ТЕОРЕМА ОБ АНТИПОДАХ.

Б.М. Макаров.

ОБОЗНАЧЕНИЯ:

B^n — замкнутый единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^n$;
S^{n-1} — граница B^n;
$S_{\pm}^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \pm x_1 \geqslant 0\}$;
$C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений из X в Y.

Нашей целью является доказательство принадлежащей Борсуку* теоремы об антиподах**. Чтобы было более удобно формулировать эту теорему и еследствия, введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Непрерывное отображение $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^m$ будем называть нечетным, если $f(-x) = -f(x)$ при всех x из S^{n-1}. Нечетное отображение называется антиподальным, если $||f(x)|| = 1$ при всех $x \in S^{n-1}$, то есть, если образ нечетного отображения f содержится в сфере.

ТЕОРЕМА (Борсук). *Пусть $f \in C(B^n, \mathbb{R}^n)$. Если сужение f на S^{n-1} нечетно, то существует такая точка $x_0 \in B^n$, что $f(x_0) = 0$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Что получается из этой теоремы, если $f(B^n)$ содержится в одномерном подпространстве пространства $\mathbb{R}^n$?

Убедитесь, что теорема не может быть верна для отображений из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$, и вообще для отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Отметим сразу же несколько следствий из этой важной теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если непрерывное отображение $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ антиподально на S^{n-1}, то $f(B^n) \supset B^n$.*

Ввиду замкнутости множества $f(B^n)$ достаточно проверить, что оно содержит открытый единичный шар. Не умаляя общности можно считать, что $f(B^n) \subset B^n$ (иначе отображение f можно заменить отображением $\widetilde{f}$, где $\widetilde{f}(x) = f(x)/\max(1, ||f(x)||)$). Пусть $y_0 \in \mathbb{R}^n, ||y_0|| < 1$. Рассмотрим гомеоморфное отображение φ шара B^n на себя, переводящее точку y_0 в 0 и тождественное на S^{n-1} (убедитесь, что такой гомеоморфизм действительно существует!). Применяя теорему к отображению $g = \varphi \circ f$, мы получаем требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Не существует антиподального отображения S^{n-1} в сферу меньшей размерности.*

Действительно, в противном случае сужение такого отображения на полусферу S_+^{n-1} легко превращается в отображение шара B^{n-1} в $S^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, антиподальное на границе, но не принимающее нулевого значения, что ведет к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ 3. *При любом непрерывном отображении сферы $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ найдутся антиподы (точки $\pm x_0$ из S^n), имеющие общие образы.*

Действительно, в противном случае, отображение $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{||f(x)-x(-x)||}$ будет антиподальным отображением S^n в S^{n-1}, что по следствию 2 невозможно.

---

*Кароль **Борсук** (1905-1982) — польский математик.

**Borsuk K. Fundam. Math., 1933, t. 20, p. 177-190.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Не существует ретракции шара B^n на его границу.*

Напомним, что ретракцией топологического пространства X на его подпространство Y называется непрерывное отображение X в Y, совпадающее на Y с тождественным. Ретракция шара B^n на его границу являлась бы нечетным отображением на S^{n-1}, не принимающим, в противоречие с теоремой, нулевого значения в B^n.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ в двумерном случае. Чтобы пояснить идею доказательства теоремы, мы, прежде чем рассматривать общую ситуацию, обсудим сначала частный случай, когда $n = 2$ и отображение f гладкое. Мы будем использовать понятия интеграла от 1-формы по гладкому пути

и индекса гладкого замкнутого пути относительно нуля. Напомним еще, что интегралы от замкнутой формы по замкнутым петельно гомотопным путям равны.

Если замкнутый путь γ лежит в области $G_0 = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, то по определению

$$\operatorname{Ind}(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_r}\omega_1, \quad \text{где } \omega_1 \text{ есть 1-форма: } \omega_1 = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. 1) Убедитесь, что форма ω_1 замкнута в G_0 и что в правой полуплоскости $\omega_1 = d(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})$, а в верхней полуплоскости $\omega_1 = d(\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}})$.

2) Докажите, что если гладкий путь γ лежит в G_0 и соединяет точки A и $-A$, то $\int_\gamma \omega_1 = (1+2k)\pi \neq 0$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Предположим, что непрерывное отображение $f : B^2 \to \mathbb{R}^2$ не обращается в нуль в круге B^2. Рассмотрим семейство гомотопных в G_0 путей $\{\gamma_r\}_{0\leqslant r\leqslant 1}$, где $\gamma_r(t) = f(r\cos t, r\sin t)$, при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Вычислим индексы этих путей относительно нуля. Так как форма ω_1 замкнута, а пути γ_0 и γ_1 гомотопны в G_0, то

$$0 = \int_{\gamma_0}\omega_1 = \int_{\gamma_1}\omega_1 = 2\pi\operatorname{Ind}(\gamma_1, 0).$$

Убедимся теперь, что

$$\operatorname{Ind}(\gamma_1, 0) \neq 0 \tag{1}$$

из-за нечетности отображения f на S^1. В самом деле, положим $A = \gamma(0)$. Если $\gamma_1(t) = (x(t), y(t))$, то $x(t+\pi) = -x(t)$, $y(t+\pi) = -y(t)$, $x'(t+\pi) = -x'(t)$, $y'(t+\pi) = y'(t)$, $\gamma_1(\pi) = -A$ и

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\gamma_1}\omega_1 &= \int_0^{2\pi}\frac{x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\,dt = \left(\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}\right)\frac{x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\,dt \\ &= 2\int_0^{\pi}\frac{x(t)\,y'(t) - x'(t)\,y(t)}{x^2(t)+y^2(t)}\,dt = 2\int_{\widetilde{\gamma}}\omega_1 \neq 0, \end{aligned}$$

где $\widetilde{\gamma}$ есть сужение пути γ_1 на промежуток $[0, \pi]$ — путь, соединяющий точки A и $-A$. Полученное противоречие завершает доказательство частного случая.

Доказательство теоремы в общем случае основано на интегрировании дифференциальных форм и теореме Стокса. Вместо замкнутых путей, использовавшихся в плоском случае, мы будем теперь рассматривать *циклы* — гладкие отображения сфер. Всюду далее мы (если не оговорено противное) будем для определенности считать, что ориентация сферы S^{n-1} определяется внутренней нормалью (для S^1 это соответствует обходу "против часовой стрелки"), а ориентация полусфер индуцирована ориентацией сферы.

Напомним, что интеграл $\int_f \omega$ от $(n-1)$-формы

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} a_n(x)\, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}_k \wedge \cdots \wedge dx_n$$

по циклу $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ с координатными функциями $f_1, \ldots, f_n$ определяется как интеграл

$$\int_{S^{n-1}} f^*\omega \equiv \int_{S^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} a_k(f(y))\, df_1(y) \wedge \cdots \wedge \widehat{df}_k(y) \wedge \cdots \wedge df_n(y)$$

(символ $\widehat{}$ над дифференциалом означает, что этот дифференциал опускается). Заметим, что если f есть диффеоморфизм между S^{n-1} и многообразием $M = f(S^{n-1})$, то последний интеграл есть не что иное как поток векторного поля $\vec{A} = ((-1)^{k-1}a_k)_{k=1}^n$ через M, то есть совпадает (при надлежащем выборе семейства нормалей $\{\vec{n}(x)\}_{x\in M}$ — стороны многообразия M) с $\int_M (\vec{A}(x), \vec{n}(x))\, d\sigma_M(x)$, где σ_M — мера Лебега на M (площадь поверхности). Все эти факты совершенно аналогичны соответствующим результатам об интегрировании 1-форм по гладким замкнутым путям. Интеграл по сужению цикла на полусферу определяется естественным образом.

Систематическое изложение необходимых сведений о дифференциальных формах и их интегрировании читатель может найти, например, в книге У.Рудина "Основы математического анализа" (три последние параграфа главы 9). Кроме этого, нам потребуется следующий результат, служащий обобщением известного из курса анализа (и уже использованного нами выше) утверждения о том, что интегралы от замкнутой 1-формы по петельно гомотопным путям совпадают. Сформулируем этот результат более подробно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть G — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, ω — замкнутая $(n-1)$-форма в G. Если два цикла f_0, f_1 из $C^1(S^{n-1}, \mathbb{R}^n)$ гладко гомотопны в G, то есть если существует такое гладкое отображение F цилиндра $S^{n-1} \times [0,1]$ в G, что $f_0(x) = F(x,0)$, $f_1(x) = F(x,1)$ при $x \in S^{n-1}$, то*

$$\int_{f_0} \omega = \int_{f_1} \omega.$$

Доказательство этого предложения можно легко вывести из формулы Стокса (см., например, Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко "Современная геометрия. Методы теории гомологий", гл. 1, §1, стр. 14).

ЛЕММА 1. *Пусть f — нечетное отображение из $C^1(S^{n-1},\mathbb{R}^n)$, f_+, f_- — сужения f на S_+^{n-1}, S_-^{n-1} соответственно, и пусть $h\in C(f(S^{n-1}),\mathbb{R})$. Тогда*

$$\int_{f_-} h(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_k}\wedge\ldots\wedge dx_n = -\int_{f_+} h(-x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_k}\wedge\ldots\wedge dx_n.$$

Доказательство этой леммы мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

Аналогом рассматривавшейся на плоскости формы ω_1 в n-мерном случае (при $n\geqslant 3$) является $(n-1)$-форма

$$\omega_{n-1}\equiv\omega_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)=r^{-n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}x_k\,dx_1\wedge\ldots\wedge\widehat{dx_k}\wedge\ldots\wedge dx_n,\quad (r\neq 0),$$

где $r=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$. На языке векторных полей этой форме соответствует поле градиента функции $\frac{1}{r}$. Интеграл от формы ω_{n-1} по поверхности, то есть поток векторного поля $\operatorname{grad}\frac{1}{r^{n-2}}$ через эту поверхность (интеграл Гаусса), есть мера сферического изображения поверхности. В частности, если V — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью и гладкой границей, σ — мера Лебега на ∂V, $\vec{n}(x)$ — внешняя нормаль в точке границы и $0\notin\partial V$, то, как легко вывести из формулы Остроградского, при достаточно малом $\delta>0$

$$\int_{\partial V}\omega_{n-1}=\int_{\partial V}\frac{(x,\vec{n})}{r^n}\,d\sigma(x)=\int_{S_\delta^{n-1}}\frac{(x,\vec{n}_0)}{r^n}\,d\sigma_{n-1}(x)=\begin{cases}\sigma_{n-1}(S^{n-1}), & \text{если } 0\in V,\\ 0, & \text{если } 0\notin V,\end{cases}$$

где S_δ^{n-1} — сфера радиуса δ, σ_{n-1} — мера Лебега (площадь) на этой сфере, а $\vec{n}_0$ — внешняя нормаль.

Сказанное позволяет смотреть на интеграл

$$\frac{1}{\sigma_{n-1}(S^{n-1})}\int_f\omega_{n-1}$$

по циклу f как на обобщение понятия индекса замкнутого пути относительно нуля.

ЛЕММА 2. *Форма ω_{n-1} замкнута в $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Если $\rho=\sqrt{x_2^2+\cdots+x_n^2}$, $G=\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n):\rho\neq 0\}$, то форма ω_{n-1} точна в G, причем $\omega_{n-1}=d\Omega$, где*

$$\begin{aligned}\Omega&=-\int_{x_1/\rho}^{\infty}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\omega_{n-2}(x_2,\ldots,x_n)\\&=-\int_{x_1/\rho}^{\infty}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot\frac{1}{\rho^{n-1}}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k x_k dx_2\wedge\ldots\widehat{dx_k}\wedge\ldots\wedge dx_n.\end{aligned}$$

Замкнутость формы ω_{n-1} и справедливость (в G) равенства $\omega_{n-1}=d\Omega$ проверяется непосредственным дифференцированием, и мы предоставляем эту проверку читателю. Интересно отметить*, что в трехмерном случае утверждение леммы можно сформулировать и так: в области G градиент функции $\frac{1}{r}$, является ротором векторного поля

$$\vec{A}(x_1,x_2,x_3)=(\,0,\,\Phi(x_1,\rho)\,\frac{x_3}{\rho^2},\,-\Phi(x_1,\rho)\,\frac{x_2}{\rho^2}\,),$$

где $\Phi(x,\rho)=\int_{x/\rho}^{+\infty}\frac{ds}{(1+s^2)^{3/2}}$, $\rho=\sqrt{x_2^2+x_3^2}$, $r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.

*Это замечание принадлежит В.П.Хавину.

Следующая лемма играет для нас решающую роль.

ЛЕММА 3. Пусть f — нечетное отображение из $C^1(S^{n-1},\mathbb{R}^n)$, $f(x)\neq 0$ при $x\in S^{n-1}$, и пусть f_+, f_- — сужения f на S^{n-1}_+, S^{n-1}_- соответственно. Если $H\in C(f(S^{n-1}),\mathbb{R})$ то

$$\int_{f_-} H(x)\,\omega_{n-1}=\int_{f_+} H(-x)\,\omega_{n-1}; \tag{2}$$

$$\text{в частности,}\qquad \int_{f}\omega_{n-1}=2\int_{f_+}\omega_{n-1}; \tag{$2'$}$$

и

$$I_n\equiv \textstyle\int_f\omega_{n-1}\neq 0. \tag{3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (2) следует из леммы 1, примененной к функциям $h(x)=H(x)\frac{x_k}{r^n}$.

Неравенство (3) доказывается по индукции. Для $n=2$ оно уже доказано (см. (1)). Будем доказывать (3) для формы ω_{n-1}, предполагая, что оно верно для ω_{n-2} и считая, что пространство $\mathbb{R}^{n-1}$ отождествлено с подпространством $x_1=0$ пространства $\mathbb{R}^n$ и тем самым сфера S^{n-2} отождествлена с "экватором" $x_1=0$ сферы S^{n-1}.

Положим $g(x)=f(x)/||f(x)||$ при $x\in S^{n-1}$. Так как отображение g гладкое, то множество $g(S^{n-2})$ является подмножеством нулевой меры на сфере S^{n-1}. Поэтому оно не содержит некоторой пары точек $\pm x_0\in S^{n-1}$ и, следовательно, образ отображения f не пересекается с прямой, проходящей через эти точки. Не умаляя общности, мы можем считать, что эта прямая есть ось x_1, то есть, что $f(S^{n-1})\subset G$. Положим еще для краткости

$$\Phi(x)=-\int_{x_1/\rho}^{\infty}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{n}{2}}}\qquad \text{где}\ \ x=(x_1,\dots,x_n)\in G,\ \ \rho=\sqrt{x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

Тогда, применяя теорему Стокса, мы имеем

$$\begin{aligned} I_n&=2\int_{f_+}\omega_{n-1}=2\int_{f_+}d\Omega=2\int_{\varphi}\Omega\\ &=2\int_{\varphi_+}\Phi(x)\,\omega_{n-2}+2\int_{\varphi_-}\Phi(x)\,\omega_{n-2},\end{aligned}$$

где $\varphi,\varphi_\pm$ — сужения f на S^{n-2}, $S^{n-2}_\pm$ соответственно (мы считаем, что сфера S^{n-2} ориентирована как край полусферы S^{n-1}_+). Используя равенство (2) во втором интеграле в правой части последнего равенства, мы видим, что

$$I_n=2\int_{\varphi_+}[\Phi(x)+\Phi(-x)]\,\omega_{n-2}. \tag{4}$$

Замечательным образом оказывается, что сумма $\Phi(x)+\Phi(-x)$ постоянна. Действительно,

$$\begin{aligned}\Phi(x)+\Phi(-x)&=-\int_{x_1/\rho}^{+\infty}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{n}{2}}}-\int_{-x_1/\rho}^{+\infty}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{n}{2}}}\\ &=-\int_{x_1/\rho}^{+\infty}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{n}{2}}}-\int_{-\infty}^{x_1/\rho}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{n}{2}}}=-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds}{(1+s^2)^{\frac{n}{2}}}\\ &\equiv c_n\neq 0.\end{aligned}$$

Подставляя этот результат в (4), мы получаем

$$I_n = 2\int_{\varphi_+} c_n\,\omega_{n-2} = c_n\int_{\varphi}\omega_{n-2}.$$

Так как форма ω_{n-2} не зависит от первой координаты, то

$$\int_{\varphi}\omega_{n-2} = \int_{P\varphi}\omega_{n-2},$$

где P — проекция пространства $\mathbb{R}^n$ на подпространство $x_1 = 0$, отождествляемое нами с $\mathbb{R}^{n-1}$. Таким образом, $\int_{\varphi}\omega_{n-2} = \pm I_{n-1}$ (мы пишем $\pm$ перед I_{n-1}, поскольку не хотим выяснять, совпадает ли ориентация сферы S^{n-2} как края полусферы S_+^{n-1} с участвующей в определении интеграла I_{n-1} ориентацией ес помощью внутренней нормали в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$). Следовательно, $I_n = \pm c_n\,I_{n-1} \neq 0$, что завершает доказательство леммы 3.

Теперь мы готовы приступить к доказательству теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Будем рассуждать от противного. Пусть непрерывное отображение $f : B^n \to \mathbb{R}^n$ нечетно на S^{n-1} и не обращается в нуль в B^n. Тогда при некотором $\delta > 0$

$$||f(x)|| \geqslant \delta \qquad \text{при всех } \ x \in B^n. \tag{5}$$

Убедимся теперь, что отображение f можно считать гладким. В самом деле, пусть $f_1, \ldots, f_n$ — координатные функции f. Зафиксируем положительное число ε (выбор его мы уточним ниже) и используя теорему Стоуна-Вейерштрасса найдем такие многочлены $P_1, \ldots, P_n$, что

$$|f_k(x) - P_k(x)| < \varepsilon \quad \text{при всех } \ x \in B^n,\ k = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Каждый полином P_k представим в виде суммы нечетного полинома Q_k и четного полинома R_k. Используя (6), оценим величину R_k на S^{n-1}:

$$\begin{aligned} 2|R_k(x)| &= |\,[R_k(x) + Q_k(x) - f(x)] + [R_k(-x) + Q_k(-x) - f(-x)]\,| \\ &\leqslant |P(x) - f(x)| + |P(-x) - f(-x)| < 2\varepsilon \qquad\qquad \text{при } \ x \in S^{n-1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $|R_k(x)| < \varepsilon$ на S^{n-1}. Положим

$$G_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : |R_k(x)| < 2\varepsilon \text{ при } \ k = 1, \ldots n\},$$

и пусть $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ такая функция, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ и

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \ x \in B^n \setminus G_\varepsilon, \\ 0 & \text{при } \ ||x|| \geqslant 1. \end{cases}$$

Заметим, что всюду в B^n

$$|R_k(x)|(1 - \varphi(x)| \leqslant 2\varepsilon. \tag{7}$$

Положим теперь $g_k = Q_k + \varphi R_k$, и пусть $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — отображение с координатными функциями $g_1, \ldots, g_n$. Очевидно, что отображение g нечетно на S^{n-1}, $g \in C^\infty$. Оценим отклонение g от f на B^n.

$$||f(x) - g(x)|| \leqslant ||f(x) - P(x)|| + ||P(x) - g(x)|| \leqslant \varepsilon + \left(\sum_{k=1}^{n} |R_k(x)|^2 (1 - \varphi(x))^2\right)^{1/2}.$$

Используя (7), мы получаем

$$||f(x) - g(x)|| \leqslant \varepsilon + 2\varepsilon\sqrt{n} \quad \text{при всех } x \in B^n. \tag{8}$$

Будем считать, что число $\varepsilon > 0$ было выбрано настолько малым, что правая часть неравенства (8) меньше δ. Тогда из (5) и (8) следует, что при $x \in B^n$

$$||g(x)|| \geqslant ||f(x)|| + ||g(x) - f(x)|| > 0.$$

Итак, g — гладкое отображение шара B^n в пространство $\mathbb{R}^n$, нечетное на границе и не обращающееся в нуль. Это позволяет считать, что отображение f, существование которого предположено нами в начале доказательства, является гладким (поскольку в противном случае мы можем заменить f на g).

Определим на цилиндре $S^{n-1} \times [0,1]$ отображение F равенством

$$F(x, r) = f(rx) \qquad \text{при } x \in S^{n-1},\ r \in [0,1].$$

Так как f не обращается в нуль, то отображение F есть гладкая гомотопия в области $G_0 = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ между $f_0 = F(.,0)$ — постоянным отображением ($f_0(x) = f(0)$) и $f_1 = F(.,1)$ — сужением f на S^{n-1}. Поэтому, используя приведенное выше предложение и лемму 3, мы имеем

$$0 = \int_{f_0} \omega_{n-1} = \int_{f_1} \omega_{n-1} \neq 0.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.