, r_k(t)\,|^2\,dt\right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^n a_k\, r_k(t)\,|^r\,dt\right)^{1/r},$$

где $\sigma = \frac{1-2/r}{1-2/p}$. Тем самым, мы получаем левую часть неравенства Хинчина с $A_r = B_p^\sigma$. Для получения лучшего значения постоянной A_r мы можем воспользоваться произволом в выборе показателя $p > 2$.

В середине 60-х годов неравенство Хинчина обобщил на векторнозначный случай французский математик *J.-P.KAHANE*. Он доказал, что верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для всякого $p > 0$ существуют такие положительные числа $\widetilde{A}_p$ и $\widetilde{B}_p$, что для произвольного нормированного пространства X, для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из X справедливо неравенство

$$\widetilde{A}_p \left(\int_0^1 \Big\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \Big\|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \Big\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \Big\|^p dt \right)^{1/p} \leqslant \widetilde{B}_p \left(\int_0^1 \Big\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \Big\|^2 dt \right)^{1/2}. \tag{3}$$

Элементарное и вместе с тем, по-видимому, наиболее простое из известных доказательств неравенства Хинчина-Кахана можно найти, например, в [1].

Ясно, что $\widetilde{A}_p \leqslant A_p \leqslant 1$ при $0 < p < 2$ и $1 \leqslant B_p \leqslant \widetilde{B}_p$ при $p > 2$. В некоторых случаях бывает интересно знать по возможности наиболее точные значения постоянных A_p, B_p и $\widetilde{A}_p$, $\widetilde{B}_p$. Еще в 1935 году в книге С.Качмажа и Г.Штейнгауза "Теория ортогональных рядов" было получено наилучшее значение B_4, а в 1959 году С.Б.Стечкин вычислил значения B_p при $p = 2k$, где $k \in \mathbb{N}$.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Вычислите наилучшие (то есть наименьшие возможные) постоянные B_p в неравенстве Хинчина при $p = 4$ и $p = 6$.

В 1977 году датский математик *U.HAAGERUP* нашел (см. краткое сообщение [3] и подробное изложение [4]) точные значения B_p при всех $p > 2$ (очевидно, что $B_p = 1$ при $0 < p \leqslant 2$). Используя неравенство Гёльдера и эти значения B_p, можно получить (см. упражнение 2) некоторые, однако, не наилучшие значения A_p при $0 < p < 2$. Для нахождения точных значений этих констант пришлось привлекать другие методы. Впервые это удалось сделать студенту(!), ныне известному польскому математику. *S.SZAREK* доказал [2], что наибольшее значение постоянной A_1 в неравенстве (2) есть $1/\sqrt{2}$. Тем самым он подтвердил гипотезу, давно высказанную Литтлвудом. Наилучшие значения констант A_p для других значений $p \in (0, 2)$ были найдены вскоре после этого в упомянутых работах Хаагерупа [3],[4].

УПРАЖНЕНИЕ 4. Докажите, что $A_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

До недавнего времени о точных значениях констант $\widetilde{A}_p$ и $\widetilde{B}_p$ в неравенстве Хинчина-Кахана ничего не было известно. И вот оказывается, что наилучшее значение постоянной $\widetilde{A}_1$ (годное для любых нормированных пространств!) также равно $1/\sqrt{2}$ (а не меньше). Подробнее это означает, что справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Для любого нормированного пространства X, любого $n \in \mathbb{N}$ и любых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из X справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \Big\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \Big\|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant \int_0^1 \Big\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \Big\| dt. \tag{4}$$

Доказательство этой теоремы немногим более года тому назад получили польские студенты *R.LATALA* и *K.OLESZKIEWICZ* под руководством известного польского специалиста по теории вероятностей и функциональному анализу *S.KWAPIEŃ*'я. Упрощенное доказательство этой теоремы нам сообщил профессор *A.PEŁCZIŃSKI*. Цель этой заметки – рассказать это простое доказательство, но в несколько модифицированном нами виде. А пока предлагаем принять этот результат на веру и с помощью неравенства Гёльдера распространить его на случай $0 < p < 1$.

УПРАЖНЕНИЕ 5. Докажите, что $\widetilde{A}_p \geqslant 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ при $0 < p < 1$.

Сопоставив это с результатом Хаагерупа $A_p = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ при $0 < p < p_0$, где $p_0 \approx 1{,}847$, получаем, что $\widetilde{A}_p = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$ при $0 < p \leqslant 1$.

Что же касается точных значений констант $\widetilde{A}_p$ при $1 < p < 2$ и $\widetilde{B}_p$ при $p > 2$, то нам они не известны.

Перейдем теперь к доказательству неравенства (4). Его можно переформулировать следующим образом. Зафиксируем произвольный набор x векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и свяжем с ним функцию

$$f_x(t) = \Big\| \sum_{k=1}^n r_k(t)\, x_k \Big\|.$$

Очевидно, неравенство (4) равносильно тому, что

$$\int_0^1 f_x^2(t)\,dt \leqslant 2\left(\int_0^1 f_x(t)\,dt\right)^2.$$

Это неравенство мы и будем доказывать.

Функция f_x устроена довольно просто: на промежутках вида $\left(\frac{j-1}{2^n},\frac{j}{2^n}\right)$, $j=1,\ldots,2^n$, она постоянна. Множество всех таких вещественно-значных функций образует линейное пространство E размерности 2^n (поскольку нас интересуют только интегральные оценки, то значения этих функций в точках $j/2^n$ не играют роли; для определенности можно считать, что $f(j/2^n)=0$ для всех функций f из E).

В пространстве E естественно ввести скалярное произведение

$$(f,g)=\int_0^1 f(t)g(t)dt \text{ для любых } f,g\in E,$$

которое порождает в E евклидову норму

$$\|f\|_E=\sqrt{(f,f)}=\left(\int_0^1 f^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

Из равенства (1) следует, что $(r_j,r_k)=0$, если $j\neq k$ и $(r_j,r_j)=1$, то есть функции Радемахера образуют ортонормированную систему в E, которая, конечно, не является базисом, так как размерность E равна 2^n, а функций Радемахера только n. Дополним эту систему функциями Уолша. Функцией Уолша $w(t)$ порядка k $(0\leqslant k\leqslant n)$ называется произведение k различных функций Радемахера $w(t)=r_{n_1}(t)\cdots r_{n_k}(t)$, где $1\leqslant n_1<\ldots<n_k\leqslant n$. Порядок функции Уолша w будем обозначать $k=\operatorname{ord} w$. При этом функция Уолша нулевого порядка (обозначим ее w_0) – это функция всюду равная 1. Ясно, что функции Уолша первого порядка совпадают с функциями Радемахера. Из равенства (1) сразу следует, что функции Уолша образуют ортогональную систему в E. Обозначим ее W_n. Так как имеется ровно C_n^k функций Уолша $k-$го порядка, то система W_n состоит из $\sum_{k=0}^n C_n^k=2^n$ функций. Следовательно, W_n является ортонормированным базисом в E. Поэтому каждая функция f из E раскладывается по базису W_n:

$$f=\sum_{w\in W_n}(f,w)w.$$

В силу ортонормированности системы W_n для любых функций $f,g\in E$ справедливы равенство

$$(f,g)=\sum_{w\in W_n}(f,w)(g,w) \quad \text{и теорема Пифагора} \quad \|f\|_E^2=\sum_{w\in W_n}(f,w)^2.$$

Интересующая нас функция f_x обладает важным для дальнейшего свойством – ее график симметричен относительно прямой $t=1/2$, то есть $f_x(t)=f_x(1-t)$, и, следовательно, график функции $f_x(t)r_j(t)$ симметричен относительно точки $(\frac{1}{2},0)$ (это немедленно следует из равенства $r_j(t)=-r_j(1-t)$). Поэтому $(f_x,r_j)=0$ для всех $j=1,\ldots,n$, то есть $(f_x,w)=0$, если $\operatorname{ord} w=1$.

Определим операцию "дифференцирования" для функций из E:

$$Df(t)=\sum_{w\in W_n}\operatorname{ord} w\ (f,w)w(t).$$

Ясно, что это линейная операция. Решающее значение в доказательстве будет играть неравенство

$$Df_x(t)\leqslant f_x(t) \text{ для всех } t\in[0,1]. \tag{$*$}$$

Его доказательство мы отложим в конец заметки, а сейчас покажем, как получить из него неравенство Хинчина. Так как $(f_x,w)=0$, если $\operatorname{ord} w=1$, то из неравенства $(*)$ следует, что

$$\|f_x\|_E^2=\int_0^1 f_x^2(t)dt\geqslant\int_0^1 f_x(t)Df_x(t)dt=\sum_{w\in W_n}\operatorname{ord} w\ (f_x,w)^2\geqslant 2\sum_{\substack{w\in W_n\\ w\neq w_0}}(f_x,w)^2.$$

Таким образом, с помощью теоремы Пифагора получаем

$$\|f_x\|_E^2 \geqslant 2(\|f_x\|_E^2 - (f_x, w_0)^2),$$

то есть

$$\int_0^1 \|r_1(t)x_1 + \cdots + r_n(t)x_n\|^2 dt = \|f_x\|_E^2 \leqslant 2(f_x, w_0)^2 = 2\left(\int_0^1 \|r_1(t)x_1 + \cdots + r_n(t)x_n\| dt\right)^2.$$

Итак, осталось доказать неравенство $(*)$. Для этого получим сначала "разностное" представление для введенной нами операции "дифференцирования". Всякая функция f из E единственным образом представима в виде суперпозиции $f(t) = F(r_1(t), \dots, r_n(t))$, где F – некоторая функция, определенная на векторах $(\pm 1, \dots, \pm 1) \in \mathbb{R}^n$. Докажем, что

$$\begin{aligned}2Df = {} & F(r_1, \dots, r_n) - F(-r_1, r_2, \dots, r_n) + \\ & + F(r_1, \dots, r_n) - F(r_1, -r_2, \dots, r_n) + \\ & \dots \\ & + F(r_1, \dots, r_n) - F(r_1, \dots, r_{n-1}, -r_n).\end{aligned}$$

Так как любая функция f из E раскладывается по базису W_n, то это тождество достаточно доказать лишь для функций Уолша. Для функции w_0 нечего доказывать. Пусть $w \in W_n$ и $\operatorname{ord} w \geqslant 1$, то есть $w = r_{n_1} \cdots r_{n_k}$. Этой функции соответствует функция $F(u_1, \dots, u_n) = u_{n_1} \cdots u_{n_k}$. Поэтому

$$F(r_1, \dots, r_n) - F(\dots, r_{j-1}, -r_j, r_{j+1} \dots) = \begin{cases} 2F(r_1, \dots, r_n), & \text{если } j \in \{n_1, \dots, n_k\} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Просуммировав эти равенства по $j = 1, \dots, n$, получим, что сумма приращений функции F по всем координатам равна $2kF(r_1, \dots, r_n) = 2 \operatorname{ord} w\, w = 2Dw$, что и требовалось доказать.

Наконец, используя доказанное тождество для функции f_x, с помощью неравенства треугольника получаем

$$\begin{aligned}2Df_x &= n\|r_1x_1 + \cdots + r_nx_n\| - (\| - r_1x_1 + \cdots + r_nx_n\| + \cdots + \|r_1x_1 + \cdots - r_nx_n\|) \leqslant \\ &\leqslant n\|r_1x_1 + \cdots + r_nx_n\| - \|(n-2)r_1x_1 + \cdots + (n-2)r_nx_n\| = 2\|r_1x_1 + \cdots + r_nx_n\| = 2f_x.\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.М.Макаров, *P-абсолютно суммирующие операторы и некоторые их приложения,* **Алгебра и анализ** 1991, т.3. вып.2, стр.1-83.

2. S.J.Szarek, *On the best constants in the Khintchine inequality,* **Studia Math.** 1976, v.58, pp.197-208.

3. U.Haagerup, *Les meilleures constantes de l'inégalité de Khintchine,* **C.R. Acad.Sci.** 1978, v.286, sér.A, pp.259-262.

4. U.Haagerup, *The best constants in the Khintchine inequality,* **Studia Math.** 1982, v.70, pp.231-283.

Подробнее со свойствами функций Радемахера и Уолша можно познакомиться по книгам

5. Б.С.Кашин и А.А.Саакян, *Ортогональные ряды,* Москва 1984, изд-во "Наука", стр.1-496.

6. Б.М.Макаров, М.Г.Голузина, А.А.Лодкин, А.Н.Подкорытов, *Избранные задачи по вещественному анализу,* Москва 1992, изд-во "Наука", стр.1-432.