Ужас в кубе

В.А.Малышев

Формулируются три задачи, решение каждой из которых приводит к доказательству неограниченности последовательности элементов непрерывной дроби кубической иррациональности $\sqrt[3]{M}$

Введение

Пусть целое $M \geq 2$ не является полным кубом. Разложим $\sqrt[3]{M}$ в непрерывную дробь

$$\sqrt[3]{M} \;=\; a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}.$$

Многочисленные проверки показывают, что последовательность $a_0, a_1, \ldots$ неограничена. При доказательстве основная проблема заключается в скупости информации относительно непрерывных дробях кубических иррациональностей [1]. Предполагая ограниченность $a_0, a_1, \ldots$, мы стремимся получить противоречие с ранее доказанными фактами, а таких фактов практически нет! Предлагаемые три задачи возникли при попытках от противного доказать неограниченность $a_0, a_1, \ldots$.

Для заданного целого $N \geq 2$ рассмотрим целочисленные последовательности $a_0, a_1, \ldots$ такие, что

$$1 \leq a_k \leq N$$

при всех $k = 0, 1, \ldots$. Положим

$$\begin{aligned} P_k &= a_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ Q_k &= a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}, \end{aligned}$$

где $P_{-1} = 1, P_0 = a_0$ и $Q_{-1} = 0, Q_0 = 1$. Требуется доказать, что среди пределов

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k}{Q_k}$$

нет кубических иррациональностей $\sqrt[3]{M}$.

1. Шли к $\sqrt[3]{M}$, а пришли к $\sqrt{N(N+4)}$

Пусть P_k^*/Q_k^* доставляет решение задачи минимизации

$$\left|M - \frac{P_k^3}{Q_k^3}\right| \longrightarrow \min$$

при условии

$$1 \le a_0, a_1, \ldots, a_k \le N.$$

Доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k^*}{Q_k^*} = A + B\sqrt{N(N+4)}$$

с рациональными A и B. Например, при $M = 3$ и $N = 3$ пределом является число

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3+\sqrt{21}}} = \frac{11+3\sqrt{21}}{8+2\sqrt{21}}.$$

Поясним появление квадратической иррациональности $\sqrt{N(N+4)}$. Оказывается при решении задачи минимизации

$$\left|M - \frac{P_k^3}{Q_k^3}\right| \longrightarrow \min,$$

начиная с некоторого номера n последовательность $a_0, a_1, \ldots$ становится периодической

$$a_0, a_1, \ldots, a_n,\ 1, N, 1, N, 1, N, \ldots\ .$$

Остается заметить, что

$$1 + \cfrac{1}{N + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{N + \cdots}}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}\sqrt{N(N+4)}.$$

2. Просто гуляли, а пришли к $\sqrt{N(N+4)}$

Пусть P_k^*/Q_k^* доставляет решение задачи минимизации

$$\left\{\frac{P_k^3}{Q_k^3}\right\} \longrightarrow \min$$

при условии

$$1 \le a_0, a_1, \ldots, a_k \le N.$$

Здесь через $\{x\} = x - [x]$ обозначена дробная часть числа x.

Доказать, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{P_k^*}{Q_k^*} = A + B\sqrt{N(N+4)}$$

с рациональными A и B. Например, при $N = 2$ пределом является число

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\sqrt{3}}}} = \frac{17 + 12\sqrt{3}}{7 + 5\sqrt{3}}.$$

Соотношение

$$\left\{\frac{P_k^3}{Q_k^3}\right\} = \left\{\frac{P_k^3}{Q_k^3} - M\right\} = \left\{\frac{P_k^3 - MQ_k^3}{Q_k^3}\right\}$$

поясняет связь с проблемой неограниченности.

3. Коварная некоммутативность 2×2-матриц

Зададим на множестве целочисленных 2×2-матриц

$$A = \begin{bmatrix} p & u \\ q & v \end{bmatrix}$$

функцию

$$F(A) = (Mq^3 - p^3)(Mv^3 - u^3).$$

Доказать, что при $1 \le a_0, a_1, \ldots, a_k \le N$ существует только конечное число матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

для которых $F(A) < 0$. Здесь $k = 0, 1, \ldots$.

Связь этой задачи с проблемой неограниченности заключается в соотношении

$$\begin{bmatrix} P_k & P_{k-1} \\ Q_k & Q_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Успехов !!!

Литература

[1] А.Я. Хинчин. Цепные дроби. М.: Наука, 1978.

Владимир Малышев
wmal@ryb.adm.yar.ru