Теорема Болла о сечениях единичного куба

Теорема. *Пусть* $t \in \mathbb{R}$, ω *– единичный вектор из* $\mathbb{R}^n$ $(n>1)$. *Через* $\sigma(\omega,t)$ *обозначим лебегову меру сечения куба* $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ *гиперплоскостью* $\{x\in\mathbb{R}^n \,|\, (x,\omega)=t\}$.

Тогда $\sigma(\omega,t)\leqslant\sqrt{2}$.

При этом равенство возможно лишь в случае, когда $t=0$, *а вектор* ω *имеет две ненулевые координаты, по абсолютной величине равные* $\frac{1}{\sqrt{2}}$, *то есть экстремальное сечение – это прямое произведение куба* $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^{n-2}$ *и диагонали квадрата* $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^2$.

Доказательство. Получим сначала интегральное представление для $\sigma(\omega,t)$. Для этого зафиксируем вектор ω и вычислим преобразование Фурье функции $S(t)=\sigma(\omega,t)$. Его легко найти, вычислив двумя способами интеграл J от $e^{-2\pi iu(\omega,x)}$ $(u\in\mathbb{R})$ по кубу $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$. С одной стороны

$$J=\int_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n} e^{-2\pi iu(\omega,x)}dx=\prod_{j=1}^{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi iu\omega_j x_j}dx_j=\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\pi\omega_j u}{\pi\omega_j u}.$$

С другой стороны, пусть χ – характеристическая функция куба $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$ и $x=Ly$ – такое ортогональное преобразование в $\mathbb{R}^n$, при котором y_1 переходит в (ω,x). Тогда с помощью теоремы Фубини имеем

$$J=\int_{\mathbb{R}^n}\chi(x)e^{-2\pi iu(\omega,x)}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\chi(Ly)e^{-2\pi iuy_1}dy=\int_{-\infty}^{\infty}S(y_1)e^{-2\pi iuy_1}dy_1=\hat{S}(u).$$

Сравнив эти два равенства, получаем, что $\hat{S}(u)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\pi\omega_j u}{\pi\omega_j u}$. Следовательно

$$\sigma(\omega,t)=S(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{S}(u)e^{2\pi iut}du=\int_{-\infty}^{\infty}e^{2\pi iut}\prod_{j=1}^{n}\frac{\sin\pi\omega_j u}{\pi\omega_j u}du.$$

Это равенство можно получить и не используя преобразование Фурье: в двумерном случае оно проверяется прямым вычислением, а общий случай получается индукцией по размерности.

Из полученного представления для $\sigma(\omega,t)$ следует, что обращение в нуль какой-нибудь координаты вектора ω равносильно понижению размерности задачи (впрочем, это и так очевидно) и поэтому, не умаляя общности, можно считать $\omega_j\neq 0$ для всех $j=1,\dots,n$.

Докажем теперь, что $\sigma(\omega,t)\leqslant\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\omega_j|}$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Для этого обозначим через $I_n(\omega,t)$ интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, и заметим, что он определен для всех ненулевых векторов $\omega\in\mathbb{R}^n$. Убедимся, что для всех $\omega\neq(0,\dots,0)$ справедливо неравенство $I_n(\omega,t)\leqslant\frac{1}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\omega_j|}$. Можно считать, что $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}|\omega_j|=\omega_1$. Легко видеть, что (далее $\bar{\omega}=(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$)

$$I_n(\omega,t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}I_{n-1}(\bar{\omega},t+\omega_n\theta)d\theta.$$

Поэтому достаточно доказать, что $0 \leqslant I_{n-1} \leqslant \frac{1}{\omega_1}$. Последовательно понижая размерность, получаем, что достаточно оценить интеграл Дирихле

$$I_1(\omega_1, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t u} \frac{\sin \pi\omega_1 u}{\pi\omega_1 u} du,$$

который принимает лишь три значения – $0, \frac{1}{\omega_1}, \frac{1}{2\omega_1}$. Таким образом, если $\omega \neq (0, ..., 0)$, то $0 \leqslant I_n(\omega, t) \leqslant \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\omega_j|}$. В частности, если $||\omega|| = 1$, то

$$\sigma(\omega, t) = I_n(\omega, t) \leqslant \frac{1}{\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\omega_j|}.$$

Поэтому $\sigma(\omega, t) < \sqrt{2}$ в случае $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |\omega_j| > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Далее считаем, что $|\omega_j| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ для всех j. Пользуясь неравенством Гельдера, получаем (напомним, что $\omega_1, ..., \omega_n \neq 0$)

$$\sigma(\omega, t) \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^{n} \left| \frac{\sin \pi\omega_j u}{\pi\omega_j u} \right| du \leqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin \pi\omega_j u}{\pi\omega_j u} \right|^{\frac{1}{\omega_j^2}} du \right)^{\omega_j^2}.$$

Покажем теперь, что все возникшие интегралы не превосходят $\sqrt{2}$, причем равенство возможно лишь в случае $|\omega_j| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (так как $\omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2 = 1$, то отсюда сразу следует требуемая оценка $\sigma(\omega, t) \leqslant \sqrt{2}$, причем равенство возможно лишь в случае $|\omega_1| = \cdots = |\omega_n| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть в двумерном случае с $\omega_1, \omega_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$).

Если $|\omega_j| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то j–ый интеграл, очевидно, равен $\sqrt{2}$. В случае $|\omega_j| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ требуемая оценка этих интегралов (после замены $x = \omega_j u,\ p = \frac{1}{2\omega_j^2}$) сводится к проверке неравенства Болла

$$\forall p > 1 \quad \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin \pi x}{\pi x} \right|^{2p} dx < \frac{1}{\sqrt{p}}$$

(именно здесь используется неравенство $|\omega_j| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть $p = \frac{1}{2\omega_j^2} > 1$).

В работе Болла основные технические трудности связаны как раз с доказательством этого неравенства. Мы приведем другое рассуждение. Заметим, что пользуясь интегралом Эйлера-Пуассона $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$, неравенство Болла можно записать в виде $\int_0^\infty g^p < \int_0^\infty f^p$, где $f(x) = e^{-\pi x^2},\ g(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$ (при $p = 1$ будет равенство). Таким образом, нужно найти такое условие на неотрицательные функции f и g, имеющие равные интегралы, которое гарантировало бы неравенство $\int_0^\infty f^p > \int_0^\infty g^p$ при $p > 1$. В следующей лемме такое достаточное условие дается в терминах функции распределения. Функция распределения F неотрицательной на множестве X функции f определена на $(0, \infty)$ и для любого $y > 0$ ее значение $F(y)$ равно мере множества $\{x \in X | f(x) \geqslant y\}$. Ясно, что функция распределения функции f^p равна $F(y^{\frac{1}{p}})$.

Важную роль играет легко проверяемое равенство $\int_X f(x)dx = \int_0^\infty F(y)dy$ (для доказательства достаточно вычислить площадь подграфика f, спроектировав его на ось OY). Отметим также, что

$$\int_X f^p(x)dx = \int_0^\infty F(y^{\frac{1}{p}})dy = p\int_0^\infty y^{p-1}F(y)dy, \quad p>0.$$

Лемма. *Пусть неотрицательные на множестве X функции f и g таковы, что $\int_X f = \int_X g < \infty$, а разность $(F-G)$ их функций распределения лишь один раз меняет знак (с "$-$" на "$+$") на $(0,\infty)$, то есть существует такое число $y_0>0$, что $F(y)\geqslant G(y)$ для $y>y_0$ и $F(y)\leqslant G(y)$ при $y<y_0$. Тогда $\int_X f^p \geqslant \int_X g^p$ для $p>1$ (равенство возможно лишь в двух случаях: $\int_X f^p = \int_X g^p = +\infty$ или $F(y)=G(y)$ для почти всех $y>0$.)*

Доказательство. Считая, $\int_X f^p < +\infty$, и учитывая, что $\int_0^\infty (F(y)-G(y))\,dy = \int_X (f(x)-g(x))dx = 0$, имеем

$$\int_X f^p - \int_X g^p = p\int_0^\infty y^{p-1}\left(F(y)-G(y)\right)dy = p\int_0^\infty \left(y^{p-1}-y_0^{p-1}\right)\left(F(y)-G(y)\right)dy \geqslant 0,$$

так как обе разности, стоящие под знаком интеграла, одновременно меняют знак в точке y_0. Лемма доказана.

Сравним теперь функции распределения функций $g(x) = \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$ и $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Для этого введем обозначение: $y_m = \max\limits_{(m,m+1)} g$, $m\in\mathbb{N}$. Нам потребуется двусторонняя оценка (она почти очевидна):

$$\frac{1}{\pi^2(m+\frac{1}{2})^2} < y_m < \frac{1}{\pi^2 m^2}.$$

Пользуясь разложением синуса в бесконечное произведение, получаем, что на промежутке (0,1) функция g убывает и не превосходит $e^{-(\pi x)^2/3}$:

$$g(x) = \prod_{k=1}^\infty \left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^2 \leqslant \prod_{k=1}^\infty e^{-2x^2/k^2} = e^{-(\pi x)^2/3}.$$

Поэтому $G(y)\leqslant \sqrt{\frac{3}{\pi^2}\ln\frac{1}{y}}$ для $y\in(y_1,1)$. Ясно, что $F(y) = \sqrt{\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{y}}$ для $y\in(0,1)$. Отсюда следует, что разность $(F-G)$ положительна на $(y_1,1)$. Чтобы убедиться, что перемена знака $(F-G)$ происходит лишь один раз (так как $\int_0^\infty(F-G) = \int_0^\infty(f-g) = 0$, то разность $(F-G)$ меняет знак), достаточно проверить, что $(F-G)$ возрастает на $(0,y_1)$. Так как функции F и G непрерывны и убывают, то достаточно доказать, что $|G'(y)| > |F'(y)|$, если $y\in(y_{m+1},y_m)$, $m\in\mathbb{N}$. Легко видеть, что для таких y справедливо равенство

$$G'(y) = -\sum_{t>0:\ g(t)=y} \frac{1}{|g'(t)|}.$$

Уравнение $g(t)=y$ имеет единственный корень на (0,1) и два корня на промежутках $(k,k+1)$ при $k=1,...,m$. Оценим $|g'(t)|$ сверху:

а) если $t \in (k, k+1)$, то

$$|g'(t)| = 2\sqrt{y}\left|\frac{\cos \pi t}{t} - \frac{\sin \pi t}{\pi t^2}\right| \leqslant \frac{2\sqrt{y}}{t}\left(1 + \frac{|\sin \pi(t-k)|}{\pi t}\right) \leqslant \frac{2\sqrt{y}}{t}\left(1 + \frac{\pi(t-k)}{\pi k}\right) = \frac{2\sqrt{y}}{k};$$

б) если $t \in (0,1)$, то $|g'(t)| = \frac{2\sqrt{y}}{\pi t^2}(\sin \pi t - \pi t \cos \pi t) \leqslant \pi\sqrt{y}$ (последнее неравенство вытекает из неравенства $\sin\theta - \theta\cos\theta \leqslant \frac{\theta^2}{2}$, которое легко проверяется дифференцированием).

Поэтому для $y \in (y_{m+1}, y_m)$ имеем

$$|G'(y)| \geqslant \frac{1}{\pi\sqrt{y}} + 2\sum_{k=1}^{m}\frac{k}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\frac{2}{\pi} + m + m^2\right)$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{G'(y)}{F'(y)}\right| = |G'(y)|\, 2y\sqrt{\pi \ln\frac{1}{y}} \geqslant \left(\frac{2}{\pi} + m + m^2\right)\sqrt{\pi y \ln\frac{1}{y}}.$$

Так как $y \leqslant y_1 < \frac{1}{\pi^2} < \frac{1}{e}$, то функция $y\ln\frac{1}{y}$ возрастает, поэтому для $y > y_{m+1} > \frac{1}{\pi^2(m+\frac{3}{2})^2}$ мы имеем

$$\left|\frac{G'(y)}{F'(y)}\right| > \left(\frac{2}{\pi} + m + m^2\right)\sqrt{\frac{\pi\ln\pi^2(m+\frac{3}{2})^2}{\pi^2(m+\frac{3}{2})^2}} = \frac{\frac{2}{\pi} + m + m^2}{\frac{3}{2} + m}\sqrt{\frac{2}{\pi}\ln\pi(m+\frac{3}{2})} > \sqrt{\frac{2}{\pi}\ln\frac{5\pi}{2}}.$$

Осталось заметить, что правая часть этого неравенства больше единицы, так как $\ln 5x > x$ при $x \in [1,2]$ (это очевидно на концах промежутка, а внутри его выполнено в силу вогнутости функции $\ln x$). ВСЕ ДОКАЗАНО.

В заключение покажем, что мера σ_n сечения гиперплоскостью, проходящей через центр куба и ортогональной его главной диагонали, то есть $\sigma_n = \sigma((\pm\frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \pm\frac{1}{\sqrt{n}}), 0)$, при $n \to \infty$ стремится к $\sqrt{\frac{6}{\pi}} < \sqrt{2}$. Из полученного интегрального представления для $\sigma(\omega, t)$ следует, что $\sigma_n = \int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin\frac{\pi u}{\sqrt{n}}}{\frac{\pi u}{\sqrt{n}}}\right)^n du = \int_{\mathbb{R}} f_n(u)du$. С помощью формулы Тейлора сразу получаем, что $f_n(u) \to e^{-\frac{\pi^2}{6}u^2}$ для всех $u \in \mathbb{R}$. Для обоснования предельного перехода $\sigma_n = \int_{\mathbb{R}} f_n(u)du \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\pi^2}{6}u^2}du = \sqrt{\frac{6}{\pi}}$ достаточно проверить, что $|f_n(u)| \leqslant \frac{1}{1+u^2}$ для всех $u \in \mathbb{R}$ и $n \geqslant 4$.

Если $u \in [0, \sqrt{n}]$, то разложив синус в бесконечное произведение, получим

$$0 \leqslant f_n(u) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{u^2}{nk^2}\right)^n \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{k^2}} = e^{-\frac{\pi^2}{6}u^2} \leqslant e^{-u^2} \leqslant \frac{1}{1+u^2}.$$

Для $u \in [\sqrt{n}, n]$ имеем $|f_n(u)| \leqslant \frac{1}{\pi^n} \leqslant \frac{1}{\pi^u} \leqslant \frac{1}{1+u^2}$. Наконец, для $u \geqslant n \geqslant 4$ имеем $|f_n(u)| \leqslant \left(\frac{\sqrt{n}}{\pi u}\right)^n \leqslant \frac{n^2}{\pi^4 u^4} \leqslant \frac{1}{\pi^4 u^2} \leqslant \frac{1}{1+u^2}$.

ЛИТЕРАТУРА

K.M.Ball, Cube slicing in $\mathbb{R}^n$, Proc.Amer. Math.Soc. 97:3(1986),465-473.