НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ И КАЛЕНДАРЬ

А. А. Лодкин

Тропический год (средний промежуток времени от одного весеннего равноденствия до следующего) содержит 365.242193... суток [1]. Принятая сейчас система поправок к календарю с помощью введения високосных дней призвана привести календарный год в соответствие с движением Солнца. Так, добавление одного дня каждые 4 года удлиняет среднюю продолжительность года на 0.25 суток (юлианский год), введение вековой поправки в -1 сутки («выпадающие» високосные дни) приводит к средней продолжительности года

$$\frac{(365 \cdot 100) + 25 - 1}{100} = 365.24 \text{ суток},$$

а добавление одного високосного дня каждые 400 лет делает среднюю продолжительность года в течение четырех веков равной

$$\frac{(365 \cdot 400) + (25 - 1) \cdot 4 + 1}{400} = 365.2425 \text{ суток}$$

(григорианский год), что дает погрешность 0.000307 суток.

Представление иррациональных чисел непрерывными, или цепными, дробями (см., например, [2]) дает очень хороший способ получения рациональных приближений этих чисел. Так, отрезки непрерывной дроби (так называемые подходящие дроби) дают наивысшую точность приближения среди всех дробей с теми же знаменателями. Поясним ситуацию на примере приближения длины Y тропического года. Разложение ее в цепную дробь имеет вид

$$Y = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{11 + \cdots}}}}} = [365; 4, 7, 1, 3, 11, \cdots].$$

Обрывая цепную дробь на k-ом месте, получаем рациональное приближение r_k числа Y. Так,

$$
\begin{aligned}
r_1 &= [365; 4] = \frac{1461}{4} = 365\frac{1}{4} = 365.25,\\
r_2 &= [365; 4, 7] = \frac{10592}{29} = 365\frac{7}{29} = 365.24138\ldots,\\
r_3 &= [365; 4, 7, 1] = \frac{12053}{33} = 365\frac{8}{33} = 365.24242\ldots,\\
r_4 &= [365; 4, 7, 1, 3] = \frac{46751}{128} = 365\frac{31}{128} = 365.242188\ldots,\\
r_5 &= [365; 4, 7, 1, 3, 11] = \frac{526314}{1441} = 365\frac{349}{1441} = 365.242193\ldots.
\end{aligned}
$$

Погрешности $\Delta_k = r_k - Y$ оказываются такими:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &\approx 7.8 \cdot 10^{-3},\\
\Delta_2 &\approx -8.1 \cdot 10^{-4},\\
\Delta_3 &\approx 2.3 \cdot 10^{-4},\\
\Delta_4 &\approx -5.0 \cdot 10^{-6},\\
|\Delta_5| &< 10^{-6}.
\end{aligned}
$$

Это означает, в частности, что примерно такую же погрешность, как у ныне действующего календаря, имел бы гипотетический календарь, основанный на приближении r_3, в котором на каждые 33 года приходилось бы 8 високосных лет. Тем самым, правило чередования високосных и обычных лет повторялось бы с периодом, который в 12 раз короче, чем в григорианском календаре. Если же воспользоваться приближением r_4, то получится календарь с периодом 128, в котором «выпадает» каждый 128-й високосный год. Этот календарь примерно в 50 раз точнее григорианского.

Отметим, однако, что система назначения «выпадающих» високосных дней в григорианском календаре привязана к годам смены столетий, что очень удобно при десятичной системе нумерации лет. Если бы люди так же любили двоичную систему, как компьютеры, то они наверное приняли бы календарь, основанный на приближении r_4. Заметим, что еще бо́льшая точность не требуется, так как продолжительность тропического года на самом деле медленно уменьшается и приближение r_5 тоже пришлось бы время от времени менять, а основанный на нем календарь не просуществовал бы и одного своего периода.

В защиту григорианского календаря можно привести еще одно его замечательное свойство: 400-летний период чередования дат (равный 146097 дням) является также периодом недельного цикла, так как содержит целое число недель.

Упражнение. *На какой день недели чаще выпадает 13-е число: на понедельник или на пятницу? Каким будет ответ на этот вопрос, если заменить григорианский календарь на какой-либо другой из рассмотренных в этой заметке?*

Литература

1. Куликовский П. Г. Справочник астронома-любителя. ГИТТЛ, М., 1954.
2. Хинчин А. Я. Цепные дроби. М., 1961.