НЕСКОЛЬКО ЖЕМЧУЖИН МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

С. В. Керов

Одно время в компьютерном журнале Communications of the ACM регулярно публиковались этюды под общей шапкой “Programming pearls” – жемчужины программирования (русский перевод опубликован в книге Д. Бентли, “Жемчужины творчества программистов”, Радио – Связь, М., 1990). Муза математики несравненно старше компьютерной сестры и насчитывает среди своих сокровищ пропорционально большее число жемчужин. Применительно к нашим намерениям, эту поэтическую метафору можно отнести к *короткому сюжету, содержащему эстетически значимую математическую идею.* Для настоящих заметок отобрано с полдюжины подобных жемчужин, в основном из области математического анализа.

Начнем с сюжета, восходящего к Стилтьесу.

1. Электростатика нулей многочленов Якоби

1. Постановка задачи. Рассмотрим произведение

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le j < k \le n} |x_j - x_k|, \tag{1.1}$$

то есть модуль определителя Вандермонда. Поскольку V зависит от своих аргументов симметрично, можно рассматривать набор $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ как множество и фиксировать нумерацию $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ в порядке возрастания. Мы хотим найти максимум функции V при этом условии. Ясно, что без дополнительных ограничений задача бессодержательна, поэтому будем еще предполагать, что переменные принадлежат фиксированному конечному отрезку, например, отрезку $[0, 1]$.

(1.2) **Задача.** *Найти конфигурацию из n точек на отрезке,*

$$0 \le x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \le 1, \tag{1.3}$$

максимизирующую функционал (1.1).

Легко понять, что задача поставлена математически корректно: ее решение существует (ясно из соображений компактности) и единственно. Действительно, составим из двух конфигураций $(x_1, \dots, x_n)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ новую конфигурацию $(z_1, \dots, z_n)$, в которой $z_k = (x_k + y_k)/2$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$z_j - z_i = \frac{1}{2}\big((x_j - x_i) + (y_j - y_i)\big) \ge (x_j - x_i)^{1/2}(y_j - y_i)^{1/2}$$

при всех $i < j$, откуда следует, что

$$V(z_1, \dots, z_n)^2 \geq V(x_1, \dots, x_n)\, V(y_1, \dots, y_n),$$

причем неравенство строгое, если только конфигурации иксов и игреков не совпадают. Иначе говоря, функция $\ln V$ строго выпукла. Теперь ясно, что максимум V не может достигаться на двух *различных* конфигурациях: в этом случае значение V на их полусумме было бы еще больше.

Для прикидки найдем оптимальные конфигурации при малых n. При $n = 2, 3$ ответ очевиден: две точки займут места на концах отрезка, а еще одна (если она имеется) – посередине. При $n = 4$ соображения симметрии сводят вопрос к оптимизации функции одной переменной, но ответ уже не так тривиален:

$$(1.4) \qquad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big), \quad x_3 = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\Big), \quad x_4 = 1.$$

Для продолжения анализа необходимо уточнить, в какой форме мы рассчитываем получить ответ при произвольно большом n.

2. Ответ. Исходная идея Томаса Стилтьеса очень проста: стоит искать не сами переменные $x_1 < \dots < x_n$, а тот многочлен, нулями которого эти переменные являются. Такая точка зрения приводит к следующему замечательному ответу.

(2.1) **Теорема.** *Конфигурация (1.3), максимизирующая функцию $V(x_1, \dots, x_n)$, состоит из точек $x_1 = 0$, $x_n = 1$ и всех корней полинома Якоби $J_{n-2}(1, 1; x)$ степени $n - 2$.*

Существует множество эквивалентных определений полиномов Якоби. Для наших целей удобнее всего воспользоваться явной формулой:

$$(2.2) \qquad J_n(a, b; x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k \binom{n}{k} \prod_{j=1}^{k} \frac{n + a + b + j}{b + j}.$$

Например, при $n = 4$ получаем полином $J_2(1, 1; x) = 1 - 5x + 5x^2$, корнями которого служат x_2, x_3 из формул (1.4).

Чтобы сделать решение более естественным, удобно несколько обобщить первоначальную задачу.

(2.3) **Теорема.** *Пусть p, q – фиксированные положительные параметры. Тогда конфигурация из n точек на отрезке, максимизирующая функционал*

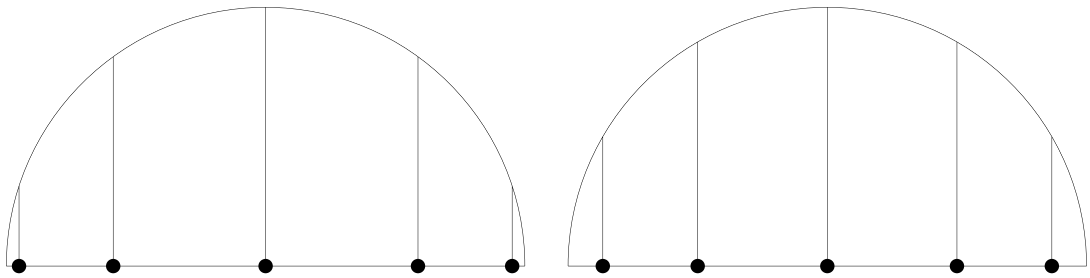
$$(2.4) \qquad V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k)^p\, x_k^q \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

при прежних ограничениях (1.3), состоит в точности из всех корней полинома Якоби (2.2) *с параметрами $a = 2p - 1$, $b = 2q - 1$.*

Теорема 2.1 является частным случаем этой формулировки для $p = q = 1$ (при этом число свободных переменных снижается до $n - 2$, т. к. две точки занимают положения на краях отрезка).

(2.5) **Пример.** Если $a = b = -1/2$, то полиномы $J_n(-1/2, -1/2; 1-2x)$ лишь множителем отличаются от полиномов Чебышева I рода $T_n(\cos\varphi) = \cos n\varphi$. Точно так же при $a = b = 1/2$ многочлены $J_n(1/2, 1/2; 1-2x)$ имеют те же корни, что и полиномы Чебышева II рода $U_n(\cos\varphi) = \sin(n+1)\varphi / \sin\varphi$.

Нули полиномов Чебышева легко себе представить наглядно. Для этого разделим полуокружность, имеющую отрезок $[0,1]$ своим диаметром, на n равных дуг и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – горизонтальные координаты их середин. Эти точки суть корни полинома Чебышева первого рода $T_n(x)$ и потому задают оптимальную конфигурацию при $p = q = 1/4$. При $p = q = 3/4$ иксы разместятся в корнях полиномов Чебышева второго рода $U_n(x)$. Очевидно, что это абсциссы точек полуокружности, делящих ее на $n+1$ равных дуг (см. рис. 1).



Корни полиномов Чебышева I рода   Корни полиномов Чебышева II рода

Рис. 1

3. Доказательство теоремы 2.3. Как обычно, для определения экстремума гладкой функции найдем ее критические точки. Предварительно имеет смысл перейти к логарифму целевой функции:

$$
\begin{aligned}
&E(x_1, \ldots, x_n) \equiv -\ln V(x_1, \ldots, x_n) = \\
&= -p\sum_{k=1}^{n} \ln(1-x_k) - q\sum_{k=1}^{n} \ln x_k - \sum_{j<k} \ln(x_k - x_j)
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

(знак перед логарифмом – дань “физическому смыслу”, о котором речь ниже). Мы должны минимизировать функцию E. При этом для ее частных производных получаем формулу

$$
-\frac{\partial E}{\partial x_k} = \sum_{i:i\neq k} \frac{1}{x_k - x_i} + \frac{q}{x_k} + \frac{p}{x_k - 1}. \tag{3.2}
$$

(3.3) Лемма. *Для любого приведенного полинома $f(x) = (x - x_1)\ldots(x - x_n)$ с простыми корнями справедливо тождество*

$$
\frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} = \sum_{i:i\neq k} \frac{1}{x_k - x_i}.
$$

Доказательство. Из формул

$$
f'(x) = \sum_{i} \prod_{j:j\neq i} (x - x_j); \qquad f''(x) = 2\sum_{i<j} \prod_{m:m\neq i,j} (x - x_m)
$$

вытекает

$$f'(x_k) = \prod_{i:i\neq k} (x_k - x_i); \qquad f''(x_k) = 2\sum_{j:j\neq k}\prod_{i:i\neq j,k}(x - x_i)$$

и утверждение леммы очевидно. $\square$

С учетом (3.2) уравнения критической точки можно теперь записать в виде

$$\frac{f''(x_k)}{2f'(x_k)} + \frac{p}{x_k - 1} + \frac{q}{x_k} = 0.$$

После приведения дроби к общему знаменателю для ее числителя получаем условие

$$x_k(1 - x_k)\, f''(x_k) + \big(b + 1 - (a + b + 2)x_k\big)\, f'(x_k) = 0.$$

Таким образом, полином

$$x(1 - x)\, f''(x) + \big(b + 1 - (a + b + 2)x\big)\, f'(x),$$

имея степень n, зануляется во всех корнях полинома $f(x)$ и потому отличается от $f(x)$ лишь постоянным множителем $const$. Сравнивая коэффициенты при старших степенях, находим что $const = -(n + a + b + 1)n$. Итак, $f(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x(1 - x)f''(x) + \big(b + 1 - (a + b + 2)x\big)f'(x) + (n + a + b + 1)nf(x) = 0. \tag{3.4}$$

Мы пришли к специальному случаю *гипергеометрического уравнения Гаусса*

$$x(1 - x)y'' + \big(\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\big)y' - \alpha\beta y = 0 \tag{3.5}$$

с параметрами $\alpha = -n$, $\beta = n + a + b + 1$ и $\gamma = b + 1$. Одно из решений этого уравнения (как нетрудно проверить) доставляет *гипергеометрический ряд*

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + 1)\, \ldots (\alpha + n - 1)\, \beta(\beta + 1)\, \ldots (\beta + n - 1)}{\gamma(\gamma + 1)\, \ldots (\gamma + n - 1)} \frac{x^n}{n!}. \tag{3.6}$$

Поскольку в нашем случае $a = -n$ – целое отрицательное число, этот ряд обрывается и задает гипергеометрический полином, совпадающий, как легко видеть, с многочленом Якоби (2.2). $\square$

Приведенное доказательство в существенных пунктах следует книге Сеге, см. [Сеге], теорема 4.2.2.

Для полноты картины отметим, что полиномы Якоби $J_n(a, b; x)$ ортогональны относительно так называемого *бета-распределения*, имеющего на отрезке $[0, 1]$ плотность

$$w(x) = \frac{\Gamma(a + b + 2)}{\Gamma(a + 1)\Gamma(b + 1)}(1 - x)^a x^b.$$

4. Электростатическая интерпретация. Согласно закону Кулона, потенциальная энергия пары точечных электрических зарядов в трехмерном пространстве равна $q_1 q_2 / r$, где q_1, q_2 – величины зарядов, а $r = |x - y|$ – расстояние между ними. С математической точки зрения функция $f = 1/r$ возникает как фундаментальное решение уравнения Лапласа, т.е. как обобщенное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 4\pi\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

см. [Михлин], глава 10, §6. Для двух переменных фундаментальное решение – это решение уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2\pi\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

на этот раз оно задается функцией $f = -\ln r$, так что в двумерной электростатике потенциал пары зарядов равен $-q_1 q_2 \ln r$. К этой же формуле можно придти, рассматривая обычный кулоновский потенциал, создаваемый (бесконечно) длинной равномерно заряженной спицей в ортогональной к ней плоскости (см. [Kellogg], разделы III.5 и VI.7).

Закрепим в точках $0, 1$ заряды величины q, p соответственно, и поместим в точках $x_1 < \ldots < x_n$ между ними еще n подвижных единичных зарядов. Будем считать, что заряды отталкиваются по законам *двумерной* электростатики. Тогда потенциальная энергия нашей системы (равная сумме потенциалов всевозможных пар зарядов) задается как раз функцией (3.1). Статическое равновесие зарядов достигается в конфигурации с минимальной потенциальной энергией, которую мы нашли в п. 3. Итак, теорема 2.3 имеет следующий “физический” смысл.

(4.1) **Теорема.** *Пусть n подвижных единичных зарядов, отталкивающихся с логарифмическим потенциалом $-\ln|x - y|$, блокированы на интервале $[0, 1]$ закрепленными в его концах зарядами величины $q = (b + 1)/2$, $p = (a + 1)/2$ соответственно. Тогда их равновесная конфигурация задается корнями полиномов Якоби $J_n(a, b; x)$.*

Электростатическая интерпретация делает самоочевидными многие свойства корней полиномов Якоби. Ясно например, что с ростом параметра b все корни будут монотонно сдвигаться вправо, а с ростом параметра a – влево.

Литература

Г.Сеге, *Ортогональные многочлены*, Государственное издательство физико - математической литературы, Москва, 1962.

С.Г.Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, Москва, 1977.

O.D.Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, Verlag fon Julius Springer, Berlin, 1929.