ТЕОРЕМА БРАУЭРА.

Б.М. Макаров.

В теории нелинейных уравнений и топологии важную роль играет теорема Брауэра о существовании неподвижной точки у любого непрерывного отображения замкнутого n-мерного шара в себя. Она может быть легко выведена из теоремы об отсутствии гладкой ретракции шара на свою границу. Мы начнем с заимствованного из [1] доказательства последнего утверждения*.

Предполагается, что читатель знаком с теоремой о гладкой замене переменных в кратном интеграле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X — топологическое пространство, $A \subset X$. Непрерывное отображение $\Phi : X \to X$ называется *ретракцией* X *на* A, если

$$\Phi(X) \subset A, \quad \Phi(x) = x \text{ для всех } x \in A.$$

Введем следующие обозначения:
$B = \{x \in \mathbb{R}^m : ||x|| < 1\}$ — открытый m-мерный шар;
$\overline{B}$ — замыкание B;
$S^{m-1} = \partial B = \{x \in \mathbb{R}^m : ||x|| = 1\}$ — единичная сфера.

Условимся отображение, определенное в $\overline{B}$, называть гладким, если оно есть сужение отображения, гладкого в некотором открытом множестве, содержащем $\overline{B}$.

ТЕОРЕМА. *Не существует гладкой ретракции шара $\overline{B}$ на его границу.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Пусть G — содержащее $\overline{B}$ открытое множество и $\Phi : G \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, сужение которого на $\overline{B}$ есть ретракция шара $\overline{B}$ на сферу S^{m-1}. Поскольку образ $\overline{B}$ не имеет внутренних точек, ранг матрицы $\Phi'(x)$ не может быть максимальным, и поэтому

$$\det(\Phi'(x)) = 0 \quad \text{при всех } x \in \overline{B}. \tag{1}$$

Введем теперь семейство отображений $\{\Phi_t\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$, определив $\Phi_t : G \to \mathbb{R}^m$ равенством

$$\Phi_t(x) = (1-t)x + t\Phi(x) \quad \text{при } x \in G \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Ясно, что $\Phi_t(\overline{B}) \subset \overline{B}$ и, кроме того,

$$\Phi_t(B) \subset B \quad \text{при } 0 \leqslant t < 1, \tag{2}$$

так как

$$||\Phi_t(x)|| \leqslant (1-t)||x|| + t||\Phi(x)|| < (1-t) + t = 1 \quad \text{при всех } x \in B,\ 0 \leqslant t < 1.$$

На сфере S^{m-1} отображение Φ_t совпадает с тождественным. В самом деле,

$$\Phi_t(x) = (1-t)x + t\Phi(x) = (1-t)x + tx = x \quad \text{при } x \in S^{m-1}. \tag{3}$$

*Я благодарен В.П.Хавину, сообщившему мне это доказательство.

Как следует из определения Φ_t,

$$\Phi_t'(x) = (1-t)I + t\Phi'(x), \tag{4}$$

где I — единичная матрица. Кроме того, $\det(\Phi_0'(x)) = \det I = 1$, и поэтому при достаточно малых $t > 0$

$$\det(\Phi_t'(x)) > 0 \quad \text{при всех } \; x \in \overline{B}. \tag{5}$$

Будем считать, что неравенство (5) верно при $0 < t < \delta$. По теореме о сохранении области из (5) вытекает, что

$$\text{множество } \; \Phi_t(B) \; \text{ открыто при } \; 0 < t < \delta. \tag{6}$$

Убедимся , что из соотношений (2), (3) и (6) следует, что

$$\Phi_t(B) = B \quad \text{при } \; 0 < t < \delta. \tag{7}$$

Ввиду справедливости включения (2) нам достаточно показать, что множество $\Phi_t(B)$ не только открыто, но и замкнуто в B, после чего равенство (7) окажется справедливым в силу связности B. Итак, пусть $\{y_n\}_{n\geqslant 1} \subset \Phi_t(B)$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0 \in B$. Выберем $x_n \in B$ таким образом, чтобы $y_n = \Phi_t(x_n)$ при $n \in \mathbb{N}$. Не умаляя общности можно считать, что последовательность $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится (иначе можно заменить есходящейся подпоследовательностью). Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Если $||x_0|| = 1$, то $||\Phi_t(x_n)|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ||\Phi_t(x_0)|| = ||x_0|| = 1$, что невозможно, так как $||\Phi_t(x_n)|| = ||y_n|| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ||y_0|| < 1$. Поэтому $||x_0|| < 1$. Следовательно,

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0) \in \Phi(B),$$

что доказывает замкнутость $\Phi(B)$ в B, а вместе с тем и равенство (7).

Продолжая изучение свойств отображений Φ_t, убедимся, что при малых t они взаимно однозначны. В самом деле, если $x, y \in \overline{B}$, то из обобщенной формулы Лагранжа следует, что

$$||\Phi(x) - \Phi(y)|| \leqslant \Delta ||x - y||,$$

где $\Delta = \max_{z\in\overline{B}} ||\Phi'(z)||$. Поэтому при $x \neq y$

$$||\Phi_t(x) - \Phi_t(y)|| \geqslant (1-t)||x-y|| - t||\Phi(x) - \Phi(y)|| \geqslant (1-t)||x-y|| - t\Delta\,||x-y|| > 0$$

при достаточно малых $t > 0$ (точнее, при $0 < t < 1/(1+\Delta)$).

Итак, мы установили, что при достаточно малых положительных t отображение Φ_t преобразует шар B на себя взаимно однозначно. Поэтому, используя теорему о гладкой замене переменных в кратном интеграле и учитывая (5), мы получаем, что

$$\lambda_m(B) = \int_B \det(\Phi_t'(x))\,dx \quad \text{при достаточно малых } \; t > 0 \tag{8}$$

(символом λ_m мы обозначаем m-мерную меру Лебега).

Из (4) следует, что $\det(\Phi_t'(x))$ есть полином относительно t (степени не выше m). Следовательно, правая часть равенства (8) также полином относительно t.

Будучи постоянным при малых t, этот полином есть тождественная константа. Поэтому равенство (8) справедливо не только при малых, но и при всех $t \in \mathbb{R}$, в частности при $t = 1$. Поскольку $\Phi_1 \equiv \Phi$, из (8) вытекает, что

$$\lambda_m(B) = \int_B \det(\Phi'(x))\, dx.$$

Последнее, однако, невозможно, так как в силу (1) правая часть последнего равенства равна нулю.

Таким образом, предположение о существовании гладкой ретракции ведет к противоречию.

Покажем теперь, как теорема Брауэра может быть выведена из доказанной. Напомним, что неподвижной точкой отображения $f : X \to X$ называется такая точка $x \in X$, что $f(x) = x$.

ТЕОРЕМА (Брауэр*). *Всякое непрерывное отображение шара* $\overline{B}$ *в себя имеет неподвижную точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что утверждение теоремы неверно, и пусть $f : \overline{B} \to \overline{B}$ — непрерывное отображение, не имеющее неподвижной точки. Тогда разность $x - f(x)$ не обращается в нуль на $\overline{B}$, и поэтому существует такое положительное число δ, что

$$||x - f(x)|| > 2\delta \tag{9}$$

при всех $x \in \overline{B}$. Построим гладкое отображение шара в себя, также не имеющее неподвижной точки.

Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — координатные функции отображения f. По теореме Стоуна-Вейерштрасса найдутся полиномы $P_1, P_2, \ldots, P_m$ такие, что

$$|f_k(x) - P_k(x)| < \frac{\delta}{m} \quad \text{при всех } x \in \overline{B} \text{ и } k,\, 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Рассмотрим отображение $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ с координатными функциями P_k ($k = 1, 2, \ldots, m$). Ясно, что при всех $x \in \overline{B}$

$$||f(x) - F(x)||^2 = \sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - P_k(x)|^2 < \delta^2. \tag{10}$$

Образ шара $\overline{B}$ при отображении F может не содержаться в этом шаре. Поэтому мы рассмотрим отображение φ, полагая $\varphi = (1 + \delta)^{-1} F$. Очевидно, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Убедимся, что $\varphi(\overline{B}) \subset B$. В самом деле, при $x \in \overline{B}$

$$||\varphi(x)|| = \frac{1}{1+\delta}\, ||F(x)|| \leqslant \frac{1}{1+\delta}(||f(x)|| + ||F(x) - f(x)||) < \frac{1}{1+\delta}\,(1+\delta) = 1. \tag{11}$$

Проверим, что отображение φ не имеет неподвижной точки в $\overline{B}$. Действительно, в силу (9) и (10) при $x \in \overline{B}$ мы имеем

$$\begin{aligned} ||x - \varphi(x)|| &\geqslant ||x - f(x)|| - ||f(x) - \varphi(x)|| \\ &\geqslant 2\delta - \frac{\delta}{1+\delta}\, ||f(x)|| - \frac{1}{1+\delta} ||f(x) - F(x)|| \geqslant 2\delta - \frac{2\delta}{1+\delta} > 0. \end{aligned} \tag{12}$$

*Лейтзен Эгберт Ян **Брауэр** (1881-1966) — голландский математик.

Таким образом, если есть непрерывное отображение шара в себя, не имеющее неподвижной точки, то есть и гладкое отображение с теми же свойствами.

Построим с помощью φ гладкую ретракцию шара на границу.

Так как в силу (11) и (12) при $x \in \overline{B}$ точка $\varphi(x)$ лежит в B и не совпадает с x, то луч $\mathbf{l} = \{\varphi(x)+t(x-\varphi(x)) : t \geqslant 0\}$ с началом в $\varphi(x)$, проходящий через x, пересекается со сферой S^{m-1} в единственной точке (сделайте рисунок!). Аналитически это означает, что квадратное относительно t уравнение $||\varphi(x)+t(x-\varphi(x))||^2 = 1$ имеет единственное положительное решение. Это уравнение может быть переписано в виде

$$||x - \varphi(x)||^2 t^2 - 2(\varphi(x), \varphi(x) - x)\, t + ||\varphi(x)||^2 - 1 = 0,$$

и его положительный корень, который мы обозначим t^*, вычисляется по формуле

$$t^* = \frac{(\varphi(x), \varphi(x) - x) + \sqrt{(\varphi(x), \varphi(x) - x)^2 + ||x - \varphi(x)||^2 (1 - ||\varphi(x)||^2}}{||x - \varphi(x)||^2}. \qquad (13)$$

Теперь мы можем определить отображение Φ, которое и будет искомой ретракцией. Положим

$$\Phi(x) = \varphi(x) + t^*(x - \varphi(x)) \quad \text{при } x \in \overline{B}, \qquad (14)$$

где число t^* определяется равенством (13). Ясно, что точка $\Phi(x)$ совпадает с точкой пересечения луча $\mathbf{l}$ со сферой S^{m-1}. Из (11) и (12) следует, что знаменатель и подкоренное выражение в (13) не обращаются в нуль не только в шаре $\overline{B}$, но и в некоторой его окрестности, и поэтому правая часть равенства (14) определена и сохраняет гладкость в окрестности шара $\overline{B}$. Таким образом, отображение Φ гладкое. По определению t^* мы получаем, что $||\Phi(x)|| = 1$ при всех $x \in \overline{B}$. Кроме того, если $||x|| = 1$, то точка пересечения луча $\mathbf{l}$ со сферой совпадает с x (что, как нетрудно проверить, равносильно равенству $t^* = 1$). Следовательно, на сфере отображение Φ совпадает с тождественным и, таким образом, является гладкой ретракцией. Так как по предыдущей теореме такой ретракции не существует, мы видим, что предположение об отсутствии неподвижной точки приводит к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* $K \subset \mathbb{R}^m$ *— компактное множество, гомеоморфное шару* $\overline{B}$. *Всякое непрерывное отображение множества* K *в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство этого следствия мы предоставляем читателю.

Докажем в заключение, что теорема Брауэра верна и в следующей, формально более сильной, редакции.

ТЕОРЕМА. *Пусть* K *—выпуклое компактное подмножество пространства* $\mathbb{R}^m$. *Всякое непрерывное отображение множества* K *в себя имеет неподвижную точку.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно установить, что множество K гомеоморфно замкнутому шару, содержащемуся в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^l$ при некотором $l \leqslant m$.

Пусть сначала $\mathrm{Int}(K) \neq \varnothing$. Используя в случае необходимости сдвиг, мы можем считать, что $0 \in \mathrm{Int}(K)$. Тогда, очевидно, найдутся такие положительные числа R, r, что

$$\overline{B}(r) \subset K \subset \overline{B}(R), \qquad (15)$$

и пусть p_K — функционал Минковского для K:

$$p_K(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in K\}.$$

Из (15) немедленно вытекает, что

$$\frac{1}{R}\,||x|| \leqslant p_K(x) \leqslant \frac{1}{r}\,||x|| \quad \text{при всех } \ x \in \mathbb{R}^m.$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно убедиться, что из выпуклости множества K вытекает справедливость неравенства треугольника для функционала Минковского:

$$p_K(x+y) \leqslant p_K(x) + p_K(y) \qquad \text{при всех } \ x, y \in \mathbb{R}^m.$$

Из неравенства треугольника легко вывести, что

$$|p_K(x) - p_K(y)| \leqslant \max\{p_K(x-y), p_K(y-x)\} \leqslant \frac{1}{r}\,||x-y||,$$

откуде, очевидно, следует непрерывность функционала Минковского.

Определим теперь отображение ω равенством

$$\omega(x) = \begin{cases} p_K(x)\frac{x}{||x||} & \text{при } \ x \in \mathbb{R}^m,\ x \neq 0, \\ 0 & \text{при } \ x = 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что отображение ω взаимно однозначно и непрерывно. Читатель без труда убедится, что $\omega(K) \subset \overline{B}$ и $\omega^{-1}(\overline{B}) \subset K$, из чего, очевидно, следует, что ω — искомый гомеоморфизм.

Пусть теперь множество K произвольно. Не умаляя общности, можно считать, что $0 \in K$. Пусть l — максимальное число линейно независимых векторов, содержащихся в K. Мы будем предполагать, что $l = m$ (иначе K содержится в евклидовом пространстве размерности l, и все рассуждения можно провести, заменяя $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^l$).

Убедимся, что $\mathrm{Int}(K) \neq \varnothing$. В самом деле, пусть $x_1, x_2, \dots, x_m$ — линейно независимые векторы из K. Тогда симплекс S с вершинами в точках $0, x_1, x_2, \dots, x_m$ содержится в K, и его барицентр, то есть точка

$$\frac{1}{m+1}(x_1 + x_2 + \dots + x_m) = \frac{1}{m+1}(0 + x_1 + x_2 + \cdots x_m),$$

— принадлежит $\mathrm{Int}(S)$, а следовательно и $\mathrm{Int}(K)$. Как уже установлено выше, в этом случае множество K гомеоморфно замкнутому m-мерному шару.