О ПРОБЛЕМЕ ДОЩЕЧЕК

Ф. Л. Назаров

Задача, о которой здесь пойдет речь, формулируется очень просто. Назовём шириной $h(K)$ выпуклого компакта K на плоскости ширину самой узкой полосы, содержащей K.

Упражнение 1.

Найдите $h(K)$, если K — круг, треугольник или параллелограмм.

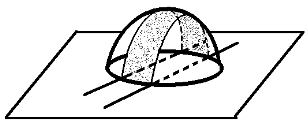
Верно ли, что для любого семейства полос с ширинами $h_1, \ldots, h_n$, в совокупности покрывающих K, имеет место неравенство

$$h_1 + \cdots + h_n \geq h(K) \qquad (*)$$

(т. е. верно ли, что наиболее "экономное" (в смысле суммарной ширины участвующих полос) покрытие K есть просто самая узкая полоса, в которую K можно поместить.)

Задача была поставлена Тарским в самом начале века и продержалась … более 30 лет.

Почти сразу было найдено решение для круга. Идея (не совсем тривиальная) состоит в том, чтобы построить над кругом полусферу и заметить, что площадь части этой полусферы, которая проектируется в полосу ширины h, пропорциональна h и не зависит от положения полосы (если только обе граничные прямые пересекают круг, т. е. если в полосе нет "бесполезной" ширины).



Упражнение 2.

Докажите это замечательное свойство сферы и выведите из него неравенство $(*)$ для круга.

Тем не менее уже для равностороннего греугольника T задача казалась безнадежно сложной. Напрашивающаяся идея попробовать построить над треугольником поверхность с таким же свойством, как у полусферы, заведомо обречена на провал: если бы такая поверхность существовала, то выполнялось бы не не только неравенство $(*)$, но и неравенство

$$h_1 + \cdots + h_n \geq 2h(T)$$

для любого "двукратного" (т. е. такого, что каждая точка лежит по крайней мере в двух полосах) покрытия T. Однако,

Упражнение 3.

Равносторонний треугольник T можно двукратно покрыть пятью полосами ширины $\frac{1}{3}h(T)$ каждая.

Задача была впервые решена Т. Бангом и ... году. Впоследствии решение несколько раз упрощалось. Последнее упрощение (переводящее проблему в разряд "тривиальных") принадлежит снова самому Бангу. Оно и будет изложено ниже.

Итак, пусть дан выпуклый компакт K ширины h и несколько полос $P_1, \ldots, P_n$ с ширинами $h_1, \ldots, h_n$ соответственно, причем $h_1 + \ldots + h_n < k$. Наша цель состоит в том, чтобы найти точку K, не лежащую ни в одной из этих полос.

Пусть $\bar{e}_j$ – вектор, ортогональный прямым, ограничивающим полосу P_j и равный по длине половине ширины этой полосы, т. е. $|\bar{e}_j| = \frac{h_j}{2}$. Тогда множество точек $\bar{x}$ полосы P_j (которую мы для удобства считаем открытой) задается неравенством типа

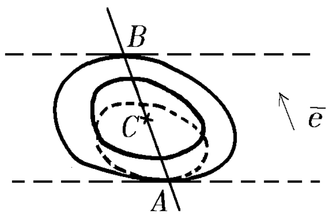
$$|\langle \bar{x}, \bar{e}_j \rangle - a_j| < |\bar{e}_j|^2 \qquad (**)$$

(здесь угловые скобки означают скалярное произведение векторов, а a_j – вещественное число, равное скалярному произведению $\bar{e}_j$ и вектора, идущего из начала координат в любую точку, лежащую на "средней линии" полосы P_j).

Лемма 1.

Пусть M – выпуклый компакт ширины по крайней мере h, $\bar{e}$ – вектор длины $|e| < \frac{h}{2}$. Тогда $(M + \bar{e}) \cap (M - \bar{e})$ – выпуклый компакт ширины по крайней мере $h - 2|\bar{e}|$. (Как обычно, $M + \bar{e} = \{\bar{x} + \bar{e} \,:\, \bar{x} \in M)$

Доказательство:



Рассмотрим всевозможные отрезки, получающиеся в результате сечения компакта M прямыми параллельными $\bar{e}$ и выберем из них отрезок AB, длина которого максимальна. Нетрудно проверить (сделайте это), что опорные прямые к компакту K в точках A и B параллельны (если они не единственны, то это утверждение надо понимать как возможность выбрать пару параллельных опорных прямых).

Расстояние между этими прямыми заведомо не превышает длину l отрезка AB и, по определению ширины, не меньше h. Стало быть $l \geq h$.

В силу выпуклости M содержит свой образ M' при гомотетии с центром A и коэффициентом $\frac{l-2|e|}{l}$. Нетрудно проверить, что при сдвиге на $\bar{e}$ M' переходит в образ $\tilde{M}$ компакта M при гомотетиии с центром в середине C отрезка AB и тем же коэффициентом, т. е. $(M + \bar{e}) \supset \tilde{M}$. Аналогично $(M - \bar{e}) \supset \tilde{M}$ и, тем самым, $(M + \bar{e}) \cap (M - \bar{e}) \supset \tilde{M}$, т. е. ширина этого пересечения не меньше

$$h(\tilde{M}) = \frac{l - 2|e|}{l} h \geq \frac{h - 2|e|}{h} h = h - 2|e|,$$

что и требовалось.

Следствие.

Пересечение $\bigcap\limits_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm 1}(K+\sum\limits_j \varepsilon_j\bar e_j)$ непусто.

Доказательство:

Из леммы 1 и равенства

$$\bigcap_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm 1}(K+\sum_{j=1}^n \varepsilon_j\bar e_j) = \big([\bigcap_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}=\pm 1}(K+\sum_{j=1}^n \varepsilon_j\bar e_j)]+\bar e_n\big)\bigcap\big([\dots]-\bar e_n\big)$$

индукцией по n немедленно получаем, что это пересечение имеет ширину не менее $h-\sum_1^n h_j>0$.

Пусть $\bar{x_0}$ – какая-либо из точек этого пересечения. Тогда точка $\bar{x_0}+\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\bar{e_j}$ лежит в K при любом выборе знаков $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm1$. Следующий (и последний) этап доказательства состоит в том, чтобы проверить, что независимо от выбора $\bar{x_0}$ хоть одна из этих точек не попадает в объединение полос $P_1\cup\dots\cup P_n$.

Вспомним, что точка $\bar x=\bar{x_0}+\sum_{j=1}^n\varepsilon_j\bar{e_j}$ заведомо не лежит в полосе P_i, если нарушено неравенство $(**)$, т. е. если

$$\varepsilon_i(\langle\bar x,\bar e_i\rangle-a_i)\ge|\bar e_i|^2$$

Значит, все будет сделано, если мы найдем расстановку знаков $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n=\pm1$, для которой

$$\varepsilon_i(\langle\bar x,\bar e_i\rangle-a_i)=\varepsilon_i\underbrace{(\langle\bar{x_0},\bar e_i\rangle-a_i)}_{\stackrel{\text{def}}{=}\omega_i}+\sum_{j=1}^n\varepsilon_i\varepsilon_j\langle\bar e_i,\bar e_j\rangle\ge|\bar e_i|^2$$

для всех i, т. е.

$$\varepsilon_i\omega_i+\sum_{j:j\ne i}^n\varepsilon_i\varepsilon_j\langle\bar e_i,\bar e_j\rangle\ge 0 \qquad \text{для всех } i.$$

Положим

$$\Phi(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)=\frac12\Big(\sum_{i=1}^n\varepsilon_i\omega_i+\sum_{i,j:i<j}^n\varepsilon_i\varepsilon_j\langle\bar e_i,\bar e_j\rangle\Big)$$

Заметим, что при замене ε_i на $-\varepsilon_i$ значение $\Phi(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ изменяется в точности на $-\varepsilon_i\omega_i-\sum\limits_{j:j\ne i}^n\varepsilon_i\varepsilon_j\langle\bar e_i,\bar e_j\rangle$. и, стало быть, в качестве искомой расстановки знаков можно взять ту, для которой значение $\Phi(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ максимально.

<u>Заключительные замечания.</u>

1) Заметим, что в доказательстве нигде не используется специфика плоскости и что, тем самым, результат остается верным в любой размерности (под полосой при этом надо понимать область, заключенную между двумя параллельными гиперплоскостями).

2) Неравенство $h_1+\dots+h_n\ge h$ можно записать в виде $\frac{h_1}{h}+\dots+\frac{h_n}{h}\ge1$. Верно ли, что знаменатели в этих дробях можно заменить на ширины H_i множества K в

направлениях полос P_i (т. е. H_i – ширина самой узкой полосы с границами параллельными границам полосы P_i ширины h_i)? Ответ неизвестен даже в разменности 2.

3) Пусть $\mathcal{H}_j(K) = \inf\{\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{n} h_i$: K можно покрыть в j слоев полосами ширины $h_1, \ldots h_n\}$. Теорема Банга утверждает, что $\mathcal{H}_1(K) = h(K)$. Пример из упражнения 2 показывает, что $\mathcal{H}_2(K)$, вообще говоря, строго меньше $h(K)$ (кстати, можете ли Вы вычислить $\mathcal{H}_2(T)$?). А что вообще можно сказать о последовательности чисел $\{\mathcal{H}_j(K)\}_{j=1}^{\infty}$?