Изопериметрическое неравенство и асимптотика простых чисел.

Назаров Ф.Л.

12.III.98

“Fedina Doska” @ Chair of Mathematical Analysis, St. Petersburg State University

Как известно, число $\pi(z)$ простых чисел, не превосходящих данного числа $z > 0$ асимптотически (при $z \to +\infty$) равно $\dfrac{z}{\ln z}$. Первое доказательство этого факта существенно использовало ТФКП. Впоследствии появилось несколько “элементарных” доказательств. Ниже мы приведём самое, пожалуй, забавное из них, принадлежащее Т. Бангу, в котором ключевую роль играет изопериметрическое неравенство (при данном периметре круг имеет наибольшую площадь).

Часть I

Изопериметрическое неравенство и основная лемма.

Напомним, что изопериметрическое неравенство гласит, что площадь области, ограниченной замкнутой (в смысле Жордана) кривой длины L, не превосходит $\dfrac{L^2}{4\pi}$. Мы используем этот хорошо известный факт для доказательства следующей леммы:

Основная лемма. *Пусть f и g – непрерывные (кусочно-)дифференцируемые функции на $[0,+\infty)$ (для нас будет достаточно ограничиться случаем кусочно-линейных функций). Предположим, что $|f'(t)|$, $|g'(t)| \leqslant 1$ на $[0,+\infty)$, а $|f(t)|$, $|g(t)| \leqslant A$ на $[0,+\infty)$. Тогда*

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left|\int\limits_0^x f(t)\, g'(t)dt\right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}A.$$

Замечание. *Очевидно, что*

$$\frac{1}{x}\left|\int\limits_0^x f(t)\, g'(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\int\limits_0^x |f(t)|\, |g'(t)|dt \leqslant \frac{1}{x}\int\limits_0^x A\cdot 1\, dt \leqslant A.$$

Лемма утверждает, что эту тривиальную оценку можно улучшить, поставив перед A множитель, строго меньший 1 (если x достаточно велико).

Доказательство. Рассмотрим на плоскости кривую $\gamma(t) = (f(t), g(t))$ $(t \in [0,x])$, (в случае кусочно-линейных функций это просто ломаная линия). Предположим вначале, что эта кривая замкнута, т.е. $\gamma(x) = \gamma(0)$ и не имеет самопересечений. Тогда $I = \left|\int\limits_0^x f(t)g'(t)dt\right|$ есть в точности площадь области, ограниченной кривой γ (если читатель не знает этого факта, мы предлагаем ему проверить его самостоятельно; это очень полезный факт! Для ленивого и пугливого читателя ниже, в серии упражнений, намечено другое доказательство основной леммы (с константой $\frac{5}{6}$ вместо $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$), не использующее никакой геометрии). В силу изопериметрического неравенства имеем $I \leqslant \frac{L^2}{4\pi} \leqslant \frac{x^2}{2\pi}$ (поскольку длина L кривой γ не превышает $\sqrt{2}x$). С другой стороны, область, ограниченная кривой γ, целиком содержится в квадрате $[-A, A]^2$ и, тем самым, $I \leqslant 4A^2$. Перемножая эти оценки, находим $I^2 \leqslant \frac{x^2}{2\pi} \cdot 4A^2 = \frac{2}{\pi} x^2 A^2$ и, стало быть, $I \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} Ax$.

Предположим теперь, что кривая замкнута, но, возможно, имеет конечное число самопересечений. Идея тогда состоит в том, чтобы просто представить γ в виде объединения нескольких замкнутых кривых без самопересечений и применить полученную выше оценку к каждой из них. Формальное доказательство можно провести индукцией по числу самопересечений следующим образом: пусть $b \in (0, x)$ – первый момент, когда кривая наткнулась на саму себя, т.е. $\gamma(b) = \gamma(a)$ при некотором $a \in (0, b)$. Тогда участок кривой $\gamma(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, представляет собой замкнутую петлю без самопересечений. Применяя к этой петле изложенное выше рассуждение, получаем

$$\left| \int\limits_a^b f(t) g'(t) dt \right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} A(b-a).$$

Рассмотрим теперь функции:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t \leqslant a \\ f(t+b-a), & t \geqslant a \end{cases} \quad \text{и} \quad \tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t), & t \leqslant a \\ g(t+b-a), & t \geqslant a \end{cases}$$

на отрезке $0 \leqslant t \leqslant \tilde{x} = x - (b-a)$.

Очевидно, что

$$\int\limits_0^x f(t) g'(t)\, dt = \int\limits_a^b f(t) g'(t)\, dt + \int\limits_0^{\tilde{x}} \tilde{f}(t) \tilde{g}'(t)\, dt.$$

Но кривая $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{f}(t), \tilde{g}(t))$ имеет меньше самопересечений, чем $\gamma(t)$ и, по предположению индукции,

$$\int\limits_0^{\tilde{x}} \tilde{f}(t) \tilde{g}'(t)\, dt \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} A\tilde{x},$$

а значит,

$$\left| \int\limits_0^x f(t) g'(t)\, dt \right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} A\,(\tilde{x} + b - a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A\, x.$$

Этого уже почти достаточно, чтобы покрыть интересующий нас случай замкнутых *ломаных.* Единственная неприятность состоит в том, что ломаная может пройти по одному из своих звеньев (или его части) дважды. Однако, сколь угодно малым шевелением функций f и g, почти не влияющим не оцениваемый интеграл, от этого случая удаётся легко избавиться. Чуть более сложным предельным переходом можно покрыть случай произвольной кусочно-гладкой замкнутой кривой.

Пусть, наконец, $\gamma(t)$ не обязательно замкнута. Тогда идея состоит в том, чтобы просто замкнуть её, соединив концы отрезком. Формально это выглядит следующим образом: положим $\tilde{x} = x + 2A$ и рассмотрим на $[0, \tilde{x}]$ функцию $\tilde{f}(t)$, равную $f(t)$ на промежутке $[0, x]$, равную $f(0)$ в точке $\tilde{x}$ и линейную не промежутке $[x, \tilde{x}]$. Заметим, что при $t \in [x, \tilde{x}]$ мы имеем $\tilde{f}(t) \leqslant \max\{|f(x)|, |f(0)|\} \leqslant A$ и $|\tilde{f}'(t)| = \left| \frac{f(0) - f(x)}{2A} \right| \leqslant 1$. Аналогично построим функцию $\tilde{g}$. Тогда

$$\left| \int\limits_0^x f(t) g'(t)\, dt \right| = \left| \int\limits_0^x \tilde{f}(t) \tilde{g}'(t)\, dt \right| \leqslant \left| \int\limits_0^{\tilde{x}} \tilde{f}(t) \tilde{g}'(t)\, dt \right| + \left| \int\limits_x^{\tilde{x}} \tilde{f}(t) \tilde{g}'(t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} A\tilde{x} + (\tilde{x} - x)\, A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Ax + \left(2\sqrt{\frac{2}{\pi}} + 2 \right) A^2,$$

откуда немедленно вытекает заключение леммы. □

Упражнение 1. *(для любопытного читателя)*

Константа $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$*, разумеется, не является наилучшей возможной.*

(а) *Убедитесь, что нахождение наилучшей возможной константы в неравенстве основной леммы равносильно решению следующей изопериметрической задачи:*

Рассмотрим все возможные замкнутые не самопересекающиеся ломаные, содержащиеся в квадрате $[-A, A]^2$. *Назовём "длиной" ломаной сумму "длин" ее звеньев, а "длиной" отрезка, соединяющего точки* $P_1 = (x_1, y_1)$ *и* $P_2 = (x_2, y_2)$, *назовём число* $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. *Найти наибольшее возможное отношение площади области, ограниченной такой ломаной к её "длине".*

(б) *Пусть* γ *– произвольная замкнутая ломаная без самопересечений. Рассмотрим описанный вокруг* γ *восьмиугольник, две пары противоположных сторон которого параллельны осям координат, а две другие идут к ним под углом* 45° *(см. рисунок). Тогда этот восьмиугольник имеет не большую "длину" и ограничивает не меньшую площадь, чем* γ. *При этом, если* γ *содержится в квадрате* $[-A, A]^2$, *то и соответствующий восьмиугольник лежит там же.*

(в) *Проверьте, что достаточно ограничиться лишь восьмиугольниками, касающимися всех 4 сторон квадрата* $[-A, A]^2$, *т.е. такими:*

(г) *Проверьте, что среди таких восьмиугольников при данной "длине" наибольшую площадь имеет тот, у которого все 4 незаштрихованных уголка равны, т.е. восьмиугольник вида:*

(д) *Убедитесь, что для такого восьмиугольника отношение площади к "длине" равно* $\dfrac{2A^2 - B^2}{4A - 2B}$ *и, решая соответствующую экстремальную задачу, найдите наилучшую возможную константу в основной лемме и пару функций* f *и* g, *на которых она достаточна.*

Упражнение 2. *(для ленивого и пугливого читателя)*

Пусть $x_0 \geqslant 0$. *Нашей целью будет проверка того, что*

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x_0+3A} f(t)g'(t)\,dt \right| \leqslant \frac{5A^2}{2}.$$

(а) *Убедитесь, что отсюда следует утверждение основной леммы с константой* $\frac{5}{6}$ *вместо* $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

(б) *Рассмотрите случай, когда* f *не имеет нулей на отрезке* $[x_0, x_0 + 3A]$. *В этом случае* f *сохраняет знак на этом отрезке и, предполагая для определённости, что* $f \geqslant 0$, *имеем*

$$\left| \int\limits_{x_0}^{x_0+3A} f(t)g'(t)\,dt \right| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x_0+3A} |f(t) - \frac{A}{2}| \cdot |g'(t)|\,dt + \frac{A}{2}\,|g(x_0 + 3A) - g(x_0)|\,.$$

Проверьте, что первое слагаемое не превосходит $\dfrac{3A^2}{2}$, *а второе не превосходит* A^2.

(в) *Предположим теперь, что* $a \in [x_0, x_0 + 3A]$ *и* $f(a) = 0$. *Предположим для определённости, что* a *лежит в левой половине отрезка* $a \in [x_0, x_0 + 3A]$. *Тогда проверьте, что* $|f(t)| \leqslant |t - a|$ *при* $t \in [a, a + A]$;

$$\int\limits_{a}^{a+A} |f(t)||g'(t)|\,dt \leqslant \frac{A^2}{2}, \text{ и } \int\limits_{[x_0,x_0+3A]\setminus[a,a+A]} |f(t)||g'(t)|\,dt \leqslant 2A^2.$$

Упражнение 3. *(для всех)*

Нам потребуется основная лемма в слегка усиленной и видоизменённой форме.

Пусть f *и* g *– кусочно-гладкие функции на* $[0, +\infty)$, *причём* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f(x)|$, $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|g(x)| \leqslant A$, *а* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|f'(x)|$ *и* $\overline{\lim\limits_{x\to+\infty}}|g'(x)| \leqslant 1$. *Тогда*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{1}{x} \left| \int\limits_{0}^{x} f(x - t)g'(t)\,dt \right| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} A.$$

Докажите эту версию основной леммы.

Часть II

Век девятнадцатый, железный...

Все результаты этой части были великолепно известны к 1900 году. Всюду ниже буквой p мы будем обозначать простое число (так что, например, $\sum\limits_{p\leqslant e^x}$ означает сумму по всем простым числам, не превосходящим e^x, в то время как $\sum\limits_{n\leqslant e^x}$ означает сумму по всем натуральным числам, не превосходящим e^x).

1. Определим функцию Чебышёва $\Lambda(n) \quad (n\in\mathbb{N})$ формулой

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\ln p, & \text{если } n=p^k,\ k\geqslant 1;\\ 0 \text{ для всех остальных } n.\end{cases}$$

Упражнение 4. *Проверьте, что* $\sum\limits_{m\colon m|n}\Lambda(m)=\ln n$ *для всех* $n\in\mathbb{N}$. *(“$m|n$” означает “m является делителем n”)*

2. Рассмотрим функции $w(x)=\sum\limits_{n\leqslant e^x}\frac{\Lambda(n)}{n}$ и $W(x)=\sum\limits_{p\leqslant e^x}\frac{\ln p}{p}$. Заметим, что в $w(x)$ ненулевых слагаемых больше, чем в $W(x)$: кроме простых чисел там есть ещё и степени простых. Однако, при $x\to+\infty$ разность $w(x)-W(x)$ стремится к пределу

$$\sum_{\substack{n\colon n=p^k\\ k\geqslant 2}}\frac{\ln p}{p^k}=\sum_p \ln p\cdot\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{p^k}=\sum_p\frac{\ln p}{(1-1/p)p^2}\leqslant 2\sum_n\frac{\ln n}{n^2}<+\infty$$

Самое важное для нас наблюдение состоит в том, что существование предела $\lim\limits_{x\to+\infty}(W(x)-x)$ или, что то же самое, существование предела $\lim\limits_{x\to+\infty}(w(x)-x)$ влечёт асимптотическую формулу $\pi(z)\sim\frac{z}{\ln z}$.

Доказательство. (Дискретное правило Лопиталя)

Лемма. *Пусть* $F(x)$ *возрастает при больших* x, $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$. *Предположим, что* $\Pi(x)$ *– некоторая неубывающая функция и при всех* $h>0$

$$e^{-3h}\big(F(x)-F(x-h)\big)\leqslant\Pi(x)-\Pi(x-h)\leqslant e^{3h}\big(F(x)-F(x-h)\big)$$

для всех $x\geqslant x_0(h)$. *Тогда*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Pi(x)}{F(x)}=1.$$

Доказательство.

Упражнение 5.

∎

Предположим теперь, что существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}(W(x)-x)=A,\ \text{ т.е. что } W(x)=x+A+o(1)\quad(x\to+\infty)$$

Зафиксируем $h>0$ и рассмотрим разность

$$\sum_{p\colon e^{x-h}<p\leqslant e^x}\frac{\ln p}{p}=W(x)-W(x-h)=h+o(1)\quad(x\to+\infty).$$

Положим $\Pi(x)=\pi(e^x)$. Заметим, что $\frac{\ln u}{u}$ убывает при больших $u>0$ и, следовательно,

$$\frac{x}{e^x}\Big(\Pi(x)-\Pi(x-h)\Big)\leqslant\sum_{p\colon e^{x-h}<p\leqslant e^x}\frac{\ln p}{p}\leqslant\frac{x}{e^{x-h}}\Big(\Pi(x)-\Pi(x-h)\Big).$$

Значит,

$$e^{-2h}h\frac{e^x}{x} \leqslant \frac{e^{x-h}}{x}(h+o(1)) \leqslant \Pi(x)-\Pi(x-h) \leqslant \frac{e^x}{x}(h+o(1)) \leqslant e^h h\frac{e^x}{x},$$

при $x \geqslant x_0(h)$. Пусть теперь $F(x) = \frac{e^x}{x}$. Мы имеем:

$$F(x)-F(x-h) = \frac{e^x}{x} - \frac{e^{x-h}}{x-h} = (1-e^{-h})\frac{e^x}{x} - \frac{he^{x-h}}{x(x-h)}.$$

Заметим, что $e^{-h}h \leqslant 1-e^{-h} \leqslant h$ и что вычитаемое в последнем выражении положительно и ничтожно мало по сравнению с уменьшаемым при больших x. Следовательно,

$$e^{-2h}h\frac{e^x}{x} \leqslant F(x)-F(x-h) \leqslant h\frac{e^x}{x} \quad \text{при } x \geqslant x_0(h).$$

Отсюда немедленно следует, что Π и F удовлетворяют условиям леммы и, стало быть, $\Pi(x) \sim \frac{e^x}{x}$, то есть $\pi(z) \sim \frac{z}{\ln z}$. □

3. Преобразование Чебышёва.

Рассмотрим класс $\mathfrak{B}$ функций на $\mathbb{R}$, тождественно равных 0 на $(-\infty, 0)$. Для всякой $f \in \mathfrak{B}$ определим её преобразование Чебышёва $\mathrm{T}f$ формулой

$$\mathrm{T}f(x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}f(x-\ln n)$$

(поскольку $f(t)=0$ при всех $t<0$, сумма в правой части на самом деле конечна при любом $x \in \mathbb{R}$).

Упражнение 6. *Проверьте, что*

(a) $f \in \mathfrak{B} \Rightarrow \mathrm{T}f \in \mathfrak{B}$

(b) T *– линейный оператор, т.е.* $\mathrm{T}(f+g) = \mathrm{T}f + \mathrm{T}g$ *и* $\mathrm{T}(cf) = c\mathrm{T}f$ *для всех* f, $g \in \mathfrak{B}$, $c \in \mathbb{R}$

(c) T *коммутирует со сдвигом, т.е.* $\mathrm{T}(f_h) = (\mathrm{T}f)_h$, *где* $g_h(x) = g(x-h)$, $h \geqslant 0$ *(последнее требование наложено только для того, чтобы иметь* $g_h \in \mathfrak{B}$*)*

(d) Если $f \in \mathfrak{B}$ *локально интегрируема и* $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ *(реально интеграл берётся от 0, разумеется), то* $F \in \mathfrak{B}$ *и* $\mathrm{T}F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{T}f(t)\,dt$

4. Определим функцию Мёбиуса $\mu(n) \quad (n \in \mathbb{N})$ следующим образом:

(a) $\mu(1) = 1$

(b) Если n делится на квадрат простого числа, то $\mu(n) = 0$

(c) Если $n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_l$, $p_1 < p_2 < \ldots < p_l$, то $\mu(n) = (-1)^l$.

Функция Мёбиуса обладает следующим замечательным свойством:

$$\sum_{m\colon m|n}\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } n=1,\\ 0, & \text{если } n>1.\end{cases}$$

Доказательство. Равенство $\sum\limits_{m\colon m|1}\mu(m) = \mu(1) = 1$ очевидно. Пусть $n>1$ и p – какой-нибудь простой делитель n.

Имеем:

$$\sum_{m\colon m|n}\mu(m) = \sum_{m\colon m|n,\, p\nmid m} + \sum_{m\colon m|n,\, p|m,\, p^2\nmid m} + \sum_{m\colon m|n,\, p^2|m} = \sigma_1+\sigma_2+\sigma_3.$$

Из определения функции Мёбиуса немедленно вытекает, что $\sigma_3 = 0$. Заметим теперь, что если m – делитель n, делящийся на p, но не на p^2, то $m' = \frac{m}{p}$ – делитель n, не делящийся на p, и наоборот. Кроме того, нетрудно проверить, что $\mu(m) = -\mu(m')$ и, стало быть, $\sigma_2 = -\sigma_1$.

Но тогда $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 = \sigma_1 + (-\sigma_1) + 0 = 0$, что и требовалось. □

5. Формула обращения.

   Для $f \in \mathfrak{B}$ положим

$$\mathrm{T}^{-1}f(x) = \sum_{m\geqslant 1} \frac{\mu(m)}{m} f(x - \ln m)$$

   Имеем:

$$\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{T}f)(x) = \mathrm{T}(\mathrm{T}^{-1}f)(x) = \sum_{m\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mu(m)}{mn} f(x - \ln mn) \underset{N=mn}{=} \sum_{N\geqslant 1} \left(\sum_{m\colon m|N} \mu(m) \right) \frac{1}{N} f(x - \ln N) = f(x),$$

   поскольку внутренняя сумма равна 0 при $N > 1$. Стало быть, T^{-1} – оператор, обратный к T. Заметим ещё, что, поскольку $|\mu(n)| \leqslant 1$ при всех n, мы имеем $\left|\mathrm{T}^{-1}f(x)\right| \leqslant \mathrm{T}|f|(x)$.

6. Пусть $g \in \mathfrak{B}$ – непрерывная справа ступенчатая функция, т.е. существует последовательность чисел $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots \to +\infty$, такая что g постоянна на каждом интервале $[x_i, x_{i+1})$, но, возможно, имеет скачки в точках x_i.

   Для всякой $f \in \mathfrak{B}$ определим интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)\, dg(t)$ как сумму $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f(x-x_j)\cdot\Delta_j$, где Δ_j – скачок (возможно, нулевой) функции g в точке x_j, т.е. $\Delta_0 = g(x_0)$, $\Delta_j = g(x_j) - g(x_{j-1})$ при $j \geqslant 1$ (см. рисунок). Нетрудно заметить, что определение корректно (не зависит от выбора x_j) и что сумма $\sum\limits_{j=0}^{\infty} f(x - x_j) \cdot \Delta_j$ на самом деле содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых при любом $x \in \mathbb{R}$.

   Упражнение 7. *Проверьте, что так определённый интеграл линеен по f и g. Покажите также, что, если g не убывает, то интеграл монотонен по f, т.е.*

$$f_1 \leqslant f_2 \Rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} f_1(x-t)\, dg(t) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} f_2(x-t)\, dg(t).$$

7. Зафиксируем $h > 0$. Для локально интегрируемых $f \in \mathfrak{B}$ положим

$$f_*(x) = \frac{1}{h} \int\limits_{x-h}^{x} f(t)\, dt.$$

   Легко видеть, что $f_* \in \mathfrak{B}$. Если f непрерывна, то f_* непрерывно дифференцируема и $f_*'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$. Если f кусочно постоянна, то f_* непрерывна, кусочно линейна и формула $f_*'(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$ имеет место везде за исключением дискретного множества точек.

   Предположим, что $f \in \mathfrak{B}$ непрерывна, а $g \in \mathfrak{B}$ – ступенчатая. Тогда имеет место формула

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_*(x-t)\, dg(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t) g_*'(t)\, dt.$$

   Доказательство. В силу того, что обе части равенства линейны по g, достаточно проверить нашу формулу для функции g равной 0 слева от $x_0 \geqslant 0$ и 1 справа от x_0 (см. рисунок). Левая часть равна (по определению интеграла) $f_*(x-x_0) = \frac{1}{h} \int\limits_{x-x_0-h}^{x-x_0} f(t)\, dt$. Заметим, что

$$g_*'(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & x_0 < t < x_0 + h, \\ 0, & t < x_0 \text{ или } t > x_0 + h. \end{cases}$$

   Отсюда немедленно находим, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t) g_*'(t)\, dt = \int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x-t) \frac{dt}{h} = \frac{1}{h} \int\limits_{x-x_0-h}^{x-x_0} f(t)\, dt.$$

□

8. *Основное тождество:*

   Пусть $f \in \mathfrak{B}$. Тогда

$$\mathrm{T}\left\{ xf(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)\,dw(t) \right\} = x\mathrm{T}f(x)$$

   (всё выражение в фигурных скобках рассматривается как функция переменной x, к которой и применяется преобразование Чебышёва T в левой части.)

   Доказательство.

$$\mathrm{T}\left\{ xf(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)\,dw(t) \right\} = \sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m}(x - \ln m)f(x - \ln m) + \sum_{m\geqslant 1}\sum_{n\geqslant 1} \frac{\Lambda(n)}{mn} f(x - \ln mn) \underset{N=nm}{=}$$

$$= x\sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m} f(x-\ln m) - \sum_{m\geqslant 1} \frac{\ln m}{m} f(x - \ln m) + \sum_{N\geqslant 1}\left(\sum_{n:\, n|N} \Lambda(n)\right)\frac{1}{N} f(x - \ln N) =$$

$$= x\mathrm{T}f(x) - \sum_{m\geqslant 1} \frac{\ln m}{m} f(x-\ln m) + \sum_{N\geqslant 1} \frac{\ln N}{N} f(x - \ln N) = x\mathrm{T}f(x).$$

   □

Часть III
Подумайте, что станет говорить княгиня Марья Алексеевна (вернее, Арнольд, ибо сейчас мы займёмся самым что ни на есть настоящим жонглированием неравенствами и тождествами).

Мы начнём с того, что вычислим преобразование Чебышёва некоторых явно заданных функций. При этом, чтобы не приговаривать каждый раз слова “при $x \geqslant 0$”и “при $x < 0$”, нам будет удобно ввести следующие обозначение: для производной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ мы обозначим через $\{f\}$ функцию, равную f на $[0, +\infty)$ и 0 на $(-\infty, 0)$. Начиная с этого места, фигурные скобки будут употребляться только в этом смысле.

1.
$$\mathrm{T}\{e^{-x}\} = \sum_{1\leqslant n\leqslant e^x} \frac{1}{n} e^{-(x-\ln n)} = \left\{\frac{[e^x]}{e^x}\right\} = \{1\} - r(x),$$

   где $r \in \mathfrak{B}$, $0 \leqslant r(x) \leqslant \{e^{-x}\}$ (в этой и только в этой формуле квадратными скобками обозначена целая часть числа).

   В последующих тождествах через $R(x)$ мы будем обозначать некоторую экспоненциально убывающую функцию класса $\mathfrak{B}$, т.е. функцию, удовлетворяющую оценке $|R(x)| \leqslant Ce^{-\alpha x}$ для некоторых C, $\alpha > 0$. При этом, эта функция может быть разной в разных формулах и даже в разных местах одной и той же формулы. Смысл символа $R(x)$ весьма близок (хотя не идентичен) смыслу символа Ландау $O(e^{-x})$. Через $O(1)$ мы, как обычно, будем обозначать любую ограниченную на всей оси функцию.

   Упражнение 8. *Проверьте “равенства”:*

$$R(x) + R(x) = R(x),\ xR(x) = R(x),\ \int\limits_{-\infty}^{x} R(t)\,dt = \mathrm{const} + R(x), \mathrm{T}R(x) = O(1) \ \textit{и}\ \mathrm{T}^{-1}R(x) = O(1).$$

   (при этом в третьем равенстве константа в правой части есть просто полный интеграл (от $-\infty$ до $+\infty$) функции $R(x)$, стоящий в левой части).

2. Переходя в равенстве $\mathrm{T}\{e^{-x}\} = \{1\} - r(x)$ к первообразным в правой и левой частях, находим $\mathrm{T}\{1 - e^{-x}\} = \{x\} - \{\gamma\} + R(x)$, где $\gamma = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} r(t)\,dt$ лежит между 0 и $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-t}\,dt = 1$. Складывая, получаем:

$$\mathrm{T}\{1\} = \{x\} + \{\beta\} + R(x) \qquad (*)$$

   с некоторым $\beta \in [0, 1]$. Из этих двух тождеств и последней оценки упражнения 8 вытекает любопытная

Мораль. *Если $f \in \mathfrak{B}$ и $\mathrm{T}f = \{ax\} + \{b\} + R(x)$ для некоторых $a, b \in \mathbb{R}$, то $f(x) = O(1)$.*

Доказательство. Пусть $g(x) = f(x) - \{a\} - \{(b - \beta a)e^{-x}\}$. Тогда $\mathrm{T}g(x) = R(x) \Rightarrow g(x) = \mathrm{T}^{-1}R(x) = O(1) \Rightarrow f(x) = O(1)$. □

Ниже мы много раз будем использовать этот замечательный критерий ограниченности функций $f \in \mathfrak{B}$. Интегрируя $(*)$, находим

$$\mathrm{T}\{x\} = \left\{\frac{x^2}{2}\right\} + \{\beta x\} + \{\delta\} + R \qquad (**)$$

с некоторым $\delta \in \mathbb{R}$.

3. Теперь настал момент вспомнить основное тождество

$$\mathrm{T}\left(xf(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-t)\,dw(t)\right) = x\mathrm{T}f(x),$$

доказанное в конце части 2. Применяя его к $f(x) = \{1\}$, находим

$$\mathrm{T}\{x + w(x)\} = \{x^2\} + \{\beta x\} + R(x).$$

Но тогда для функции $q(x) = w(x) - \{x\} + \{\beta\} = \{x + w(x)\} - 2\{x\} + \beta\{1\}$ мы получаем

$$\mathrm{T}q(x) = \{\beta^2 - 2\delta\} + R(x).$$

Отсюда, в частности, следует, что $q(x) = O(1)$, что уже само по себе – нетривиальный результат. Из него, например, можно вывести, что $c\frac{z}{\ln z} \leqslant \pi(z) \leqslant C\frac{z}{\ln z}$ с некоторыми $0 < c < C < +\infty$. Тем не менее, мы хотим пойти дальше и показать, что $q(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Напомним, что нам достаточно "всего лишь" проверить, что существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)$; однако нетрудно видеть, что этот предел может быть лишь 0. В самом деле, для первообразной $Q(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} q(t)\,dt$ функции $q(x)$ имеем:

$$\mathrm{T}Q(x) = \{(\beta^2 - 2\delta)x\} + \mathrm{const} + R(x)$$

и, стало быть, $Q(x) = O(1)$, что невозможно, если предел $\lim\limits_{x\to+\infty} q(x)$ существует и не равен 0. Это замечание об ограниченности первообразной ещё пригодится нам в дальнейшем.

4. Зафиксируем маленькое $h > 0$ и рассмотрим усреднение $q_*(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{x-h}^{x} q(t)\,dt$ функции q. Заметим, что $q_* \in \mathfrak{B}$, непрерывна, дифференцируема всюду за исключением дискретного множества точек и имеет место формула

$$q_*'(x) = \frac{q(x) - q(x-h)}{h}.$$

Мы будем считать, что функция $q_*'(x)$ определена этой формулой на всей оси (даже там, где q_* не дифференцируема).

Заметим теперь, что функции $w(x)$ и $\{\beta\}$ не убывают (напомним, что $\beta \geqslant 0$). Стало быть, функция $q(x) = w(x) - \{x\} + \{\beta\}$ может убывать лишь за счёт слагаемого $-\{x\}$, т.е. $q(x) \geqslant q(x-h) - h$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и, тем самым, $q_*'(x) \geqslant -1$. Вспоминая, что $\mathrm{T}q(x) = \{\beta^2 - 2\delta\} + R(x)$ и что преобразование Чебышёва – линейный оператор, перестановочный со сдвигом, находим:

$$\mathrm{T}q_*'(x) = \frac{1}{h}\left(\mathrm{T}q(x) - \mathrm{T}q(x-h)\right) = R(x)$$

(константа исчезает при вычитании, если только $x \geqslant h$). Применяя основное тождество к $f(x) = q_*'(x)$, получаем:

$$\mathrm{T}\left(xq_*'(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} q_*'(x-t)\,dw(t)\right) = xR(x) = R(x),$$

откуда следует, что

$$xq'_*(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}} q'_*(x-t)dw(t) + O(1).$$

Учитывая, что $q'_* \geqslant -\{1\}$ (выше мы уже проверили, что $q'_* \geqslant -1$, но вспомним, что $q'_* \in \mathfrak{B}$), находим

$$xq'_*(x) \leqslant w(x) + O(1) = x + O(1) \text{ при } x > 0,$$

и, тем самым, $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} q'_*(x) \leqslant 1$ (мы воспользовались здесь доказанным выше утверждением, что разность $w(x) - \{x\}$ ограничена). Комбинируя последнее неравенство с верным для всех $x \in \mathbb{R}$ неравенством $q'_*(x) \geqslant -1$, находим: $\varlimsup\limits_{x\to+\infty} |q'_*(x)| \leqslant 1$.

5. Рассмотрим теперь второе усреднение $q_{**}(x) = (q_*)_*(x)$ функции $q(x)$ и применим к нему основное тождество. Мы получим

$$\mathrm{T}\left(xq_{**}(x) + \int\limits_{\mathbb{R}} q_{**}(x-t)\,dw(t)\right) = x\cdot \mathrm{T}q_{**}(x) = x\cdot \big(\mathrm{T}q\big)_{**}(x) = x\cdot R_{**}(x) = xR(x) = R(x)$$

(проверка тождеств $\mathrm{T}f_*(x) = \big(\mathrm{T}f\big)_*(x)$ и $R_*(x) = R(x)$ предоставляется читателю в качестве несложного упражнения).

Следовательно,

$$xq_{**}(x) = -\int\limits_{\mathbb{R}} q_{**}(x-t)\,dw(t) + O(1) = -\int\limits_{\mathbb{R}} q_*(x-t)w'_*(t)\,dt + O(1).$$

Нам хотелось бы заменить $w'_*(t)$ в этой формуле на $q'_*(t)$. Мы не предполагаем у читателя больших знаний по теории интегрирования (возможно, зря), так что наше рассуждение будет чуть занудливее, чем хотелось бы.

Поскольку $w(x) = q(x) + \{x\} - \{\beta\}$, мы имеем:

$$w'_*(t) = q'_*(t) + \{x\}'_*(t) - \{\beta\}'_*(t).$$

Далее,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} q_*(x-t)\{\beta\}'_*(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} q_{**}(x-t)d\{\beta\}(t) = \beta q_{**}(x) = O(1),$$

поскольку ограниченность q влечёт ограниченность q_* и q_{**}. Оценим теперь интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} q_*(x-t)\{x\}'_*(t)\,dt$. Нас при этом будут интересовать лишь большие положительные значения x. Функцию $\{x\}_*(t)$ несложно вычислить: она равна 0, если $t \leqslant 0$; $\frac{t^2}{2h}$ при $0 \leqslant t \leqslant h$; и $t - \frac{h}{2}$ при $t \geqslant h$. Таким образом,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} q_*(x-t)\{x\}'_*(t) = \int\limits_0^h q_*(x-t)\frac{t\,dt}{h} + \int\limits_h^x q_*(x-t)\,dt.$$

Первый интеграл есть $O(1)$, как интеграл равномерно ограниченной функции по фиксированному конечному промежутку. Второй интеграл равен $Q_*(x-h)$; где $Q_*(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} q_*(t)\,dt$ – первообразная (непрерывной) функции q_*. Проверить ограниченность функции Q_* можно двумя способами. Первый состоит в том, чтобы проверить, что Q_* действительно является усреднением первообразной Q функции q, а последняя, как мы видели выше, ограничена. Однако при этом придётся переставить два интеграла, т.е. проявить способность, которую мы у читателя заранее не предполагаем. Другой способ заключается в использовании тождества

$$\mathrm{T}q_*(x) = \big(\mathrm{T}q\big)_*(x) = \{\beta^2 - 2\delta\}_*(x) + R_*(x) = \{\beta - 2\delta\} + R(x)$$

и последующем повторении рассуждения, показывающего ограниченность $Q(x)$. Здесь требуется лишь переставлять интегралы и конечные суммы, что читатель знать обязан.

6. Как бы то ни было, мы имеем

$$xq_{**}(x) = -\int_0^x q_*(x-t)q_*'(t)\,dt + O(1)$$

для всех $x > 0$. Взяв модуль левой и правой части, деля на x и переходя к верхнему пределу при $x \to +\infty$, находим:

$$\varlimsup_{x\to+\infty} |q_{**}(x)| = \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left|\int_0^x q_*(x-t)q_*'(t)\,dt\right|.$$

Пусть $A = \varlimsup_{x\to+\infty} |q(x)|$. Как мы видели выше, $A < +\infty$. Заметим, что $\varlimsup_{x\to+\infty} |q_*(x)| \leqslant \varlimsup_{x\to+\infty} |q(x)| \leqslant A$ и следовательно, в силу основной леммы правая часть не превосходит $\sqrt{\frac{2}{\pi}}A$.

Упражнение 9. *Напомним, что $q(x) - q(x-s) \geqslant -s$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $s \geqslant 0$. Покажите, что тогда и $q_*(x) - q_*(x-s) \geqslant -s$ для $x \in \mathbb{R}$, $s \geqslant 0$.*

Упражнение 10. *Предположим, что локально интегрируемая функция f удовлетворяет неравенству $f(x) - f(x-s) \geqslant -s$ для $x \in \mathbb{R}$, $s \geqslant 0$. Проверьте, что тогда $\varlimsup_{x\to+\infty} |f_*(x)| \geqslant \varlimsup_{x\to+\infty} |f(x)| - \frac{h}{2}$.*

Подсказка: убедитесь, что

$$f(x-h) - \frac{h}{2} \leqslant f_*(x) \leqslant f(x) + \frac{h}{2}.$$

Используя результаты упражнений 9 и 10, находим

$$\varlimsup_{s\to+\infty} |q_{**}(x)| \geqslant \varlimsup_{x\to+\infty} |q_*(x)| - \frac{h}{2} \geqslant \varlimsup_{x\to+\infty} |q(x)| - h = A - h.$$

Значит, $A - h \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}A$. Поскольку это неравенство выполнено для *любого* $h > 0$, мы заключаем, что $A = 0$. Существование предела $\lim\limits_{x\to+\infty} \bigl(w(x) - x\bigr)$, а с ним и теорема об асимптотике простых чисел, полностью доказаны.