РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЛЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

Предложение.

Пусть функция $\psi_j : X \to \mathbb{R}$ *удовлетворяет условиям* $\int \psi_j^2 = 1$, $||\psi_j||_\infty \le M < +\infty$ *и*

$$\int \Big(\sum_j c_j \psi_j\Big)^2 \le A^2 \sum_j c_j^2$$

для всех $c_j \in \mathbb{R}$.

Тогда для всякой последовательности a_j, *удовлетворяющей условию* $\sum_j a_j^2 = 1$, *найдется функция* $F \in L^\infty(X)$, *для которой*

$$||F||_\infty \le 10\, A\, M, \quad \text{в то время как} \quad \Big|\int F\psi_j\Big| \ge a_j \quad \text{для всех } j.$$

Основной пример.

Пусть $E \subset \mathbb{T}$ — подмножество положительной меры, $X = E$,

$$\psi_j(z) = \frac{1}{\sqrt{\mu(E)}}\, z^{-j}$$

(здесь $\psi_j : X \to \mathbb{C}$, а не в $\mathbb{R}$, что совершенно не важно). Тогда мы получаем ограниченную функцию с заданным носителем (E) и большими коэффициентами Фурье.

Доказательство. Зафиксируем маленькое $\delta > 0$ (выберем его позднее) и рассмотрим функцию $\Phi(x) = x^2 e^{-\delta x^2}$.

Лемма.

$$\Phi(y) \ge \Phi(x) + \Phi'(x)(y-x) + (y-x)^2 - 6\delta(x^2+y^2)(y-x)^2.$$

Доказательство леммы.

Рассмотрим неравенство

$$\Phi(y) \ge \Phi(x) + \Phi'(x)(y-x) + \frac{1}{2}\Phi''(\xi)(y-x)^2,$$

где ξ лежит между x и y (формула Тейлора). Достаточно показать, что

$$\frac{1}{2}\Phi''(\xi) \ge 1 - 6\delta(x^2+y^2).$$

Мы имеем

$$\frac{1}{2}\Phi''(\xi) = (1 - 5\delta\xi^2 + 2\delta^2\xi^4)e^{-\delta\xi^2}.$$

Поскольку $2\delta^2\xi^4 \ge 0$,

$$e^{-\delta\xi^2} - 5\delta\xi^2 e^{-\delta\xi^2} \ge 1 - 6\delta\xi^2,$$

и, так как ξ находится между x и y, мы приходим к неравенству $\xi^2 \le x^2 + y^2$. Лемма доказана.

Основная конструкция

Не умаляя общности, мы можем считать, что набор $\{\psi_j\}$ конечен. Положим $\varphi_j = a_j\psi_j$ (таким образом, $\int \varphi_j^2 = a_j^2$, и $||\varphi_j||_\infty \le Ma_j$).

Для каждого "кортежа" $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}$, где $\varepsilon_j = +1$ или -1, рассмотрим соответствующую функцию $f_\varepsilon = \sum_j \varepsilon_j\varphi_j$. Выберем кортеж ε, дающий максимальное значение интегралу $\int \Phi(f_\varepsilon)$. Поскольку замена ψ_j на $-\psi_j$ ничего не меняет в рассматриваемой проблеме, можно предположить, что это кортеж из $+1$-ц, что соответствует функции $f = \sum_j \varphi_j$.

Попробуем в этой сумме заменить $+\varphi_i$ на $-\varphi_i$. Тогда должно получиться

$$0 \ge \int \Phi(f-2\varphi_i) - \int \Phi(f) \ge -2\int \Phi'(f)\varphi_i + 4\int \varphi_i^2 - 6\delta \int [f^2 + (f-2\varphi_i)^2]4\varphi_i^2$$

(последнее неравенство следует из леммы). Но $\int f^2\varphi_i^2 \le ||\varphi_i||_\infty^2 \int f^2 \le M^2A^2a_i^2$, и то же верно для интеграла $\int (f-2\varphi_i)^2\varphi_i^2$. Поэтому

$$\int \Phi'(f)\varphi_i \ge 2\int \varphi_i^2 - 24\delta M^2A^2a_i^2 = 2(1-12\delta M^2A^2)a_i^2.$$

Полагая здесь $\delta = \frac{1}{24M^2A^2}$, получим

$$\int \Phi'(f)\varphi_i \ge a_i^2, \quad \text{что равносильно} \quad \int \Phi'(f)\psi_i \ge a_i.$$

Но $F = \Phi'(f) = 2(f-\delta f^3)e^{-\delta f^2}$ — ограниченная функция, и $||F||_\infty \le \frac{2}{\sqrt{\delta}} \le 10\,A\,M$, например.

Вот и все!!!!!!!!!!!!!!

Заключительные замечания.

1) Я выделил только простейший случай Предложения. В действительности условие $||\psi_j||_\infty \le M$ избыточно. В случае, когда полная мера множества X конечна (то есть когда пространство L^∞ является подмножеством L^2 и поэтому представляет естественный класс, в котором имеет смысл ставить задачу) это условие можно заменить на условие $\int |\psi_j| \ge \kappa > 0$ (которое, очевидно, является **абсолютно необходимым**). Я бы хотел знать, дает ли стандартный подход со случайными суммами такой же результат даже в случае строгой ортогональности ...

2)Я не собираюсь публиковать этот результат в ближашем будущем, но, как всегда, можно давать копию этого текста всем, кого это (за)интересует.

Федя.

East Lansing, 5 сентября 1995 г.